« Ampères » : Une recherche INRP/ADIREM pour dynamiser l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée(*)

Quelques travaux menés par l'équipe de l'IREM de Clermont-Ferrand

F. Barachet, G. Le Quang, R. Noirfalise(**)

I. Introduction

Ampères est un sigle pour « Apprentissages mathématiques et parcours d'étude et de recherche pour l'enseignement secondaire ». Il désigne une recherche INRP/ADIREM initiée par la commission inter-IREM de Didactique. Des équipes des IREM de Bordeaux, Clermont-Ferrand, Marseille, Poitiers, de l'IUFM de Toulouse contribuent à son développement. Des liens sont établis avec d'autres équipes au sein d'IREM mais aussi avec des groupes de recherche belges, espagnols et italiens car les problèmes abordés ne sont pas spécifiques de l'enseignement de notre discipline en France mais se retrouvent également chez nos voisins européens.

Un des motifs essentiels qui a donné naissance à ce projet de recherche est le problème posé, au quotidien, par le manque d'engagement des élèves dans les études. Comme le dit O. Molini (sur le site du café pédagogique du 1er septembre 2008) « *Demandez aux enseignants quels sont leurs principaux sujets de préoccupation : les salaires, les programmes, les notes et l'évaluation, les parents, la laïcité, la violence, les incivilités… ? Vous n'y êtes pas : c'est la motivation des élèves, leur engagement dans le travail scolaire, leur intérêt pour les activités et les savoirs constitués.* »

Divers rapports et enquêtes internationales soulignent aussi l'urgence à redonner du sens aux mathématiques enseignées dans le secondaire. C'est ainsi que l'on trouve dans le nº 476 du BV de mai-juin 2008, un court article de Florence Mottot dont le titre est « *Les élèves des pays riches snobent les sciences* ». Celui-ci résume, à grands traits, les résultats d'une enquête internationale sur les sciences lancé par l'organisme Rose (Relevance of science education). On peut y lire « *…plus un pays est prospère, plus les écoliers tendent à considérer l'enseignement scientifique comme ennuyeux voire inutile* ». Comme si un tel enseignement ne leur apprenait rien sur le monde dans lequel ils vivent ! L'auteur cite Sophie Ernst, chargée d'études au département de

(*) D'après un atelier aux journées APMEP de La Rochelle.

(**) F. Barachet, professeur au lycée Montdory à Thiers, puis IA.IPR à l'académie de Clermont-ferrand, G.Le Quang, professeur au collège de Beaumont, R. Noirfalise, maître de conférences à l'Univesité Blaise Pascal.

philosophie de l'INRP : « *Je crois que ce qui manque souvent dans l'enseignement des sciences, c'est le sens d'un enjeu, d'un problème non résolu à l'avance… Pour comprendre ce qu'est une investigation, il nous faut plutôt lire les enquêtes de Sherlock Holmes que suivre un cours de physique* ».
Sous la présidence de Michel Rocard (alors eurodéputé), un groupe d'experts européens a été constitué pour examiner les mesures à prendre pour lutter contre la désaffection des jeunes pour les études scientifiques. Remis en 2007, la principale recommandation de leur rapport[1] est d'appeler à un changement radical dans l'enseignement des sciences, de proposer de passer de méthodes principalement déductives à des méthodes basées sur le questionnement.

Retrouver le sens d'un enjeu, d'un problème non résolu à l'avance, bâtir un enseignement à partir de questions, c'est ce que nous essayons de faire tout en respectant les programmes officiels. On peut, à ce titre, énoncer deux principes que nous essayons de mettre en œuvre pour dynamiser l'étude de notre discipline :

1. Partir de questions à fort pouvoir générateur d'études et de recherches.

À titre d'exemples, citons pour le domaine de la géométrie les questions suivantes :
- Comment déterminer la distance entre deux points inaccessibles ?
- Comment déterminer une aire, un volume ?
- Comment représenter un solide ?
- Comment se repérer sur une droite, dans le plan, dans l'espace ?
- Comment construire une figure répondant à des spécifications ?

Des réponses à de telles questions ne peuvent se formuler en quelques instants et bien au contraire peuvent s'élaborer sur plusieurs années scolaires. La détermination des distances inaccessibles peut débuter en cinquième avec des triangles superposables, et se terminer en Première S avec la loi des sinus et le théorème d'Al-Kashi. On s'autorise donc à poser des problèmes qui ne peuvent être résolus en quelques minutes contrairement à la plupart de ceux rencontrés dans les activités proposées à l'heure actuelle.

2. Le rôle du professeur est celui d'un directeur d'études :

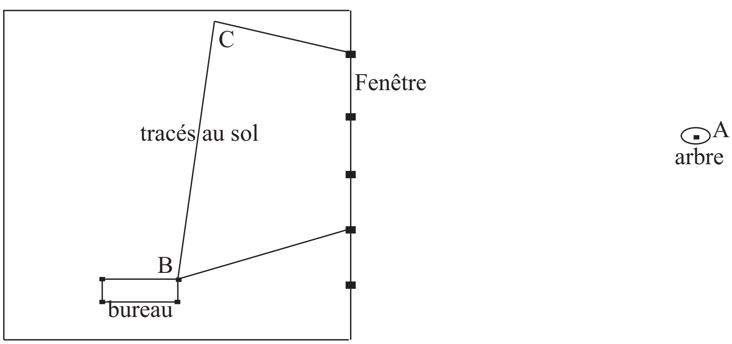
Le travail engagé pour l'étude d'une question engendre d'autres questions et c'est ce qui fait la dynamique de l'étude. Pendant la recherche, à l'aide d'un jeu de questions cruciales formulées par la classe sous l'impulsion du professeur qui dirige l'étude, on avance vers les connaissances visées ce qui sous-entend une analyse *a priori* bien fouillée pour pouvoir orienter le travail de façon pertinente et disqualifier les techniques non souhaitées qui apparaissent.

(1) On trouvera le rapport complet à l'adresse suivante :
http://ec.europa.eu/research/science-society/index.cfm?fuseaction=public.topic&id=1100&lang=1

II. Un exemple d’activité d’études et de recherche en cinquième : la construction de triangles

II.1. Tout d’abord une question portant sur une détermination de distance inaccessible :

Pour justifier l’importance que l’on va accorder à l’étude des triangles, le professeur pose une question de détermination de distance inaccessible. Si les élèves peuvent comprendre la question posée, ils n’ont pas en revanche la possibilité de la résoudre, aussi est-ce le professeur, dans ce premier temps, qui montre une façon de faire. L’implantation du collège le permettant, le professeur explique aux élèves comment s’y prendre pour estimer la distance séparant le bureau de la salle de cours à l’arbre qui se trouve devant la maison située face à la salle sans sortir de la classe ! En visant sommairement et en faisant, à la craie, des tracés sur le sol puis en faisant des relevés – mesures d’une longueur et de deux angles – on va pouvoir construire un triangle 100 fois plus petit que le triangle réel ABC en prenant par exemple 1cm pour 1m.



Ainsi, les hommes, pour déterminer des distances, ont été amenés à tracer des triangles. Les géomètres topographes utilisent encore de nos jours des triangles. Ayant ainsi montré un usage – inattendu – des triangles, on peut alors poser la question qui va faire l’objet de l’étude dans un deuxième temps.

II.2. Comment déterminer un triangle pour pouvoir en construire un superposable à un triangle donné ?

Nous proposons aux élèves pour étudier cette question, la suite de tâches suivantes :

Q1 – Sur une feuille posée sur le bureau, j’ai dessiné un triangle dont les côtés mesurent 9,5 cm, 8 cm et 6,5 cm. Sans te déplacer, peux-tu trouver combien mesurent les angles de ce triangle ?

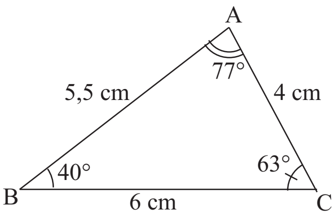
Cette question est traitée rapidement : les élèves comprennent le problème posé, tracent avec la règle et le compas le triangle demandé et sont convaincus de la superposabilité de toutes les figures de la classe. Ils effectuent les mesures des angles et ils peuvent vérifier leur construction grâce au calque du professeur.

Q2 – Sur une deuxième feuille posée sur le bureau, j'ai dessiné un triangle dont les angles mesurent 59°, 74° et 47°. Sans te déplacer, peux-tu trouver combien mesurent les côtés de ce triangle ?

Pour cette deuxième question, les élèves poursuivent le travail commencé à propos de la question 1 et construisent un triangle connaissant ses trois angles. Certains se rendent compte très rapidement qu'il n'y aura pas superposabilité des figures – la longueur du premier segment tracé étant indéterminée – d'autres poursuivent méticuleusement leurs tracés. En comparant les figures obtenues par deux voisins, il est facile de répondre que le triangle obtenu n'est pas unique et que, par conséquent, il n'est pas possible de donner les longueurs des côtés du triangle dessiné par le professeur.

Q3 – Est-ce que deux données suffisent pour déterminer un triangle ?
– Est-ce que trois données suffisent pour déterminer un triangle ?
– Est-ce que quatre données suffisent pour déterminer un triangle ?

Avant de donner ces questions, le professeur qui conduit l'étude, avait amené les élèves à remarquer qu'on peut effectuer six mesures dans un triangle et comme nous l'avons déjà dit que « déterminer un triangle » revient à caractériser le triangle de façon à obtenir, par construction, des triangles tous superposables. Le triangle de la question 1 étant « grand », un autre triangle est proposé par le professeur qui invite alors les élèves à choisir deux données afin de voir s'il est possible de construire un triangle superposable au triangle donné.



<u>Deux données :</u> les élèves essaient deux côtés, deux angles, un côté et un angle et dessinent plusieurs triangles. Certaines constructions posent des problèmes, notamment celle où l'on choisit la longueur BC et l'angle A. Néanmoins, la conclusion s'impose vite : deux données ne suffisent pas !
<u>Trois données :</u> dans une phase collective, les élèves sont invités à faire le recensement de tous les cas possibles : *trois côtés, trois angles, deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés, deux côtés et un angle « quelconque », un côté et les deux angles dont les sommets sont les extrémités du côté,* enfin *un côté et deux angles « quelconques ».* Les cas étant nombreux à étudier, le professeur organise le travail dans la classe pour que les élèves ne se lancent pas dans toutes les directions sans coordination.

Trois côtés : les élèves font référence à la première question, le triangle construit est le même pour tous : la donnée des longueurs des trois côtés détermine le triangle.

Trois angles : ici c'est la question 2 qui permet de répondre.

Deux côtés, un angle ou un côté deux angles :
Les cas *deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés* ou le cas *deux angles et le côté commun aux deux angles* ne présentent pas de difficultés et on retiendra que dans ces cas, le triangle est déterminé. Le cas *deux côtés et un angle non compris entre ces deux côtés* donne des résultats qui après discussion dans la classe ne sont pas retenus (il y a deux triangles dans un cas et un seul dans l'autre : voir fig a et fig b[2]). Enfin pour le cas *deux angles et un côté non compris* entre ces angles, certains élèves sont en difficulté tandis que d'autres utilisent leurs connaissances antérieures notamment la propriété des angles correspondants formés par des droites parallèles : après avoir tracé [BC], ils tracent la demi-droite [C*x*) telle que l'angle C mesure 63°, choisissent un point M sur [C*x*) et mesurent un angle M de 77°. Il ne reste plus qu'à tracer la parallèle à [M*y*) passant par B pour obtenir le triangle (voir fig c). Le professeur indique que ce cas ne sera pas retenu mais qu'un peu plus tard dans le chapitre on saura pourquoi.

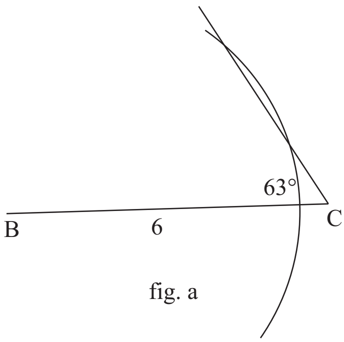


fig. a

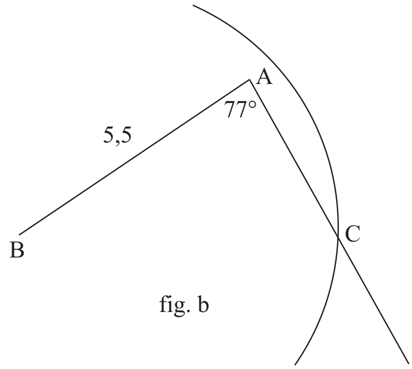


fig. b

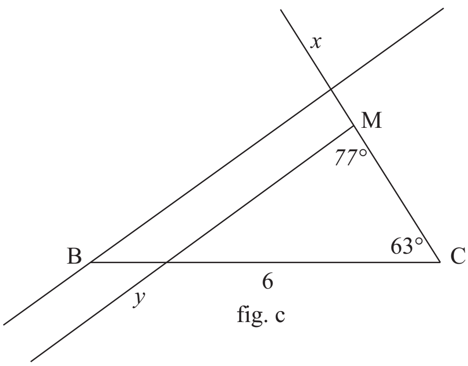


fig. c

<u>Quatre données :</u> le professeur procède comme pour trois données et recense les différents cas au tableau : trois côtés et un angle, trois angles et un côté, deux côtés et deux angles. Les élèves s'aperçoivent rapidement que l'on retrouve l'un des trois cas précédents dans lesquels le triangle est déterminé.

(2) Ceci fait apparaître un cas d'isométrie qui usuellement n'est pas retenu, c'est le cas où l'on connaît AB, BC, l'angle en A, avec de plus BC > AB.

II.3. L'inégalité triangulaire

Q4 – Étant donné trois nombres (qui représentent les mesures des longueurs de trois segments) peut-on toujours construire un triangle ?

Les élèves sont sollicités pour choisir un nombre décimal compris entre 0 et 12 et le professeur note (ce qui l'intéresse) au tableau afin de retenir trois triplets, par exemple,
a) 2,6 ; 3 ; 9 b) 7,2 ; 10 ; 6 c) 8 ; 11 ; 3
Comme cela a déjà été décrit(3), les élèves ne sont pas d'accord sur le cas c) même lorsque les nombres choisis sont des entiers, certains obtenant un triangle très aplati. Une visualisation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique permet de convaincre assez facilement l'ensemble de la classe.

II.4. La somme des angles du triangle

Les élèves doivent tracer un triangle quelconque, en mesurer les angles puis faire la somme des mesures obtenues. La comparaison des résultats montre que les sommes obtenues sont proches de 180°.

Q5 – Est-il possible de tracer un triangle dont la somme des angles est très différente de 180 ? Si oui, faire la construction ; si non expliquer pourquoi.

Quelques élèves, peu nombreux, sont persuadés que la somme est 180° et ils tentent d'expliquer qu'il en est ainsi car lorsqu'un angle augmente, les autres diminuent (ils miment avec leurs mains le triangle « en train de s'aplatir » !). Les autres élèves essaient d'obtenir une somme supérieure à 180° en faisant un triangle le plus grand possible sur une feuille A3, ou en partant d'un angle « franchement » obtus, ou encore en partant d'un triangle ABC ayant un angle $\widehat{A}$ de 90° et un angle $\widehat{B}$ de 89° qui se révèle difficile à construire. Un logiciel de géométrie dynamique permet de se rendre compte que pour de très nombreux triangles la somme des angles reste de 180°.

Q6 – Connaissez-vous un triangle pour lequel vous êtes sûrs mathématiquement que la somme des angles est égale à 180 ?

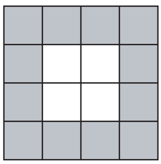
Les élèves proposent le triangle équilatéral, mais hélas leur raisonnement est faux : ils annoncent que chaque angle d'un triangle équilatéral mesure 60° et à la question pourquoi ? ils répondent 180 / 3 = 60 ! Ceux qui proposent le triangle rectangle isocèle font la même erreur de raisonnement. Dans une classe deux élèves proposent le triangle aplati rencontré lors du travail sur l'inégalité triangulaire.
Il reste maintenant à prouver le résultat, il est difficile pour les élèves d'ajouter un élément sur la figure (une droite passant par l'un des sommets et parallèle au côté opposé) même s'ils peuvent dire que 180° c'est un angle plat. En revanche lorsque cette droite est tracée, ils reconnaissent des angles alternes-internes et la démonstration est bien comprise.

(3) Arsac Gilbert (1997/98) : Les limites d'un enseignement déductif de la géométrie. *Petit x*, nº 47.

III. Un deuxième exemple : « les carrés bordés »[4] en cinquième

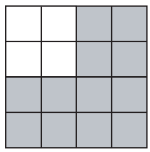
L'activité proposée est analogue à l'exemple décrit dans les documents d'accompagnement des programmes.
Ce sont surtout les raisons d'être de l'Algèbre qui nous ont guidées : l'enjeu est de faire comprendre aux élèves les raisons pour lesquelles on s'intéresse aux transformations d'écritures algébriques comme, par exemple, l'usage de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. La situation proposée doit conduire les élèves à comparer des programmes de calculs en travaillant uniquement l'expression littérale de ceux-ci. Il convenait donc que les élèves ne puissent pas se référer à la situation modélisée pour faire la comparaison. C'est ce qui nous a conduit à proposer non pas un mais deux problèmes ainsi qu'une équation à résoudre sans utiliser les règles de transposition. Il s'agit de faire percevoir aux élèves que certaines formes d'écriture de programme de calcul sont plus opérantes que d'autres, une façon de plus de justifier l'étude des transformations algébriques.

Sujet 1



On considère un carré recouvert de carreaux blancs avec tout autour une rangée de carreaux grisés. Le nombre de carreaux blancs sur le côté du carré central est variable.
1- a) Combien y a-t-il de carreaux grisés sur la figure ci-dessus ?
b) Combien y aurait-il de carreaux grisés si le nombre de carreaux sur un côté du carré central était de 8 ? de 35 ?
2 - Écris le programme de calcul que tu as utilisé pour trouver le nombre de carreaux grisés de n'importe quelle figure analogue à celle de la première question.

Sujet 2



On considère un carré recouvert de carreaux blancs auquel on a ajouté deux rangées de carreaux grisés sur deux de ses côtés adjacents. Le nombre de carreaux blancs sur le côté du carré est variable.
1- a) Combien y a-t-il de carreaux grisés sur la figure ci-dessus ?
b) Combien y aurait-il de carreaux grisés si le nombre de carreaux sur un côté du carré non colorié était de 7 ? de 41 ?
2 - Écris le programme de calcul que tu as utilisé pour trouver le nombre de carreaux grisés de n'importe quelle figure analogue à celle de la première question.

Première étape :

Les élèves travaillent en binômes et après avoir répété la consigne en l'explicitant, des programmes attendus sont produits :

$(c + 2)\ (c + 2) - c \times c$

$(c + 1) \times 4$

$c \times 4 + 4$

$c \times 2 + (c + 2) \times 2$

$(c \times 2) + (c \times 2) + 4$

(4) Voir INRP « Les débuts de l'algèbre au collège » ainsi que les documents d'accompagnements des programmes du collège.

Deuxième étape : comparaison de programmes de calculs

Cette étape se déroule en classe entière ; elle est complètement dirigée par le professeur : il s'agit ici d'amener les élèves à se poser la question de l'équivalence des programmes de calcul sans faire référence à la situation travaillée précédemment. Le fait d'avoir posé deux problèmes permet d'associer un programme à chacune des deux situations.

Les deux programmes écrits au tableau sont : $x \times 4 + 4$ et $(c \times 2) + (c + 2) \times 2$; le professeur utilise un tableur dans lequel les deux formules sont déjà entrées, il montre simplement ces formules aux élèves qui acceptent que ce sont les mêmes programmes de calcul que les deux écrits au tableau. Ils ont ensuite la surprise de découvrir que pour les valeurs choisies dans la colonne A, les deux formules retournent toujours la même valeur. À la question pourquoi ? Une élève, Agathe, répond

« D'abord, on note x à la place de c et dans le premier il y a quatre fois x et dans le deuxième il y a deux fois x et encore deux fois x (en mimant la distributivité sur la deuxième partie de l'expression) et puis il y a quatre dans le premier et il y a également quatre dans le deuxième car deux fois deux ça fait quatre. » Ceci permet ensuite de justifier que l'on s'intéresse à la distributivité comme un moyen de transformation d'expressions algébriques de programmes de calculs.

Troisième étape : choix d'un programme de calcul pour résoudre une équation

a) En utilisant un des programmes de calcul trouvés dans la classe, retrouver le nombre de carreaux sur le côté du carré blanc sachant que le nombre de carrés grisés est 228.
b) Même question si le nombre de carrés grisés est 139.

Les différents programmes trouvés en classe ont été écrits au tableau :

$(c + 2)\,(c + 2) - c \times c$

$(c + 1) \times 4$

$c \times 4 + 4$

$c \times 2 + (c + 2) \times 2$

$(c \times 2) + (c \times 2) + 4$

Les élèves ne savent pas résoudre les équations mais certains programmes de calcul peuvent être facilement « inversés » tandis que d'autres non. Ce travail devait conforter les élèves dans l'idée qu'il était intéressant de transformer les programmes de calcul en programmes équivalents selon les problèmes à résoudre. Mais ceci n'est que l'entrée dans un long parcours d'étude !

IV. Troisième exemple : « introduire le produit scalaire en Première S »[5]

Comment introduire le produit scalaire de façon motivée, de telle sorte qu'il apparaisse comme réponse à une question ? On peut trouver réponse à cette question en examinant ce à quoi sert le produit scalaire en Première S : il est utile pour

(5) Les programmes auxquels nous nous référons sont ceux de 1999 pour la classe de troisième, de 2000 pour la classe de seconde et de 2001 pour la classe de première S.

démontrer que deux droites ou deux directions sont orthogonales, pour déterminer un angle géométrique (par calcul de son cosinus), et enfin pour établir le théorème d'Al-Kashi. Or les élèves savent depuis la seconde démontrer analytiquement que deux droites sont parallèles : D *et* D′ *deux droites de vecteurs directeurs respectifs* $\vec{u}(x, y)$ *et* $\vec{v}(x', y')$ *sont parallèles si et seulement si* $xy' - x'y = 0$. On peut dès lors se demander si l'on peut faire la même chose avec des droites perpendiculaires : c'est ce qui va initier l'introduction du produit scalaire.

IV.1. Un premier moment de l'étude : une première question.

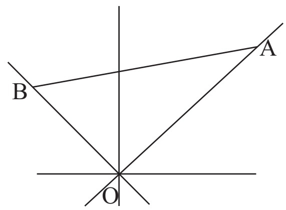
Q1. Peut-on par le calcul montrer que deux droites sont perpendiculaires ?

Cette question est posée aux élèves en classe, répartis en petits groupes.
Ils se sont tous placés spontanément dans un repère orthonormal. On a pu noter trois façons d'aborder le problème :
• Certains examinent des cas particuliers qu'ils connaissent bien : le cas des axes et celui des bissectrices.
• D'autres pensent à utiliser la formule $aa' = -1$. Bien que ne figurant plus au programme de seconde, cette formule était néanmoins connue de certains élèves, ce qui nous a quelque peu surpris.
• D'emblée certains abordent le cas général.
Comme nous l'avons dit en évoquant les principes qui nous guident, le professeur est un directeur d'étude et il convient en conséquence qu'il guide l'étude des élèves par un jeu de questions, sans pour autant leur donner la solution ni briser la dynamique de l'étude. Par exemple, on a pu demander aux élèves de revenir sur la condition de parallélisme et de s'interroger sur la signification des éléments qui la composent : x, x', y, y', est-ce que cela correspond à des coordonnées de points, de vecteurs ?
Les élèves ayant choisi de travailler sur des cas particuliers, choisissent les points A(1,1) et B(−1,1) sur les bissectrices du repère et par analogie avec la condition de parallélisme trouvent que : « $1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$ ». Comme ils ne savent plus que faire, l'enseignant les engage à examiner ce qui se passerait si on translatait les deux bissectrices, et aussi si l'on prenait d'autres points sur les deux bissectrices ! Le travail engagé à partir de ces questions conduit les élèves à percevoir qu'il faut utiliser des coordonnées de vecteurs et non de points. De même pour ceux travaillant à partir de la relation $aa' = -1$, le professeur les invite à revenir sur la signification des coefficients a et a' et à faire le lien avec la condition de parallélisme.
Tout ce travail fait que chacun des groupes en arrive à voir que la clé est le théorème de Pythagore et un premier bilan peut conclure ce premier moment d'étude. Notons que les élèves ont été invités aussi à se demander ce qui passait avec un repère non orthonormé et qu'ils ont remarqué que le résultat obtenu n'était valide que si le repère l'était.

Bilan :

1º) A(x,y) et B(x',y'). D ⊥ D′ ⇔ OAB triangle rectangle en O ⇔ $AB^2 = OA^2 + OB^2$ ⇔ $xx' + yy' = 0$.

2º) Soit $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère orthonormé. $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ orthogonaux équivaut à $xx' + yy' = 0$.



IV.2. Deuxième moment de l'étude : une deuxième question.

Ce deuxième temps, comme les suivants, se passe en classe entière et se fait sous forme de cours dialogué.
On a prouvé précédemment, avec les notations utilisées, que :
D ⊥ D′ ⇔ $xx' + yy' = 0$ ⇔ $AB^2 = OA^2 + OB^2$.

Q2 : Que vaut $xx' + yy'$ si D et D′ ne sont pas perpendiculaires ? Est-ce que cela pourrait avoir une signification géométrique ?
Un retour sur le calcul ayant conduit précédemment à faire apparaître $xx' + yy' = 0$ conduit alors à remarquer que : $AB^2 - OA^2 - OB^2 = -2xx' - 2yy'$.

Et donc que : $xx' + yy' = \frac{1}{2}\left(OA^2 + OB^2 - AB^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{v} - \vec{u}\right\|^2\right)$.

Avec ce résultat, ce qui apparaît, et c'est un essentiel ici, c'est que la quantité $xx' + yy'$ ne dépend pas du repère orthonormé choisi ! C'est un invariant géométrique.
Et en bilan de ce deuxième moment, on peut écrire :

« Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées (x,y) et (x',y') dans un repère R orthonormé et de coordonnées (X,Y) et (X′,Y′) dans un repère R′ orthonormé. Alors :

$$xx' + yy' = XX' + YY'.$$

C'est un invariant géométrique que nous appelerons produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et que nous notons $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ».

IV.3. Troisième moment de l'étude : une troisième question.

Toujours en classe entière et sous forme de cours dialogué.

Q3. $\mathbf{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2}}$ **ou** $\mathbf{\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right) = 0.}$

« Qu'en est-il si $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \neq 0$? Peut-on dire quelque chose de $\cos\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right)$ » ?

Pour répondre à cette question la piste est ici de chercher à utiliser un repère orthonormé particulier, ce que l'on peut faire puisque le produit scalaire est un invariant ne dépendant pas du repère orthonormé choisi.

Divers choix sont possibles. Parmi ceux-ci, on peut choisir $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ de telle sorte que $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{i}$ soient colinéaires et de même sens.

En posant $\theta = \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$ on a alors $\overrightarrow{OB} = OB\left(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right)$ et un calcul donne :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \cos\theta.$$

À ce stade, on peut faire un bilan intermédiaire sur les usages à venir du produit scalaire.

À quoi peut servir le produit scalaire ?
Le produit scalaire peut servir :

- *Pour démontrer par le calcul, un repère orthonormé étant choisi, une orthogonalité.*
- *Pour déterminer un angle géométrique, avec le calcul de son cosinus, dès lors que l'on sait calculer le produit scalaire dans un repère.*

Ce premier bilan sur l'utilité du produit scalaire étant fait, on peut se demander s'il pourrait être d'un autre usage ?

IV.4. Quatrième moment : une quatrième question.

Q4. Le produit scalaire peut-il être d'une autre utilité ?

Pour diriger l'étude de cette question, on peut faire remarquer que lorsque $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = OA^2$, le carré d'une longueur ! Si on sait calculer le carré d'une longueur, alors on saura calculer cette longueur.
On peut donc légitimement se demander si le produit scalaire pourrait servir à calculer une longueur. Cette question nous dirige vers Al-Kashi.

Q4 Bis. Soit OAB, un triangle et supposons que l'on connaisse OA, OB et l'angle en O. Peut-on calculer AB ?

Si l'angle est droit, on reconnaît Pythagore. Il s'agit de généraliser celui-ci au cas où l'angle en O n'est pas droit. [On connaît deux côtés d'un triangle et l'angle compris entre ces deux côtés, c'est un cas d'isométrie. La longueur du troisième côté, AB, est alors déterminée, il est légitime de se demander si on peut la calculer].

On a : $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$.
Peut-on aller plus loin ? Il nous faut introduire le point O et on peut penser à poser, vectoriellement, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$.

Le produit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$. devient alors : $\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right)$.

Encore une fois, peut-on aller plus loin ? Peut-être, si d'aventure le produit scalaire était distributif par rapport à la somme vectorielle. Qu'en est-il ? On peut se placer dans un repère orthonormé quelconque et par le calcul, montrer qu'il en est bien ainsi et de plus on peut montrer aussi qu'il est commutatif. Au final, on obtient :

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= OA^2 + OB^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos\widehat{AOB}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien le théorème d'Al Kashi.

IV.5. Bilan

On a ainsi la totalité du cours sur le produit scalaire, motivé par un jeu de questions qui s'enchaînent. De plus, cela permet de pointer aux yeux des élèves les usages à venir dans les exercices du produit scalaire.

V. Conclusion.

Ces quelques exemples illustrent la façon dont nous essayons de concevoir un enseignement dynamique. D'ordinaire, on rencontre, même si celle-ci est précédée d'activités, plutôt une présentation des objets mathématiques, fondée sur définition, étude de propriétés, puis problèmes en montrant des applications. Nous inversons quelque peu le processus : nous partons de questions problématiques et les objets mathématiques, leurs propriétés, apparaissent comme des éléments constitutifs des réponses aux questions posées. Une question en appelle d'autres et c'est ainsi que se constitue une dynamique d'étude sous la direction du professeur.
On peut trouver d'autres exemples de ce type de travail, développé par les équipes Ampères engagées dans cette recherche avec l'INRP sur le site Educmath à l'adresse : http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/cdamperes/
Notons également qu'on peut y trouver quelques références à des démarches analogues menées en Belgique, en Espagne et en Italie.

Bibliographie

Arsac G. (1997/98) : Les limites d'un enseignement déductif de la géométrie, *Petit x* n° 47.

Chevallard Y. (2007) : Pour une révolution épistémologique et didactique, *Bulletin APMEP* n° 471.

Combier G., Guillaume J.-C., Pressiat A. (1996) : *Les débuts de l'algèbre au collège*, INRP.

Maulini O. (2005) : *Questionner pour enseigner & apprendre*, ESF éditeur.

Mottot F. (2008) : Les élèves des pays riches snobent la science, *Bulletin APMEP* n° 476.

Ministère de l'E.N. (2008) : *Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, 3e du collège, Du numérique au littéral*, Éd. Eduscol éducation.

Noirfalise R. (Éd) (2009) : *Groupe d'étude INRP/ADIREM : Ampères. Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire*, Éd IREM de Clermont-Ferrand.