Problèmes d'antan 6 (Première partie)

En feuilletant les anciens bulletins de notre association, on trouve des sujets d'exercices et de problèmes. Nous publierons dans chaque Bulletin Vert des exemples de ces exercices d'antan.

Envoyez vos propositions de solutions à frechetm.apmep@wanadoo.fr. Les meilleurs seront publiées.

Le problème « antan 6 » étant suffisamment riche, et comme aucune réponse ne m'est parvenue, je ne donnerai que ma solution pour la première question. Nous attendons vos solutions pour les deux autres questions.

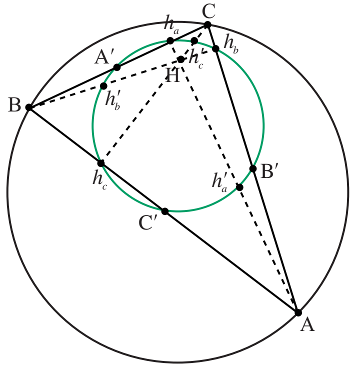
Agrégation des sciences mathématiques des jeunes filles :
Arithmétique, Algèbre et Géométrie (*4 heures*) — On considère quatre points A, B C et D d'une circonférence de centre O.

1. Comparer au quadrilatère ABCD le quadrilatère dont les sommets sont les points de rencontre des hauteurs des triangles BCD, CDA, DAB et ABC.
2. Démontrer que les projections orthogonales du point A sur les côtés du triangle BCD sont sur une droite (a), et que cette droite (a) est parallèle à la droite joignant B au second point où la perpendiculaire menée de A à CD coupe la circonférence O.
   Démontrer en outre que la droite (a) et les droites analogues (b), (c) et (d) passant par les projections de B, C et D sur les côtés des triangles CDA, DAB et ABC sont concourantes. — Comparer le faisceau (a), (b), (c) et (d) au faisceau OA, OB, OC et OD.
3. Étudier la figure formée par les centres des seize circonférences tangentes aux côtés de chacun des triangles BCD, CDA, DAB, ABC.

Solution de la première question

Pour résoudre cette question, il est utile de faire quelques rappels sur le cercle des 9 points (ou cercle d'Euler) dans un triangle.

Propriétés et Définition :



– L'orthocentre H, le centre de gravité G et le centre du cercle circonscrit O d'un triangle ABC sont alignés sur la « **droite d'Euler** » ;

de plus, on a la relation : $\overrightarrow{OH} = 3 \cdot \overrightarrow{OG}$.

– Les pieds des trois hauteurs d'un triangle ABC d'orthocentre H, les milieux des trois côtés et les milieux des segments [HA], [HB] et [HC] sont cocycliques. Le cercle ainsi obtenu s'appelle « **cercle des 9 points** ».

– L'homothétie de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$ transforme le cercle des neuf points en le cercle circonscrit au triangle ABC.

Solution

Soit le triangle ABC, H_D son orthocentre. Tout point du cercle passant par A, B, C et D a un unique antécédent sur le cercle des 9 points de ABC dans l'homothétie de centre H_D et de rapport $\frac{1}{2}$. On appelle F cet antécédent pour le point D.

Ainsi, F est le milieu de $[H_D D]$

Soit H_C l'orthocentre du triangle ABD.

Soient G_D et G_C les centres de gravité de ABC et de ABD respectivement.

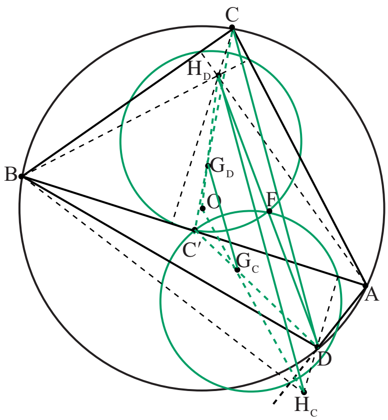
D'après le rappel, nous avons :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OH_D} = 3\cdot\overrightarrow{OG_D} \\ \overrightarrow{OH_C} = 3\cdot\overrightarrow{OG_C} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{H_D H_C} = 3\cdot\overrightarrow{G_D G_C}.$$

D'autre part, nous connaissons la position du centre de gravité sur chacune des médianes du triangle : si C′ est le milieu de [AB],

$$\begin{cases} \overrightarrow{C'C} = 3\cdot\overrightarrow{C'G_D} \\ \overrightarrow{C'D} = 3\cdot\overrightarrow{C'G_C} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = 3\cdot\overrightarrow{G_D G_C}.$$

Ainsi, le quadrilatère $H_D CDH_C$ est un parallélogramme ; ses diagonales $[H_D D]$ et $[H_C C]$ se coupent en leur milieu qui est le milieu de $[H_D D]$: F.



Conclusion : Dans la symétrie de centre F, D donne H_D, C donne H_C. On démontre de la même façon que A donne H_A et B donne H_B. Ainsi,

Le quadrilatère ABCD et le quadrilatère dont les sommets sont les points de rencontre des hauteurs des triangles BCD, CDA, DAB et ABC sont isométriques.

De plus, le point F se trouve à l'intersection des quatre « cercles des 9 points ». On laissera au lecteur le soin de le prouver.