Exercices de-ci, de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigué. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par Mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Jean Fromentin, 17 rue de la Roussille, 79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique en joignant, si vous le pouvez, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 484-1 (Georges Lion – Wallis)

A, B et C sont trois points non alignés tels que AB = AC. I est le milieu de [BC] et $\mathcal{C}$ le cercle de centre I tangent à (AB) et (AC).

M ∈ [AB] et N ∈ [AB] sont tels que (MN) est tangente à $\mathcal{C}$.

Démontrer la relation : $\mathrm{BM} \times \mathrm{CN} = \dfrac{\mathrm{BC}^2}{4}$.

Exercice 484-2 (Daniel Reisz – Auxerre)

D'après un exercice proposé à l'olympiade suisse de 2005

Tailler un polygone convexe c'est lui couper un coin, un sommet. De façon plus précise et plus mathématique, tailler un polygone convexe de n cotés consiste à choisir deux cotés consécutifs AB et BC et à les remplacer par les cotés AM, MN et NC où M et N sont deux points pris respectivement sur les cotés ouverts]AB[et]BC[. On obtient ainsi un polygone convexe de $(n + 1)$ cotés d'aire plus petite que celle du polygone initial.

Soit P(6) un hexagone régulier d'aire 1. On le taille arbitrairement et on obtient ainsi successivement des polygones convexes P(7), P(8), P(9), … Montrer que l'aire de P(n) restera toujours supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 484-3 (Question du concours australien de mathématiques 2008)

transmis par Georges Lion

Les entiers positifs x et y vérifient $3x^2 + 8y^2 + 3x^2y^2 = 2008$. Quelle est la valeur de xy ?

Exercice 484-4 (Question du concours australien de mathématiques 2008)

transmis par Georges Lion

Quelle est la plus petite valeur que peut prendre

$$\sqrt{49 + a^2 - 7a\sqrt{2}} + \sqrt{a^2 + b^2 - ab\sqrt{2}} + \sqrt{50 + b^2 - 10b}$$

pour a et b nombres réels positifs ?

Solutions

Exercice 478-1

Soit un point O, une droite (D) ne contenant pas O, H le projeté orthogonal de O sur (D). Soit une suite de points de (D), à droite de H : A_0, A_1, … tels que les cercles inscrits dans les triangles OA_iA_{i+1} ont tous le même rayon r. Il s'agit de prouver que les cercles inscrits dans les triangles OA_iA_{i+n} ont le même rayon r_n.

Nous avons donné une solution dans le Bulletin nº 481. Une solution plus simple et qui permet d'obtenir une expression du n-ème rayon en fonction du rayon initial, nous a depuis été transmise par Claude Morin. Voici cette solution.

Je prends comme unité OH = 1 et je pose $HA_i = x_i$.
L'aire du triangle OA_0A_1 vaut

$$\frac{x_1 - x_0}{2} = \frac{r}{2}\left(OA_0 + OA_1 + x_1 - x_0\right),$$

d'où

$$\frac{r}{1-r} = \frac{x_1 - x_0}{\sqrt{1+x_1^2} + \sqrt{1+x_0^2}}.$$

Il est alors intéressant de poser $x_i = \sinh(t_i)$. On en déduit :

$$\frac{r}{1-r} = \frac{\sinh(t_1) - \sinh(t_0)}{\cosh(t_1) + \cosh(t_0)} = \tanh\frac{t_1 - t_0}{2}.$$

D'où

$$t_1 - t_0 = 2\,\mathrm{argth}\frac{r}{1-r}.$$

Par hypothèse on a pour tout i :

$$t_{i+1} - t_i = 2\,\mathrm{argth}\frac{r}{1-r}.$$

Par suite, pour tout n :

$$t_{i+n} - t_i = 2n \operatorname{argth} \frac{r}{1-r}.$$

Cela démontre que les cercles inscrits dans les triangles OA_iA_{i+n} ont le même rayon r_n donné par :

$$2 \operatorname{argth} \frac{r_n}{1-r_n} = 2n \operatorname{argth} \frac{r}{1-r}.$$

On montre ensuite :

$$\frac{r_{n+1}}{1-r_{n+1}} = \tanh\left((n+1)\operatorname{argth} \frac{r}{1-r}\right) = \frac{\dfrac{r_n}{1-r_n} + \dfrac{r}{1-r}}{1+\dfrac{r_n}{1-r_n}\dfrac{r}{1-r}},$$

d'où l'on déduit $r_{n+1} = (1-r)r_n + r(1-r_n)$ qui entraine la formule remarquable :

$$1-2r_n = (1-2r)^n.$$

Claude Morin indique ne pas avoir trouvé d'interprétation géométrique de cette formule.

Exercice 480-1 (Daniel Reisz-Auxerre)

Que peut-on dire de la suite de réels (u_n) vérifiant $u_1 = 1$ et, pour tout m et n, $u_n - u_m \leq \dfrac{2mn}{m^2+n^2}$?

Solution de Raymond Raynaud (Digne)

Dans ce qui suit, m et n représentent des entiers strictement positifs.
Soit m fixé.

Pour tout n, $u_n - u_m \leq \dfrac{2mn}{m^2+n^2}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2mn}{m^2+n^2} = 0$.
La suite est donc convergente et sa limite est u_m.
Voilà une suite convergente dont chacun des termes est égal à la limite.
C'est une suite constante, dont chaque terme est égal à u_1, c'est-à-dire à 1.

Autres solutions : Bernard Collignon (Coursan), Daniel Reisz (Auxerre).

Nota. On peut observer que le deuxième membre de l'énoncé pourrait être remplacé par n'importe quelle quantité tendant vers 0 quand n tend vers l'infini.

Exercice 480-2 (Daniel Reisz-Auxerre)

Soit les deux fonctions $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $g(x) = cx^2 + bx + a$, avec $|f(0)| \leq 1$, $|f(-1)| \leq 1$ et $|f(1)| \leq 1$.

Montrer que pour tout x vérifiant $|x| \leq 1$ on a $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$ et $|g(x)| \leq 2$.

Solution de Bernard Collignon (Coursan)

Les coefficients a, b et c vérifient le système $\begin{cases} c = f(0) \\ a+b+c = f(1) \\ a-b+c = f(-1) \end{cases}$ d'où

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}\left[f(-1)+f(1)-2f(0)\right] \\ b = \frac{1}{2}\left[f(1)-f(-1)\right] \\ c = f(0) \end{cases}.$$

On a donc pour tout x :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f(-1)+f(1)-2f(0)\right]x^2 + \frac{1}{2}\left[f(1)-f(-1)\right]x + f(0)$$

et

$$g(x) = f(0)x^2 + \frac{1}{2}\left[f(1)-f(-1)\right]x + \frac{1}{2}\left[f(-1)+f(1)-2f(0)\right],$$

ce qui s'écrit encore :

$$f(x) = \frac{f(-1)}{2}\left(x^2-x\right) + f(0)\left(1-x^2\right) + \frac{f(1)}{2}\left(x^2+x\right)$$

et

$$g(x) = \frac{f(-1)}{2}(1-x) + f(0)\left(x^2-1\right) + \frac{f(1)}{2}(1+x).$$

Première inégalité : démontrons que pour tout x vérifiant $|x| \leq 1$ on a $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$.

Pour tout x,

$$|f(x)| \leq \left|\frac{f(-1)}{2}\right|\left|x^2-x\right| + |f(0)|\left|1-x^2\right| + \left|\frac{f(1)}{2}\right|\left|x^2+x\right|.$$

Donc d'après les hypothèses :

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}\left|x^2-x\right| + \left|1-x^2\right| + \frac{1}{2}\left|x^2+x\right|.$$

Premier cas : $-1 \leq x \leq 0$. Alors $x^2 - x \geq 0$, $x^2 + x \leq 0$ et $1 - x^2 \geq 0$ d'où :

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}\left(x^2-x\right) + \left(1-x^2\right) - \frac{1}{2}\left(x^2+x\right),$$

$$|f(x)| \le 1 - x - x^2 \Leftrightarrow |f(x)| \le \frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2,$$

donc $|f(x)| \le \frac{5}{4}$.

Deuxième cas : $0 \le x \le 1$. Alors $x^2 - x \le 0$, $x^2 + x \ge 0$ et $1 - x^2 \ge 0$ d'où :

$$|f(x)| \le -\frac{1}{2}\left(x^2 - x\right) + \left(1 - x^2\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + x\right),$$

$$|f(x)| \le 1 + x - x^2 \Leftrightarrow |f(x)| \le \frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

donc $|f(x)| \le \frac{5}{4}$.

Remarque. $\frac{5}{4}$ est effectivement atteint pour $a = -1$, $b = c = 1$ soit $f(x) = -x^2 + x + 1$ avec $x = \frac{1}{2}$.

Et $-\frac{5}{4}$ est effectivement atteint pour $a = 1$, $b = c = -1$ soit $f(x) = x^2 - x - 1$ avec $x = \frac{1}{2}$

Et de manière symétrique, $-\frac{5}{4}$ est atteint pour $x = -\frac{1}{2}$ avec la fonction $f(x) = x^2 + x - 1$ et $\frac{5}{4}$ est atteint pour $x = -\frac{1}{2}$ avec la fonction $f(x) = -x^2 - x + 1$.

Deuxième inégalité : démontrons que pour tout x vérifiant $|x| \le 1$ on a $|g(x)| \le 2$.
Pour tout x,

$$|g(x)| \le \left|\frac{f(-1)}{2}\right| |1 - x| + |f(0)| \left|x^2 - 1\right| + \left|\frac{f(1)}{2}\right| |1 + x|.$$

Donc d'après les hypothèses :

$$|g(x)| \le \frac{1}{2}|1 - x| + \left|x^2 - 1\right| + \frac{1}{2}|1 + x|.$$

Pour tout x vérifiant $-1 \le x \le 1$, on a $1 - x \ge 0$, $1 + x \ge 0$ et $1 - x^2 \ge 0$, d'où :

$$|g(x)| \le \frac{1}{2}(1 - x) + \left(1 - x^2\right) + \frac{1}{2}(1 + x),$$

$$|g(x)| \le 2 - x^2$$

donc $|g(x)| \le 2$.

Remarque : 2 est effectivement atteint par exemple pour $x = 0$ avec $g(x) = -x^2 + 2$, et dans ce cas $f(x) = 2x^2 - 1$.

Autre solution : Daniel Reisz (Auxerre).

Nota. Les données de $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$ permettent de définir les coefficients a, b et c du trinôme $ax^2 + bx + c$. On peut alors obtenir les tracés de f et g, sur Géogébra par exemple, et vérifier – voire conjecturer – la demande de l'exercice, en fonction des valeurs attribuées à $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$.
Ces fichiers Géogébra sont disponibles sur le site national de l'APMEP, rubrique Publications » Le Bulletin Vert » Les sommaires » Sommaire du Bulletin nº 484.

Exercice 480-3 (Daniel Reisz-Auxerre)

Quel élève n'a pas eu au moins une fois dans sa vie mathématique la tentation d'écrire $(fg)' = f'g'$?
Y a-t-il des fonctions pour lesquelles cette règle est vraie ? Que peut-on en dire ?

Solution de Louis-Marie Bonneval (Poitiers)

La règle est vérifiée pour des fonctions f et g constantes. On écarte ce cas pour la suite.
On peut également remarquer que si le couple (f, g) est solution, alors le couple $(\alpha f,\ \beta g)$ où α et β sont des constantes, est aussi solution.

L'équation $(fg)' = f'g'$ s'écrit $f'g + fg' = f'g'$ c'est-à-dire $\dfrac{g}{g'} + \dfrac{f}{f'} = 1$.

On en tire $\dfrac{g'}{g} = \dfrac{f'}{f' - f}$, d'où $\ln|g| = \displaystyle\int \dfrac{f'}{f' - f}$ et donc

$$\boxed{g = k\exp\left(\int \frac{f'}{f' - f}\right)}$$

(k constante).
On peut donc choisir une fonction f de classe C_1 : g sera alors définie, sur tout intervalle où $f'(x) \neq f(x)$, par la formule ci-dessus.

Exemples :

1) $f(x) = e^{ax}$ et $g(x) = e^{bx}$, avec $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$.

2) $f(x) = x^n$ (n naturel non nul), et $g(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{-n}$ sur $]-\infty, n[$ ou sur $]n, +\infty[$.

3) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2x}}$, sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.

Autre solution : Raymond Raynaud (Digne), Daniel Reisz (Auxerre).