Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

MaxHOCHART
65, rue Blatin
63 000 CLERMONT-FERRAND
ou par courriel à
hochartmax@yahoo.fr

Enoncés des nouveaux problèmes

Problème 484-1 (question de Michel LAFOND)

Résoudre dans $\mathbb{Z}^*$ l'équation $a^2 + b^3 = c^4$.

Problème 484-2

Soit G un groupe. Un élément $g \in$ G est dit mou si pour toute partie A $\subset$ G génératrice de G, A – $\{g\}$ reste génératrice. Montrer que l'ensemble des éléments mous est un sous-groupe de G. Trouver les éléments mous des groupes $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$, puis $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Problème 484-3 (extrait du Concours Général 2008-2009)

On considère des entiers a, b, n supérieurs ou égaux à 2 et une suite finie à n termes $\mathrm{U} = (u_1, \ldots, u_n)$.

1. On suppose que a et b ont un pgcd égal à d. Montrer que si a et b sont des périodes de U et si $n \geq a + b - d$ alors U admet d pour période.
2. On suppose a et b premiers entre eux. Montrer que l'on peut partager l'intervalle d'entiers $[[1, a + b - 2]]$ en deux sous-ensembles non vides A et B de manière que la suite V égale à 1 sur A et 0 sur B soit de périodes a et b. Le partage obtenu est-il unique? Montrer que pour tout x de A, $a + b - 1 - x$ est dans A. Quelle propriété de la suite V traduit-on ainsi?

Problème 484-4 (extrait du Concours Général 2008-2009)

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ solutions de l'équation fonctionnelle

$$f(2x) = 2f(x)^2 - 1.$$

telles que $\dfrac{1 - f(x)}{x^2}$ admette une limite quand x tend vers 0 et vérifiant $f(0) = 1$.

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 479-1

Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus, et soit H son orthocentre. Le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de [BC] coupe la droite (BC) en A_1 et A_2. De même, le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de [AC] coupe la droite (AC) en B_1 et B_2 et le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de [AB] coupe la droite (AB) en C_1 et C_2. Montrer que A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont cocycliques.

Solution de Jean-Claude Carréga (Lyon). On note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et A′, B′, C′ les milieux des côtés [BC], [CA] et [AB]. Le point A′ est aussi le milieu de $[A_1A_2]$ donc $OA_1 = OA_2$. De même, $OB_1 = OB_2$ et $OC_1 = OC_2$. Pour montrer que les points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont situés sur un même cercle de centre O, il suffit d'établir $OA_1 = OB_1 = OC_1$. Par symétrie des rôles joués par A_1, B_1, C_1, montrer que $OA_1 = OB_1$ suffit. Dans le triangle rectangle $OA'A_1$, on a

$$OA_1^2 = OA'^2 + A'A_1^2 = OA'^2 + A'H^2.$$

De même, dans le triangle rectangle $OB'B_1$, on a

$$OB_1^2 = OB'^2 + B'H^2.$$

L'égalité $OA_1 = OB_1$ équivaut donc à

$$OA'^2 - OB'^2 = HB'^2 - HA'^2.$$

On note U la projection orthogonale de O sur la droite (A′B′) et I le milieu du segment [A′B′]. On a alors

$$OA'^2 - OB'^2 = 2\overline{A'B'} \times \overline{IU}.$$

De même, en notant V la projection orthogonale de H sur (A’-B’),

$$HB'^2 - HA'^2 = 2\overline{B'A'} \times \overline{IV}.$$

Finalement, $OA_1 = OB_1$ équivaut à

$$\overline{A'B'} \times \overline{IU} = \overline{B'A'} \times \overline{IV},$$

soit encore à

$$\overline{IU} = -\overline{IV}.$$

Il s'agit maintenant de montrer que I est le milieu du segment [UV]. On note H_1 le pied de la hauteur du triangle ABC issue de C. Puisque (A′B′) est parallèle à (AB), cette hauteur coupe le segment [A′B′] en V et l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$ transforme A en B′ et H_1 en V. Il en résulte que

$$B'V = \frac{1}{2} AH_1.$$

Puisque $(A'B')$ est parallèle à (AB), U est le pied de la hauteur du triangle $A'B'C'$ issue de C'. On note G le centre de gravité du triangle ABC. L'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ transforme le triangle ABC en le triangle $A'B'C'$ donc transforme la hauteur du triangle ABC issue de C en la hauteur du triangle $A'B'C'$ issue de C', c'est-à-dire qu'elle transforme H_1 en U. Finalement,

$$A'U = \frac{1}{2}AH_1.$$

On a ainsi établi $A'U = B'V$. Puisque I est le milieu de $[A'B']$, c'est aussi le milieu de $[UV]$, ce qui montre que $OA_1 = OB_1$ et clôt la démonstration.

Raymond Raynaud (Digne) propose la même approche que Jean-Claude Carréga. Il remarque que l'égalité $OA'^2 - OB'^2 = HB'^2 - HA'^2$ résulte du fait que, dans le cercle des neuf points (ou cercle d'Euler), les deux cordes parallèles $[A'B']$ et $[C'H_1]$ ont même médiatrice.

Solution de Jacques Bouteloup (Rouen). Soit K le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A et toujours A', B' les milieux de [BC] et [CA]. Le premier théorème de la médiane s'écrit

$$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{1}{2}BC^2,$$

d'où

$$AA'^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right) - \frac{1}{4}BC^2.$$

On a aussi

$$HB^2 + HC^2 = 2HA'^2 + \frac{1}{2}BC^2,$$

d'où

$$HA'^2 = \frac{1}{2}\left(HB^2 + HC^2\right) - \frac{1}{4}BC^2. \tag{1}$$

De même,

$$HB'^2 = \frac{1}{2}\left(HC^2 + HA^2\right) - \frac{1}{4}AC^2. \tag{2}$$

Le troisième théorème de la médiane s'écrit

$$AB^2 - AC^2 = 2\overline{BC} \times \overline{A'K} = HB^2 - HC^2.$$

De même,

$$HC^2 - HA^2 = BC^2 - BA^2$$

et

$$HA^2 - HB^2 = CA^2 - CB^2. \tag{3}$$

D'autre part,

$$\overline{CA_1} \times \overline{CA_2} = CA'^2 - A'H^2 = \frac{1}{4}BC^2 - A'H^2$$

et

$$\overline{CB_1} \times \overline{CB_2} = CB'^2 - B'H^2 = \frac{1}{4}AC^2 - B'H^2.$$

Donc

$$\overline{CA_1} \times \overline{CA_2} - \overline{CB_1} \times \overline{CB_2} = \frac{1}{4}BC^2 - \frac{1}{4}CA^2 - A'H^2 + B'H^2.$$

Les relations (1) et (2) donnent

$$\overline{CA_1} \times \overline{CA_2} - \overline{CB_1} \times \overline{CB_2} = \frac{1}{2}\left(BC^2 - AC^2 + HA^2 - HB^2\right).$$

Finalement, l'égalité (3) donne

$$\overline{CA_1} \times \overline{CA_2} = \overline{CB_1} \times \overline{CB_2},$$

donc A_1, A_2, B_1, B_2 sont cocycliques. Le centre du cercle cherché est le point d'intersection des médiatrices de $[A_1A_2]$ et $[B_1B_2]$ donc des médiatrices de [BC] et [CA]. Ainsi, O est le centre de ce cercle. Par symétrie, les points C_1 et C_2 sont également sur ce cercle.

Jacques Bouteloup signale que l'on n'utilise nulle part que les angles du triangle ABC sont aigus et déplore que les Olympiades Internationales introduisent dans les hypothèses des inégalités (angles aigus) pour démontrer des égalités (points cocycliques).

Solution de Georges Lion (Wallis). On note toujours K le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A et A′, B′ les milieux de [BC] et [C'A]. On introduit également le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABC. On a les relations classiques

$$OA' = R\cos\left(\widehat{A}\right),\ HK = BK\cot\left(\widehat{C}\right),\ KA' = \frac{1}{2}BC - BK.$$

On utilise la relation

$$OA_1^{\ 2} = OA'^2 + A'H^2 = OA'^2 + A'K^2 + KH^2$$

et les formules telles que

$$BC = 2R\sin\left(\widehat{A}\right).$$

Cela donne

$$\begin{aligned} OA_1^{\ 2} &= R^2\left(\cos^2\left(\widehat{A}\right) + \sin^2\left(\widehat{A}\right) + 4\cos^2\left(\widehat{B}\right) - 4\sin\left(\widehat{A}\right)\sin\left(\widehat{B}\right)\sin\left(\widehat{C}\right)\right) \\ &= R^2\left(1 - 4\cos\left(\widehat{A}\right)\cos\left(\widehat{B}\right)\cos\left(\widehat{C}\right)\right). \end{aligned}$$

Cette expression étant symétrique en A, B, C, il en découle l'égalité des six distances au point O.

Georges Lion propose également une solution en considérant une inversion de pôle H préservant le cercle circonscrit au triangle A-BC.

Problème 479.2

1. Montrer que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

pour tous nombres réels x, y, z différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$.

2. Montrer qu'il existe une infinité de triplets de nombres rationnels x, y, z différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$, pour lesquels l'inégalité ci-dessus est une égalité.

Solution. L'inégalité à établir s'écrit

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}\geq 1-\frac{z^2}{(z-1)^2},$$

soit, en mettant au même dénominateur,

$$\frac{2x^2y^2-2xy(x+y)+x^2+y^2}{(xy-x-y+1)^2}\geq\frac{1-2z}{(z-1)^2}.$$

On pose $s = x + y$ et $p = xy$ donc $z=\frac{1}{p}$. Il s'agit alors de montrer que

$$\frac{2p^2-2ps+s^2-2p}{(p-s+1)^2}\geq\frac{p^2-2p}{(1-p)^2}$$

ou encore, après un calcul sans surprise,

$$s^2+2s\left(p^2-3p\right)+\left(p^2-3p\right)^2\geq 0,$$

inégalité évidente puisqu'elle équivaut à

$$\left(s+p^2-3p\right)^2\geq 0.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $s = 3p - p^2$, c'est-à-dire si et seulement si x et y sont les racines de l'équation

$$\mathrm{X}^2+\left(p^2-3p\right)\mathrm{X}+p=0 \qquad (4)$$

dont le discriminant est

$$\Delta=\left(p^2-3p\right)^2-4p=p(p-1)^2(p-4).$$

L'existence de solutions réelles pour l'équation (4) est équivalente à la condition $\Delta\geq 0$, i.e. à $p \geq 4$ ou $p < 0$ (les cas $p = 0$ ou $p = 1$ étant exclus par les hypothèses $pz = 1$ et $z \neq 1$). Les racines de l'équation (4) sont alors

$$\frac{1}{2}\left(3p-p^2\pm(p-1)\sqrt{p(p-4)}\right).$$

Pour transformer p $(p - 4) = (p - 2)^2 - 4$ en carré, on peut transformer p en $2 \pm 2\mathrm{ch}(\alpha)$, mais en vue d'une paramétrisation rationnelle, il est préférable de faire le changement de variable

$$p = 2 + t + \frac{1}{t} \text{ avec } t \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}.$$

On a exclu la valeur $t = -1$ pour laquelle $p = 0$. Un calcul montre alors que $p(p-4) = \left(t - \frac{1}{t}\right)^2$ et que les racines de l'équation (4) sont $-t(1+t)$ et $-\frac{1+t}{t^2}$. Le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$ permute les deux racines. Comme t parcourt $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$, on peut choisir $x(t) = -t(1+t)$ et $y(t) = -\frac{1+t}{t^2}$. Enfin, $z(t) = \frac{1}{x(t)y(t)} = -\frac{t}{(1+t)^2}$. Finalement, la courbe définie par les équations

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} = 1 = xyz$$

est paramétrée par

$$x(t) = -\frac{t+1}{t^2},\ y(t) = -t(t+1),\ z(t) = \frac{t}{(t+1)^2} \quad (t \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}).$$

Les paramétrages $x = x(t)$, $y = y(t)$ et la relation

$$t = \frac{(1-x)(1-y)}{xy} \tag{5}$$

montrent que t est rationnel si et seulement si $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ le sont. On a ainsi toutes les solutions rationnelles. Il y en a une infinité, puisque l'application $t \in \mathbb{Q} - \{-1, 0\} \mapsto (x(t), y(t))$ est injective d'après la relation (5).

Jean-Claude Carréga (Lyon) obtient sensiblement le même résultat, par des études de fonctions et propose les solutions rationnelles suivantes :

$$x_1(n) = \frac{2n}{(n+2)^2},\ y_1(n) = -2\frac{(n+2)}{n^2},\ z_1(n) = -\frac{n(n+2)}{4} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Le paramètre n peut-être choisi rationnel. En faisant varier n dans $\mathbb{Q} - \{-2, 0\}$, le paramétrage (x_1, y_1, z_1) est équivalent au paramétrage (x, y, z) proposé en première solution puisque

$$x\left(\frac{n}{2}\right) = y_1(n),\quad y\left(\frac{n}{2}\right) = z_1(n),\quad z\left(\frac{n}{2}\right) = x_1(n).$$

Franck Gautier (Pérignat lès Sarliève) et **Jean-Christophe Laugier (Rochefort)** établissent l'inégalité très rapidement. On pose par exemple

$$a = \frac{x}{x-1}, \quad b = \frac{y}{y-1}, \quad c = \frac{z}{z-1}.$$

La condition $xyz = 1$ équivaut à

$$abc = (a-1)(b-1)(c-1).$$

En notant

$$\sigma_1 = a+b+c \quad \text{et} \quad \sigma_2 = ab+ac+bc,$$

cela équivaut à

$$\sigma_1 = 1 + \sigma_2.$$

On a alors

$$a^2 + b^2 + c^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1 + \sigma_2^2 \geq 1,$$

ce qui est l'inégalité recherchée.
Jean-Christophe Laugier propose comme solutions rationnelles

$$x_2(n) = -2\frac{n+1}{(n-1)^2}, \; y_2(n) = 2\frac{n-1}{(n+1)^2}, \; z_2(n) = \frac{1-n^2}{4} \quad (n \in \mathbb{N} - \{1\})$$

Là encore, on peut prendre n dans $\mathbb{Q} - \{-1, 1\}$ et l'on obtient les mêmes solutions que précédemment. Le passage de ce paramétrage à celui de Jean-Claude Carréga se fait ainsi :

$$x_2(-n-1) = x_1(n), \quad y_2(-n-1) = y_1(n), \quad z_2(-n-1) = z_1(n).$$

Enfin, Franck Gautier propose comme solutions rationnelles

$$\left(\frac{-(t-1)(3t-1)(3t+1)(t+1)}{16t^2}, \frac{-4t(t+1)(3t-1)}{(3t+1)^2(t-1)^2}, \frac{4t(t-1)(3t+1)}{(3t-1)^2(t+1)^2} \right)$$

pour $t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cap \mathbb{Q}^*$. Il remarque que $x(-t) = x(t)$, $y(-t) = z(t)$ et aussi que $x\left(\frac{1}{3t}\right) = x(t)$, $y\left(\frac{1}{3t}\right) = z(t)$. Étendre le domaine de variation de t ne donnerait que de nouveaux triplets obtenus par permutation de y et z.

Problème 479.4

Trouver toutes les fonctions f : $]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ telles que

$$\frac{f(w)^2 + f(x)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

pour tous nombres réels w, x, y, z vérifiant $wx = yz$.

Solution. En prenant $w = x = y = z > 0$, on obtient, pour tout $w > 0$, $f(w)^2 = f(w^2)$. En spécialisant en $w = 1$ et comme f est strictement positive, on a $f(1) = 1$. Fixons alors $w > 0$ et choisissons $x = 1$, $y = z = \sqrt{w}$. On a

$$\left(f(w)^2 + 1\right)w = f(w)\left(w^2 + 1\right),$$

soit

$$\left(wf(w) - 1\right)\left(f(w) - w\right) = 0$$

et

$$f(w) = w \quad \text{ou} \quad f(w) = \frac{1}{w}.$$

A priori, les deux choix sont possibles pour chaque $w > 0$. Montrons qu'il n'en est rien en supposant qu'existent a, $b > 0$ tels que $f(a) = a$ et $f(b) = \frac{1}{b}$ avec a, $b \neq 1$. L'équation fonctionnelle testée en $w = \sqrt{ab}$, $x = 1$, $y = \sqrt{a}$ et $z = \sqrt{b}$ donne (puisque $f(x)^2 = f(x^2)$)

$$\frac{f(ab) + 1}{a + \frac{1}{b}} = \frac{ab + 1}{a + b}.$$

Mais $f(ab)$ ne peut prendre que deux valeurs, à savoir ab ou $\frac{1}{ab}$. La première valeur $f(ab) = ab$ conduit à $\frac{ab+1}{a+\frac{1}{b}} = \frac{ab+1}{a+b}$, soit $b = 1$ (ce qui est exclu) et la seconde valeur $f(ab) = \frac{1}{ab}$ donne $\frac{\frac{1}{ab}+1}{a+\frac{1}{b}} = \frac{ab+1}{a+b}$, soit $a = 1$ (également exclu).

Finalement, f ne peut être que l'identité ou $x \mapsto \frac{1}{x}$. On vérifie aisément que ces deux applications conviennent.