Les figures : papier ou écran ?

Marc Roux

Le texte qui précède a été écrit par Henri Bareil il y a vingt et un ans. À l'époque Cabri Géomètre n'existait que depuis deux ans, et l'équipement informatique des lycées comme des familles était fort limité. Depuis, la disponibilité de logiciels de géométrie dynamique s'est largement accrue, avec la création de Geoplan en 1996 (et Geospace peu après) et la floraison, au XXI^{e} siècle, de logiciels gratuits : GeoGebra, CarMetal, XCas, MathGraph, … ainsi que la version gratuite de Geoplan et Geospace. Maintenant les enseignants, majoritairement, les utilisent dans leurs préparations de cours et de sujets ; beaucoup d'entre eux amènent leurs classes en salle informatique, au moins de temps en temps, et encouragent la réalisation informatique des figures des devoirs maison. Le rôle des figures en a-t-il été changé ? Reprenons une par une les questions soulevées par Henri, en admettant que l'élève considéré est déjà familiarisé avec le logiciel qu'il utilise.

1. Il est possible que, ayant à dessiner un quadrilatère, à l'écran comme sur papier, l'élève place d'abord les sommets d'un rectangle. Mais je doute qu'il utilise la commande « rectangle » (à supposer qu'elle existe). Il cherchera « quadrilatère », il devra probablement passer par « polygone » (occasion, peut-être, d'enrichir son vocabulaire). Et la figure créée pourra à volonté être transformée en losange, carré ou quadrilatère irrégulier. L'intérêt essentiel du logiciel réside dans l'épithète « dynamique » ; le principe absolu de son utilisation doit être : 1) on crée la figure, 2) on bouge les points. Si cette habitude est enracinée, il peut devenir l'arme absolue contre la confusion entre le particulier et l'universel.

2. Dans la recherche de conjectures, le premier intérêt du logiciel est un gain de temps : une seule figure fournit un nombre d'exemples aussi grand qu'on veut[(1)] (alors qu'à la main seuls les élèves particulièrement consciencieux réalisaient deux ou trois figures soignées). Il en est de même pour la recherche de contre-exemples. Mais il y a plus : en observant l'évolution d'une figure en continu, l'élève a de meilleures chances de se forger une image mentale du

(1) Il y a lieu à ce sujet de s'interroger sur le statut théorique de la figure informatique : on distingue généralement la figure géométrique, en tant qu'ensemble abstrait de points vérifiant certaines propriétés, du dessin, objet matériel qui en est une représentation dans un cas particulier (Cf. article « *Voir et savoir. La représentation du perçu et du su dans les dessins de la géométrie de l'espace* », par Bernard Parzysz in Bulletin APMEP n° 364, p. 339-350.). Or la figure informatique n'est ni l'un ni l'autre : puisqu'elle a un support matériel (différent selon le contexte logiciel), elle ne se confond pas avec la première ; ce n'est évidemment pas non plus un simple dessin, puisqu'elle contient potentiellement tous les « cas de figure ». On pourrait dire que c'est la classe d'équivalence de tous les dessins (réalisables avec un logiciel donné) qui représentent une même figure. On pourra relire à ce propos l'article de Serge Hocquenghem : « *La notion de figure mathématique et sa réalisation informatique* », Bulletin APMEP n° 429, Mai-Juin 2000.

concept d'invariant. De même, la recherche du maximum (ou du minimum) d'une aire (ou longueur, ou angle, …) prend tout son sens quand on peut voir changer en continu une valeur numérique, à mesure qu'on déplace un point.

3. L'aspect approximatif des tracés disparaît avec le logiciel. Non qu'il fasse des constructions exactes, bien sûr (puisque la géométrie des pixels est une géométrie discrète), mais sa précision est toujours supérieure à ce que l'œil peut détecter. Cette quasi-perfection est une arme à double tranchant : des conjectures non démontrées apparaissent sur la figure comme des évidences, et risquent d'être utilisées à tort dans une démonstration. Même dans le cas où l'élève identifie parfaitement la propriété visée, il est totalement convaincu de sa vérité dès lors qu'elle « résiste » aux manipulations ; la démonstration, plus que jamais, lui apparaît comme inutile, comme une « manie de matheux ». J'irai jusqu'à dire que la démonstration perd alors toute dimension argumentative ; et qu'il y a un risque certain de confusion entre les mathématiques et les sciences dites expérimentales (les mathématiques ont aussi un aspect expérimental, mais contrairement à la physique par exemple, l'expérimentation, l'observation, n'y sont pas reconnues en tant que validations d'un résultat). Par contre la certitude préalable du résultat a le mérite d'éviter toute hésitation entre essayer de démontrer une propriété et tenter de prouver sa négation. Pour distinguer la preuve expérimentale de la preuve hypothético-déductive, il est donc nécessaire de conserver l'usage du dessin à main levée, sur papier ; mais il sera sans doute difficile d'en convaincre les élèves. On peut aussi envisager des figures « à souris levée » : par exemple, au lieu d'utiliser la commande « droites parallèles », créer deux droites quelconques puis les amener à un parallélisme approximatif.

4. Le logiciel peut apporter une aide pour surmonter certaines des difficultés évoquées par Henri :
   - (4.3) Il donne des facilités pour isoler une partie de la figure, à condition de maîtriser la commande « montrer/cacher » (qui n'existe malheureusement pas dans tous les logiciels).
   - (4.5) L'intérêt de la recherche d'une méthode de construction n'est pas moindre à l'écran que sur papier : le logiciel évacue tout problème de maladresse manuelle ou ennui technique (le compas qui s'ouvre et trace une spirale, …), il fait gagner du temps et de la précision, mais la plupart du temps il demande l'usage réfléchi du même algorithme que pour la construction à la main : pour compléter un parallélogramme de sommets A, B, C, il faudra toujours construire la parallèle à (AB) passant par C, la parallèle à (BC) passant par A, et leur point d'intersection ou bien déterminer le milieu M de A et C, puis le symétrique de B par rapport à M.
   - (4.6) Dans la perception des transformations, le logiciel est l'outil par excellence. Après avoir créé un triangle ABC, un vecteur $\vec{v}$, l'image de ABC par la translation de vecteur $\vec{v}$, on observe ce qui se passe

quand on bouge A, B, C ou $\vec{v}$: c'est un moyen irremplaçable de se créer une image mentale de la translation.

5. Les facilités apportées par le logiciel dans la recherche de questions à réponse ouverte sont évidentes : énorme gain de temps dans l'exploration d'une multitude de cas de figure, possibilité d'adjonction ou suppression d'hypothèses (par exemple en redéfinissant un point libre en point sur une droite donnée, …), visualisation immédiate de lieux géométriques, soit par la fonction « trace », soit directement par la commande « lieu ».
   Quant à son rôle dans la découverte d'une démonstration, personnellement je l'estime très limité ; il peut néanmoins dans certains cas faire apparaître une conjecture équivalente à celle que l'on veut démontrer, et qui sera plus facile à prouver.

En conclusion : le logiciel ne change pas fondamentalement le rôle des figures dans la recherche de problèmes ; mais, d'une part, il évite la réalisation fastidieuse de dessins, fait gagner du temps et de la précision ; et surtout, sous réserve d'être utilisé de manière dynamique, c'est-à-dire en faisant bouger les figures, il montre mieux l'aspect universel des résultats, et il aide à donner du sens à des concepts abstraits, tels que invariants, transformations ponctuelles, lieux géométriques. Il présente aussi l'inconvénient de réduire apparemment la place de la démonstration. Ce n'est qu'un outil de plus dans la panoplie de l'enseignant, mais un outil précieux, susceptible de favoriser chez certains élèves la compréhension profonde des concepts.