Nombres rimant avec leur carré

Julien Moreau

Le carré d'un entier finissant par 6 finit par 6 ; le carré d'un entier finissant par 76 finit par 76, celui d'un entier finissant par 376 finit par 376. Peut-on continuer ainsi indéfiniment ? Et, plus généralement, comment fabriquer des nombres dont le carré rime riche, si l'on peut dire, avec le nombre lui-même ?

Ce problème n'a qu'un intérêt anecdotique[(1)], mais il est assez distrayant et constitue un bon thème de travail sur la divisibilité et les congruences dans l'enseignement de spécialité en terminale S.

1. Problème (P_n)

Y a-t-il des nombres x ($x \in \mathbb{N}$) tels que les n derniers chiffres de l'écriture décimale de x^2 soient les mêmes que ceux de x et quels sont-ils ?

On connaît les solutions pour $n = 1$ (x se termine par 0, 1, 5 ou 6). Il est bien connu aussi que, si x se termine par 00, 01 ou 25, son carré se termine aussi par 00, 01 ou 25 ; il est déjà moins connu que les nombres se terminant par 76 ont la même propriété.

En s'appuyant sur le fait que les $n - 1$ derniers chiffres d'une solution de (P_n) forment une solution de (P_{n-1}), il est possible de faire une exploration artisanale à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, qui permet de bâtir aisément de proche en proche le tableau (T) ci-dessous.

(T)

n	1	2	3	4	5
solutions de (P_n) : nombres finissant par …	0	00	000	0 000	00 000
	1	01	001	0 001	00 001
	5	25	625	0 625	90 625
	6	76	376	9 376	09 376

Nous nous proposons maintenant de montrer qu'il existe pour tout n donné des solutions, de les dénombrer et d'en fournir une technique de fabrication. Pour cela, nous allons remplacer le problème par un problème de congruence.

2. Problème (P'_n)

Toute solution x de (P_n) est bien sûr solution du problème (P'_n) suivant :

Quels sont les nombres x ($x \in \mathbb{Z}$) tels que $x^2 \equiv x \pmod{10^n}$?

(1) Il a cependant retenu l'attention de mathématiciens sérieux, notamment Édouard Lucas.

Réciproquement, considérons une solution x de (P'_n). Tout x' congru à x modulo 10^n est évidemment aussi solution ; parmi eux, il y en a un et un seul, x_0, situé dans $[0, 10^n[$. Si $x_0 \geq 10^{n-1}$, les entiers naturels dont les n derniers chiffres sont les n chiffres de x_0 sont solutions de (P_n) ; si x_0 a m chiffres, avec $m < n$, les entiers naturels dont les n derniers chiffres s'obtiennent en mettant $n - m$ zéros devant l'écriture de x_0 sont solutions de (P_n). Ainsi 625 est solution de (P'_4) et les solutions correspondantes de (P_4) sont les nombres finissant par 0625.

Pour résoudre (P_n), *il nous suffit donc de résoudre* (P'_n).

3. Mise en forme de (P'_n)

La congruence $x^2 \equiv x \pmod{10^n}$ a, comme l'équation $x^2 = x$, les solutions évidentes 0 et 1. Mais le travail empirique fait au départ montre que ce ne sont pas les seules.

Ce peut être l'occasion d'amener les élèves à une salutaire réflexion : le symbole $\equiv$ se manipule comme le signe $=$ pour ce qui est des opérations $+$, $-$, $\times$ mais $ab \equiv 0$ n'implique pas forcément $a \equiv 0$ ou $b \equiv 0$, ce qui interdit de simplifier sans précautions.

Nous écarterons désormais les solutions 0 et 1, correspondant pour (P_n) aux nombres finissant par 00…0 ou 00…1.

On veut que 10^n divise $x^2 - x$, c'est-à-dire que $2^n \cdot 5^n$ divise $x(x - 1)$. Comme x et $x - 1$ sont premiers entre eux, 5, qui divise leur produit, divise l'un des deux et est premier avec l'autre ; finalement 5^n divise l'un des deux et est premier avec l'autre. Même chose pour 2^n.

Au total, on a quatre possibilités s'excluant mutuellement :

- 2^n et 5^n divisent tous deux x,
- 2^n et 5^n et divisent tous deux $x - 1$,
- 2^n divise $x - 1$ et 5^n divise x,
- 2^n divise x et 5^n divise $x - 1$.

Or, 2^n et 5^n étant premiers entre eux, si chacun d'eux divise un même nombre, leur produit aussi. Les deux premiers cas envisagés donnent donc $x \equiv 0 \pmod{10^n}$ ou $x \equiv 1 \pmod{10^n}$, solutions que nous avons déjà rencontrées. Les autres solutions de (P'_n) sont les x tels que soit réalisé l'un des deux systèmes de conditions :

(A_n) 5^n divise x, 2^n divise $x - 1$,
(B_n) 2^n divise x, 5^n divise $x - 1$.

4. Résolution de (A_n)

Lemme (L) : Le carré de toute solution de (A_n) ***est solution de*** (A_{n+1}).

Supposons que (A_n) ait une solution z ; montrons que z^2 est solution de (A_{n+1}). Par hypothèse, z est divisible par 5^n, donc z^2 l'est par 5^{2n} et a fortiori par 5^{n+1}. Par hypothèse également, $z - 1$ est divisible par 2^n ; $z + 1$ est donc pair, ce qui prouve que leur produit $z^2 - 1$ est divisible par 2^{n+1}.

Existence d'une solution pour tout n

Sachant que (A_1) a la solution 5, il suffit de raisonner par récurrence en utilisant le lemme (L).

« Unicité » de la solution pour tout n

Si x et y sont deux solutions de (A_n), l'application du principe « si a divise b et c, il divise $b - c$ » montre que 2^n et 5^n divisent $x - y$; comme 2^n et 5^n sont premiers entre eux, leur produit 10^n divise $x - y$. Autrement dit $x \equiv y \pmod{10^n}$.

Il y a donc, pour n donné, unicité modulo 10^n de la solution de (A_n). Nous appellerons désormais u_n sa détermination appartenant à $[0, 10^n[$.

Construction de la suite des u_n

Toute solution de (A_{n+1}) étant solution de (A_n), nous avons $u_{n+1} \equiv u_n \pmod{10^n}$. Il en résulte que, si $\overline{\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1\alpha_0}$ est l'écriture décimale de u_n (étant entendu qu'en tête de cette écriture peuvent figurer un ou plusieurs zéros, si d'aventure on a $u_n < 10^{n-1}$), celle de u_{n+1} est du type $\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1\alpha_0}$, où α_n est un chiffre convenablement choisi (pouvant être 0).

En outre, il résulte du lemme (L) que u_n^2 est solution de (A_{n+1}) et donc que $u_{n+1} \equiv u_n^2 \pmod{10^{n+1}}$. Par suite α_n est le chiffre d'indice n dans l'écriture de u_n^2. Ainsi, de $u_5 = 90\,625$ on tire $u_5^2 = 8\,212\,890\,625$, puis $u_6 = 890\,625$.

5. Étude de ($\mathbf{B}_n$)

Relation entre les conditions $(\mathbf{A}_n)$ et $(\mathbf{B}_n)$

Posons $x = 1 - y$ dans la condition (B_n) : 2^n divise x, 5^n divise $x - 1$. Elle devient : 2^n divise $y - 1$, 5^n divise y.

Autrement dit, x vérifie (B_n) si et seulement $1 - x$ vérifie (A_n).

Résolution de $(\mathbf{B}_n)$

D'après ce qui précède, (B_n) a une solution, unique modulo 10^n, qui est $1 - u_n$. Appelons v_n sa détermination appartenant à $[0, 10^n[$. Le nombre $u_n + v_n$ est congru à 1 modulo 10^n et strictement compris entre 4 (puisque l'écriture de u_n finit par un 5) et 2×10^n. On a donc, pour toute valeur de n :

$$u_n + v_n = 10^n + 1.$$

D'où la règle de « fabrication » de v_n à partir de u_n : le chiffre des unités de v_n est 6 ; tous les autres chiffres sont les compléments à 9 des chiffres de même rang de u_n.

N.B. : De $u_n(u_n - 1) \equiv 0 \pmod{10^n}$ on déduit aussitôt que $u_n v_n \equiv 0 \pmod{10^n}$. L'écriture décimale du produit $u_n v_n$ comporte donc au moins n zéros à droite.

6. Liste des solutions de ($\mathbf{P}_n$)

Résumons les résultats obtenus :

Pour tout n, il existe quatre solutions[2] de (P_n). Ce sont les nombres dont les derniers chiffres sont :

- 000…0 ;
- 00… 01 ;
- l'écriture décimale de u_n (complétée si nécessaire par des zéros à gauche) ;
- l'écriture décimale de v_n (id).

N.B. : Si nous posons $u_n = 5^n\, a_n$ et $v_n = 2^n\, b_n$, où a_n et b_n sont manifestement des entiers naturels, la relation $u_n + v_n = 10^n + 1$ nous donne l'égalité de Bézout :

$$5^n\, a_n + 2^n\,(b_n - 5^n) = 1.$$

7. Calcul de u_n et v_n

Une formule explicite pour u_n

Montrons que, pour tout n, $5^{2^{n-1}}$ est solution de (A_n).

La chose est manifeste pour $n = 1$ et $n = 2$. Supposons maintenant que pour un indice n donné, $5^{2^{n-1}}$ soit solution de (A_n) ; alors son carré 5^{2^n} est solution de (A_{n+1}).

Il en résulte que u_n *est le reste de la division de* $5^{2^{n-1}}$ *par* 10^n. Autrement dit, son écriture est formée des n derniers chiffres de celle de $5^{2^{n-1}}$.

Nous sommes donc tentés de pavoiser. Nous avons un algorithme *a priori* simplissime pour le calcul de u_n : prendre les n derniers chiffres de $5^{2^{n-1}}$.

Appliquons-le, par exemple, au calcul de u_{10}. Il nous faut les 10 derniers chiffres de 5^{512}. Ma calculatrice donne $7{,}4583407312002067432909653154629\ldots \times 10^{357}$ avec 31 décimales, ce qui n'est déjà pas si mal. Hélas, ce dont j'aurais besoin, ce sont les décimales numéros 348 à 357 !

C'est sans doute le moment de faire prendre conscience aux élèves d'un phénomène courant en mathématiques : la formule donnant la solution exacte d'un problème peut être à la fois accessible, simple d'aspect et pourtant trop lourde à manipuler pour être utilisable.

Calcul de u_n par récurrence

Il faut alors nous rabattre sur le calcul par récurrence, en nous appuyant, comme il a été indiqué à la fin du § 4, sur le fait que, dans l'écriture décimale de u_{n+1}, le chiffre d'indice n (c'est-à-dire le coefficient de 10^n) est le même que dans celle de u_n^2. On obtient très vite, même avec une calculatrice modeste, le tableau (U) ci-après. Le tableau (V) s'en déduit aussitôt.

(2) Elles sont toujours distinctes, car elles sont de dernier chiffre 0, 1, 5, 6 respectivement.

(U)

n	u_n	u_n^2
2	25	625
3	625	390 625
4	625	390 625
5	90 625	8 212 890 625
6	890 625	793 212 890 625
7	2 890 625	8 355 712 890 625
8	12 890 625	166 168 212 890 625
9	212 890 625	45 322 418 212 890 625
10	8 212 890 625	

(V)

n	v_n	v_n^2
2	76	5 776
3	376	141 376
4	9 376	87 909 376
5	9 376	87 909 376
6	109 376	11 963 109 376
7	7 109 376	50 543 227 109 376
8	87 109 376	7 588 043 387 109 376
9	787 109 376	619 541 169 787 109 376
10	1 787 109 376	

N.B. : À titre de curiosité, donnons les résultats pour n = 20 :
u_{20} = 92 256 259 918 212 890 625 v_{20} = 07 743 740 081 787 109 376

8. Appendice

L'étude ci-dessus peut être prolongée dans différentes directions :

• Et si au lieu du carré on s'intéressait aux puissances q-ièmes ?

• Et si on posait le problème dans une base autre que 10 ?

• Et si on essayait de donner sens aux écritures ……59 918 212 890 625 et ……40 081 787 109 376, illimitées à gauche, auxquelles le problème nous a conduits ?

La première piste peut être empruntée avec une bonne classe de Terminale. La seconde peut être suivie soit au niveau de la Terminale, soit au niveau du premier cycle universitaire. La dernière est un peu plus raide.

Le lecteur curieux ou masochiste trouvera des éléments de réponse sur le site Internet de l'APMEP, sous le titre « Nombres rimant avec leur carré (compléments) ».