Le retour de la « Règle de trois »…

François Drouin(*)

Cette expression apparaît dans les programmes 2008 de l'école élémentaire, en particulier dans les progressions indicatives des apprentissages :

Au CM1 :
Utiliser la « règle de trois » dans des situations très simples de proportionnalité.

Au CM2 :
Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes et aux conversions d'unité en utilisant des procédures variées (dont la « règle de trois »).

Il est à noter que les auteurs des programmes 2008 occultent totalement le travail de reconnaissance d'une situation relevant de la proportionnalité. Semblent être mises en avant des procédures avec l'espoir que les notions mathématiques rencontrées prennent par la suite du sens. Nous retrouvons cette démarche lorsque sont évoqués des calculs avec les pourcentages et les vitesses moyennes, sans exiger en préalable que ces notions aient pris du sens chez les élèves.

Pour des raisons annoncées de « liberté pédagogique », il n'est fourni aucun document d'accompagnement à l'enseignant de CM1-CM2. Celui-ci est pourtant en droit de se poser des questions à propos de ce qui se cache derrière cette expression qu'il n'a guère rencontrée pendant ses études… Il peut tenter de se procurer les bien intéressants commentaires des programmes 2002…

Qu'appelle-t-on « règle de trois » ?

1- Dans des dictionnaires :

L' expression « règle de trois » semblant un peu ancienne, explorons deux dictionnaires datant quelque peu :

Petit Larousse illustré 1989 :
Calcul d'un nombre inconnu à partir de trois autres connus, dont deux varient soit en proportion directe, soit en proportion inverse.

Le Petit Robert 1976 :
Formule, opération, procédé qui permet de résoudre certains problèmes, d'effectuer certains calculs. *Règle de trois* (1538) ou *de proportion*.

Dans le **Petit Larousse**, nous trouvons deux types de proportion, mais nous pouvons raisonnablement penser que seule la proportion directe sera rencontrée au cycle 3. La définition donnée dans le **Petit Robert** est plus vague. Elle nous apprend cependant que l'expression « règle de trois » daterait de 1538…

(*) IUFM de Lorraine.

Faute de documents d'accompagnement des programmes, l'enseignant de cycle 3 voudrait savoir ce qu'en disent les auteurs de manuel. Cependant, à la rentrée 2008, aucun éditeur n'a eu le temps, semble-t-il, d'en faire paraître.

Puisque l'expression « règle de trois » est ancienne, il reste la possibilité d'explorer des manuels datant quelque peu.

2- Dans des manuels anciens :

En premier exemple, voici quelques extraits de *Arithmétique et système métrique. 2400 exercices et problèmes classés d'après une division des matières du programme du 27 juillet 1882* par U. Auvert (Gedalge Jeune, Libraire-Éditeur Paris, 1904).

> 279 : La règle de trois est la méthode servant à résoudre les problèmes dans lesquels, étant données des grandeurs pouvant former les trois termes d'une proportion, on demande de trouver le quatrième terme.
> 282 : La résolution des problèmes de règle de trois par les proportions est basée sur ce principe (n° 270) : *Le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*
> 283 : Les problèmes de règle de trois se résolvent facilement sans l'emploi des proportions par la méthode dite de *réduction à l'unité*, ou plutôt à l'aide d'un raisonnement qui varie suivant la nature de la question et qui conduit presque toujours à une division suivie d'une multiplication ou inversement à une multiplication suivie d'une division.
> 284 : Dans la pratique, on ne fait pas toujours les opérations à mesure qu'elles se présentent, surtout lorsqu'il s'agit, comme ci-dessous, de divisions qui peuvent ne pas donner des quotients exacts ; on se contente de les indiquer. On obtient ainsi, comme par l'emploi des proportions une expression fractionnaire qu'on peut en général simplifier avant d'effectuer les calculs qui doivent fournir la réponse.

Les problèmes de « règle de trois » sont des problèmes de recherche de « quatrième proportionnelle » et parmi les méthodes évoquées se trouve le passage à l'unité.

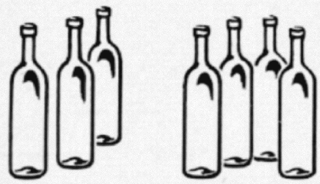
En deuxième exemple, voici quelques extraits de l'article « *Le calcul au cours moyen* » rédigé en 1963 par M Bompard, professeur à l'École Normale de la Seine dans « *Enseignement de l'arithmétique*, collection Cahiers de Pédagogie Moderne – Bourrelier – Librairie Armand Colin » :

> La règle de trois est une opération qui consiste, étant donnés trois nombres (entiers ou décimaux, concrets ou abstraits), à multiplier les deux premiers a et b, puis à diviser le produit obtenu par le troisième nombre d (en cherchant le quotient exact).

La lettre d est choisie par l'auteur de l'article en référence au mot « diviseur ». La difficulté de choisir parmi les trois nombres évoqués ceux qui seront les nombres a, b et d n'est pas évoquée.
La « règle de trois » y est présentée comme une « opération », nous dirions plutôt maintenant une procédure. Je reconnais là ce qui est fait par mes étudiants PE1, mes stagiaires PE2, les collègues PE en formation continue et qui était fait par certains de mes élèves de collège lorsque j'enseignais à ce niveau, et que des aides extérieures

leur étaient apportées lors de rencontres avec des situations relevant de la proportionnalité. Mes collègues enseignant en collège reconnaîtront le risque de ce type de systématisation, en particulier lors du traitement d'un tableau statistique ne relevant pas de la proportionnalité.

En troisième exemple, voici une partie de la leçon 75 « La règle de trois » du manuel « *Calculons en nouveaux francs - Cours moyen Pemière et Deuxième années* », de A. Godier, A. Donnet, inspecteurs de l'enseignement primaire et de M. Gaultier, directeur de collège d'enseignement général, Librairie Classique Eugène Belin, dépôt légal 4ème trimestre 1961.



3 l de vin coûtent 3,90 NF.

Combien coûteraient ces 4 l de vin ?

Problème.

3 litres de vin coûtent 3,90 NF. Combien coûteraient 4 l de vin de même qualité ?

je connais 3 nombres. **3 l ; 3,90 NF**
4 l. ?

Je dois en trouver un quatrième : le prix de 4 l.

Première solution : **en calculant la valeur de l'unité.**
Prix d'un litre de vin : 3,90 NF : 3 = 1,30 NF.
Prix de 4 litres de vin : 1,30 NF × 4 = 5,20 NF.

Seconde solution : **en utilisant la règle de trois.**
1re ligne : **Ce que je sais : 3** litres coûtent 3,90 NF ;
2e ligne : **Réduction à l'unité : 1** litre coûte $\frac{3{,}90\text{ NF}}{3}$; (je n'effectue pas l'opération)
3e ligne : **Recherche du nombre inconnu. Valeur de 4 l** . . . **4** l coûtent :

$$\frac{3{,}90\text{ NF}}{3} \times 4 \quad \text{ou} \quad \frac{3{,}90\text{ NF} \times 4}{3} = 5{,}20\text{ NF}.$$

Remarques relatives à la règle de trois.
Le dernier nombre de la première ligne du raisonnement (3,90 NF) et la réponse (5,20 NF) sont exprimés à l'aide d'une même unité (NF).
La règle de trois comprend les deux calculs indiqués pour la première solution.

Est indiquée en première solution une recherche à partir du prix d'un litre de vin. Cette recherche est ensuite utilisée pour la deuxième solution. Je retrouve dans cet extrait ce qui m'a été enseigné dans les années 60.

L'apport nouveau pour la deuxième solution est la transformation de l'écriture $\frac{a}{b} \times c$ en une écriture $\frac{a \times c}{b}$. Le souci de cette transformation était également présent dans le texte de M. Bompart cité précédemment.

En 2009, que dire à un enseignant de cycle 3, ou à un futur enseignant de cycle 3 ?

Intéressé par les nombreuses interrogations des collègues ou futurs collègues, je leur ai proposé de travailler sur un des énoncés donnés lors de l'évaluation CM2. de janvier 2009 :

> Pour faire des crêpes pour 6 personnes, il faut :
> – 250 g de farine
> – 1 litre de lait
> – 4 œufs
> – 1 cuillère à soupe d'huile
> – 2 pincées de sel
> Calculer la quantité de chacun des ingrédients nécessaires pour faire des crêpes pour 9 personnes.

Pour gagner quelque temps, je ne leur avais demandé que de travailler à propos de la quantité de farine et de fournir au moins trois méthodes différentes pour arriver au résultat demandé.
Voici les réactions à ce problème dans un groupe d'étudiants PE1 préparant le concours de recrutement de Professeurs des Écoles.
Très rapidement, une réponse a fusé, non entendue de tous : « on rajoute la moitié ». Je n'ai pas relevé la proposition et j'ai préféré laisser les étudiants explorer des pistes variées.
Lors du temps de synthèse, la très grande majorité d'entre eux m'a affirmé avoir utilisé le « produit en croix », ce qui pour eux était un calcul du type « $\dfrac{a \times b}{c}$ ».
Pour un certain nombre d'entre eux, cet enchaînement de calculs était relié à l'élaboration d'un tableau de proportionnalité.
Quelques-uns ont utilisé un coefficient de proportionnalité (« pour passer de 6 à 9, nous multiplions par 1,5 »).
Dans les deux cas, aucun ne s'est posé la question de savoir si cette situation relevait de la proportionnalité.
Quelques-uns ont utilisé le passage par la masse de farine pour 3 personnes, quelques-uns ont utilisé le passage par la masse de farine pour 1 personne.
La proposition « on rajoute la moitié » n'a pas été redite immédiatement, il me semblait que l'étudiant n'osait plus la reformuler. Il a fallu que je lui redemande de redire ce qu'il avait proposé au début. Concernant cette proposition, j'ai entendu une étudiante dire « ah cela, je n'y aurais jamais pensé ». Elle m'a avoué par la suite ne jamais mettre le nez dans un livre de cuisine…
Nous avons mis en parallèle les différentes méthodes proposées, sans les hiérarchiser.
Restait à tenter d'expliquer ce qu'était la « règle de trois » évoquée dans les programmes 2008. Je leur ai répondu qu'à mon avis, cela recouvrait la recherche d'une quatrième valeur dans une situation de proportionnalité, lorsque les trois autres valeurs intervenant sont connues. J'ai insisté sur le fait que cette procédure ne pouvait

être mise en œuvre que dans une situation reconnue comme étant une situation de proportionnalité.
Nous sommes convenus que cette reconnaissance était à travailler en classe.
Nous sommes également convenus que le travail à propos de la recherche du coefficient multiplicatif non entier relèverait plus du collège que du cycle 3.

Puisque l'usage de tableaux de proportionnalité avait eu leur préférence, nous avons envisagé ce qui était facilement réalisable en cycle 3 :

Nombre de personnes	6	9
Masse de farine (grammes)	250	

Travailler comme les étudiants l'ont fait avec « le produit en croix » ne me semble pas souhaitable en cycle 3 : donner du sens à ce qui est enseigné peut rester un objectif pour l'enseignant.
Il y a la possibilité d'augmenter le nombre de colonnes du tableau pour y faire intervenir des valeurs dont le lien entre elles est facile à trouver pour un élève de cycle 3.

Nombre de personnes	6	1	9
Masse de farine (grammes)	250		

Pour trouver pour 9 personnes, je peux chercher pour 3 personnes puis multiplier par 3 le résultat trouvé. Cette méthode utilise un diviseur commun à 6 et 9. L'utilisation de ce diviseur commun sera sans doute non évidente pour beaucoup d'élèves, cependant cette méthode pourra être mise en œuvre lorsqu'il s'agira de « passer » de 20 à 30 (de 2 dizaines à 3 dizaines).
Pour trouver pour 9 personnes, je peux chercher pour 1 personne puis multiplier par 9 le résultat trouvé. Nous nommerons cette méthode « passage à l'unité ».
J'ai expliqué à mes étudiants que dans les années 60, la résolution de problèmes relevant de la proportionnalité ne se faisait pas à l'aide de tableaux, mais en écrivant en lignes les calculs à effectuer :

Pour 6 personnes, il faut 250 g de farine.
Pour 1 personne, il faut (250 : 6) g de farine
Pour 9 personnes, il faut (250 : 6) × 9 g de farine.

Lorsque j'ai proposé ces trois lignes de calcul, très rapidement, les réponses ont été 41,66 g de farine pour une personne et 374,94 g pour six personnes.
J'ai pris le temps de leur expliquer qu'il ne fallait pas effectuer le calcul pour la deuxième ligne, mais utiliser une calculatrice scientifique qui en calculant (250 : 6) × 9 fera les arrondis nécessaires. Je leur ai de plus rappelé que dans les années 60, les calculatrices n'existaient pas. Il était demandé aux élèves de faire les calculs sous la forme (250 × 9) : 6, les justifications de cette transformation dans l'ordre des calculs étant fournies aux enseignants.

En résumé, voici les indications que je leur ai fournies à propos de cette « règle de trois »:

Le coefficient multiplicatif est utilisable lorsqu'il est simple pour les élèves.

Il est important d'apprendre aux élèves à ranger les données numériques d'un problème dans un tableau. Reste à faire reconnaître les situations relevant de la proportionnalité permettant des transformations de ce tableau ou permettant des calculs avec les nombres figurant dans le tableau.
Le « passage à l'unité » peut se faire à l'intérieur du tableau ou en écrivant des lignes d'explication.
Il me semblait que sous l'expression « règle de trois » se cachait ce que nous nommons recherche d'une « quatrième proportionnelle », que le passage à l'unité écrit en trois lignes pouvait être la nouveauté des programmes 2008 et qu'il était primordial que le travail proposé aux élèves ne soit pas vide de sens.
Nous sommes revenus sur la proposition « on rajoute la moitié » qui sera sans doute celle d'une personne habituée à la lecture des livres de cuisine. Je ne pense pas qu'elle ait été souvent choisie par les élèves de CM2 ayant passé l'évaluation de janvier 2009.
Pour conclure, je leur ai indiqué qu'il était important que les problèmes proposés puissent se résoudre avec des méthodes variées et que les élèves s'habituent à utiliser ces méthodes variées. Cela posait problème avec la masse de 250 g proposée dans l'évaluation, cela aurait pu se faire avec une masse de 240 g dès le CM1 ou une masse de 270 g lorsque l'usage des décimaux serait devenu plus familier. Je leur ai également rappelé que le « produit en croix » n'était vu au collège qu'en classe de quatrième.

Un peu de lecture pour d'autres rencontres avec la proportionnalité au cycle 3

Dans l'article « *Recherche en éducation mathématique* » (Bulletin 475 de l'APMEP), Guy Brousseau évoque parmi bien d'autres choses, l'utilisation d'un puzzle qui maintenant porte son nom. Ce puzzle peut être utile dès le cycle 3 pour faire comprendre qu'une échelle n'est pas un nombre mais un coefficient multiplicatif. Cependant, le coefficient multiplicatif qui intervient est loin d'être immédiat pour les élèves.
Un travail semblable serait à faire à propos des pourcentages qui sont des nombres pour nombre de mes étudiants.
L'article est téléchargeable à l'adresse www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Brousseau.pdf.

Dans le numéro 15 de la revue PLOT, dans l'article « *Rencontre avec une fonction en sixième* », j'évoquais la rencontre avec une situation de proportionnalité lors de la découverte du périmètre du cercle : Lorsque je fais rouler un disque, de combien de fois son diamètre a-t-il avancé ? La longueur d'un cercle étant apparue dans les programmes 2008 de l'école primaire, la situation présentée dans l'article pourrait être reprise en utilisant des disques dont le diamètre aura pour mesure un nombre entier de centimètres, rendant alors possible la division à effectuer par l'élève de CM2. Les formules des périmètres du rectangle ou du carré peuvent s'écrire sous forme additive ($P = L + l + L + l$ et $P = c + c + c + c$), favorisant l'aspect « somme » des longueurs du pourtour), ce qui n'est pas le cas pour la formule « $P = \pi \times D$ », d'où l'intérêt de la découverte de cette formule dans le cadre d'une situation de proportionnalité.

Pour faire le lien avec ce qui est fait au collège

Consultons les programmes qui seront mis en application en septembre 2009 :

En classe de sixième :

Reconnaître les situations qui relèvent de la proportionnalité et les traiter en choisissant un moyen adapté :
Utilisation d'un rapport de linéarité, entier ou décimal.
Utilisation du coefficient de proportionnalité entier ou décimal.
Passage par l'image de l'unité (ou « règle de trois »).
** Utilisation d'un rapport de linéarité, d'un coefficient de proportionnalité exprimé sous forme de quotient.*

En classe de cinquième :
L'usage du « produit en croix » est exclu en classe de cinquième.

En classe de quatrième :
Aux diverses procédures déjà utilisées s'ajoute le « produit en croix » qui doit être justifié.

En sixième, la « règle de trois » est clairement reliée au passage par l'image de l'unité. Le « produit en croix » ne sera rencontré qu'en classe de quatrième. En conjecturant que les nouveaux programmes du collège ont été écrits en tenant compte de ce qui est demandé à l'école primaire, il est raisonnable d'également nommer au cycle 3 « règle de trois » le « passage par l'image de l'unité ».

En suite à ce qu'il semble raisonnable de faire avec les élèves de cycle 3, nous pouvons penser que l'élève va petit à petit apprendre à « choisir un moyen adapté » pour résoudre les problèmes relevant de la proportionnalité et que le « passage à l'unité » ne sera utilisé que lorsque les autres procédures ne peuvent pas être mises en œuvre aisément.

Par ailleurs, je me suis rendu compte que ce « passage à l'unité » pouvait rendre service à des élèves de sixième.

Il leur est demandé de savoir par exemple calculer les $\frac{3}{7}$ de 3 500.

Calculons 1 septième de 3 500, c'est-à-dire 3 500 : 7.
Calculons 3 septièmes de 3 500, c'est-à-dire (3 500 : 7) × 3.

Ces enchaînements de calculs ont du sens pour l'élève. Dans beaucoup de manuels, il est demandé de calculer (3 500 × 3) :7 sans donner d'explication à cet enchaînement de calculs. Je tente de le justifier à mes étudiants en leur expliquant : Je calcule 3 septièmes × 3 500, c'est-à-dire (3 × 3 500) septièmes, c'est-à-dire (3 × 3 500) : 7

Quelques souhaits pour terminer :

J'aimerais savoir si mon interprétation de ce qu'on nomme « règle de trois » est conforme à ce qui est attendu dans les programmes 2008 de l'École Élémentaire.

Suite page 594

J'aimerais que dès le cycle 3, les élèves apprennent à repérer les situations simples qui relèvent ou qui ne relèvent pas de la proportionnalité.
J'aimerais que les élèves travaillant sur des problèmes de pourcentage ou de vitesse moyenne aient compris ce que sont ces pourcentages et vitesses moyennes.
J'aimerais comprendre comment les concepteurs des programmes 2008 utilisent la « règle de trois » parmi d'autres procédures variées lors des changements d'unités demandés en CM2.

D'autre part, je voudrais remercier Pol Le Gall qui fut mon collègue à l'IUFM de Lorraine. Il m'a fourni les textes des années 60 évoquant cette « règle de trois » que j'avais rencontrée en cette époque dans ma scolarité.

Quelques sites évoquant ce qu'est pour eux la règle de trois

Bien d'autres pourront être trouvés en entrant l'expression « règle de trois » dans un moteur de recherche.
http://www.bibmath.net/dico/index.php3?action=affiche&quoi=./r/regletrois.html
http://www.mathematiquesfaciles.com/proportionnalite-5-la-regle-de-trois_2_21865.htm
http://www.geocities.com/dessimo5/regle3.html
http://images.math.cnrs.fr/spip/Regle-de-trois.html
http://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A8gle_de_trois