Problèmes d'antan 6

1926

En feuilletant les anciens bulletins de notre association, on trouve des sujets d'exercices et de problèmes. Nous publierons dans chaque Bulletin Vert des exemples de ces exercices d'antan.

Envoyez vos propositions de solutions à frechetm.apmep@wanadoo.fr. Les meilleurs seront publiées.

Agrégation des sciences mathématiques des jeunes filles :

Arithmétique, Algèbre et Géométrie (*4 heures*) — On considère quatre points A, B C et D d'une circonférence de centre O.

1. Comparer au quadrilatère ABCD le quadrilatère dont les sommets sont les points de rencontre des hauteurs des triangles BCD, CDA, DAB et ABC.
2. Démontrer que les projections orthogonales du point A sur les côtés du triangles BCD sont sur une droite (a) ; et que cette droite (a) est parallèle à la droite joignant B au second point où la perpendiculaire menée de A à CD coupe la circonférence O.

   Démontrer en outre que la droite (a) et les droites analogues (b), (c) et (d) passant par les projections de B, C et D sur les côtés des triangles CDA, DAB et ABC sont concourantes. — Comparer le faisceau (a), (b), (c) et (d) au faiseau OA, OB, OC et OD.
3. Étudier la figure formée par les centres des seize circonférences tangentes aux côtés de chacun des triangles BCD, CDA, DAB, ABC.

Solution du précédent exercice antan 5

Nous publions la solution de Raymond Raynaud, de Digne.

Dans un plan, on donne une droite (D) et, sur cette droite, trois points distincts A, B et C.
Par A et B respectivement on mène les tangentes (AP) et (BP) (distinctes de (D)) à une circonférence tangente à (D) en C.
Lieu du point d'intersection de ces deux droites lorsque la circonférence varie. A, B et C restant fixes.
(On distinguera deux cas : C est entre A et B ; C n'est pas entre A et B.)

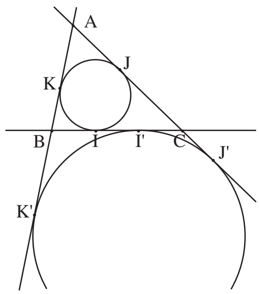
Rappelons d'abord – avec les notations usuelles – les résultats classiques suivants :

Étant donné un triangle ABC de demi-périmètre p, les points de contact de son cercle inscrit avec ses côtés sont les points I, J, K caractérisés par les égalités :

$$BI = BK = p - b,\ CJ = CI = p - c,\ AK = AJ = p - a,$$

les points de contact avec son cercle exinscrit dans l'angle A sont les points I′, J′, K′ caractérisés par les égalités :

$$BI' = CI = p - c,\ AJ' = AK' = p.$$



Passons au problème.

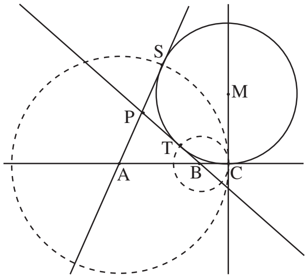
Cas où C est extérieur à [AB]

Analyse.

Soit P un point quelconque du lieu.
C'est le point de rencontre de deux tangentes AS et BT menées de A et B à un cercle (c) tangent en C à (D).
(c) est le cercle exinscrit dans l'angle A du triangle ABP.
Donc AC = p, en désignant par p le demi-périmètre du triangle PAB.
2 AC = PA + PB + AB,

$$PA + PB = AC + BC.$$

P appartient à l'ellipse (*e*) de foyers A et B, dont un sommet de l'axe focal est C.



Synthèse.

Soit P un point quelconque de (*e*).
PA + PB = CA + CB, 2AC = PA + PB + AB,

$$AC = p,$$

égalité qui caractérise C comme point de contact avec (AB) du cercle (c) exinscrit dans l'angle A du triangle ABC.
P apparaît donc comme point de rencontre de deux tangentes autres que (AB) menées de A et B à un cercle (c) tangent en C à (D)
P est un point du lieu.

AS) Le lieu étudié est l'ellipse (*e*).

Cas où C est entre A et B

Laissons de côté le cas banal où C est le milieu de [AB] et supposons par exemple que CA < CB.

Analyse.

Soit P un point quelconque du lieu.
C'est le point de rencontre de deux tangentes AS et BT menées de A et B à un cercle (c) tangent en C à (D).

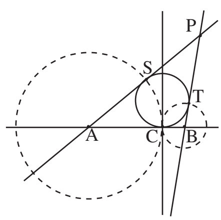
Ou bien (c) est le cercle inscrit dans le triangle PAB.
Alors AC = p − PB, 2 AC = PA + AB − PB,

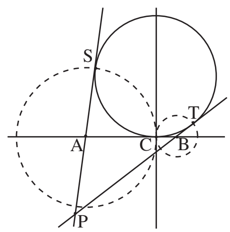
PA − PB = AC − BC.

Ou bien (c) est le cercle exinscrit dans son angle P.
Alors AC = p − PA, 2 AC = − PA + PB + AB,

PB − PA = AC − BC.

Dans les deux cas
P appartient à l'hyperbole (h) de foyers A et B dont un sommet est C.





Synthèse.

Soit P un point quelconque de (h).

Ou bien PA − PB = CA − CB.
Alors, AC = PA − PB + CB, 2 AC = PA − PB + AB = 2p − 2 PB,

AC = p − PB,

égalité qui caractérise C comme point de contact avec (AB) du cercle (c) inscrit dans le triangle PAB.

Ou bien PB − PA = CA − CB.
Alors, AC = PB − PA + BC, 2AC = PB − PA + AB = 2p − 2 PA,

AC = p − PA,

égalité qui caractérise C comme point de contact avec (AB) du cercle exinscrit dans l'angle P.

Dans les deux cas P apparaît comme point de rencontre de deux tangentes autres que (AB) menées de A et B à un cercle (c) tangent en C à (AB).
P est un point du lieu.

AS) Le lieu étudié est l'hyperbole (h).

Remarque. Dans les deux cas on peut ajouter au lieu trouvé la droite AB, intersection des deux tangentes AS et BT lorsque (c) est réduit au cercle point C.