Les mathématiques : toujours en chantier dans une unité dynamique

Jean Pierre Bourguignon(*)

Note : le texte qui suit est un compte rendu de la conférence et ne prétend pas être un article approfondi.

Les mathématiques sont souvent présentées comme le langage de la science quantitative : pour faire des mathématiques on doit compter et donc utiliser des nombres. Or, comme vous le savez, les mathématiciens manipulent beaucoup d'autres objets : des formes et des figures géométriques, des structures (motifs, symétries, …), des processus, des algorithmes, …

Classiquement on considère que les mathématiques sont édifiées sur quatre piliers :

— l'algèbre, science des formules et des algorithmes (but : résoudre des équations),

— la géométrie, science des formes et des espaces (but : développer des outils pour concevoir les objets),

— l'analyse, science des inégalités et des limites (but : estimer),

— les probabilités, science des processus aléatoires (but : prévoir en avenir incertain).

En prenant une perspective historique qui atteste de leur persistance, je voudrais montrer que ces quatre piliers sont inséparables parce que liés entre eux par des liens complexes qui s'enrichissent en permanence pour déboucher sur la présentation de quelques notions qui sont apparues récemment.

Je voudrais témoigner ainsi :

— de la vigueur des mathématiques, science toujours en chantier ;

— de leur diversité : elles créent en permanence des concepts, sous une double influence, interne et externe (elles sont influencées par d'autres sciences et la technologie) ;

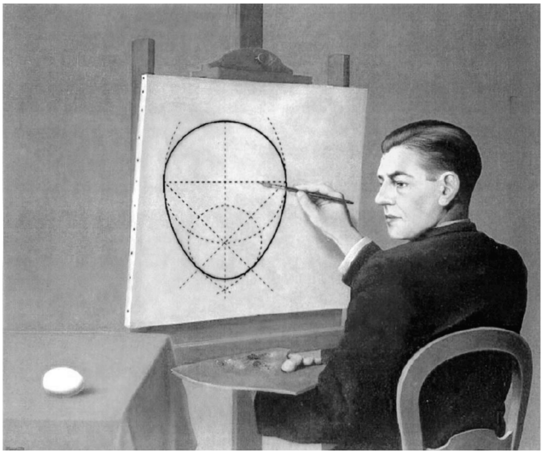
— mais aussi de leur unité dynamique.

Le célèbre tableau de René MAGRITTE, La clairvoyance (1936), servira de métaphore pour illustrer mon propos.

(*) CNRS-IHÉS, École polytechnique. ijpb@ihes.fr ; Institut des Hautes Études Scientifiques, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur- Yvette I.

La clairvoyance (1936) © Photothèque René Magritte/Adagp, Paris 2009.

I. Comprendre l'espace grâce à la géométrie



La clairvoyance (1936), modifiée 2008.

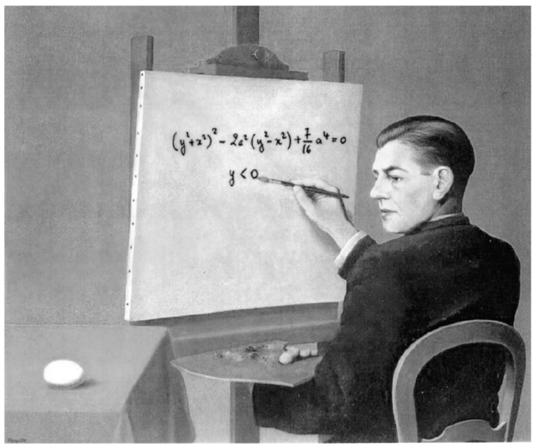
Selon Platon, on peut construire un système du monde qui associe philosophie et science. Dans sa Physique, Aristote utilise beaucoup de modèles géométriques dans lesquels la sphère joue un rôle essentiel pour comprendre ce qui se passe dans le ciel. Cela soulève la question de la relation avec ce qui se passe sur la Terre.

Pour expliquer le mouvement des planètes (littéralement des « corps errants »), les Grecs combinent ingénieusement deux mouvements sphériques : pour Descartes, c'est la « musique des sphères » qui produit l'harmonie. Ces conceptions sont un encouragement puissant à développer la géométrie.

Les Éléments d'Euclide (probablement le livre non religieux dont l'influence dans l'Histoire de l'Humanité aura été la plus longue) donnent un modèle pour l'espace et une méthode pour l'analyser et le comprendre : partant de points, de droites et de plans, Euclide construit des objets plus élaborés, comme les coniques. En même temps il établit la méthode axiomatique, et le rôle de la démonstration. Mais pour Euclide, nombres et figures sont deux domaines séparés.

Quelques siècles plus tard, une véritable révolution est due à René DESCARTES, qui affirme que chaque figure géométrique peut être représentée par des nombres. C'est la naissance de la géométrie analytique, véritable acte de violence selon Hermann WEYL.

Conséquence pour les modèles mathématiques : on dispose pour les courbes de beaucoup plus de possibilités car elles peuvent être représentées par des équations algébriques de n'importe quel degré, pas seulement de degré 2 comme c'est le cas des coniques. Par exemple la lemniscate de Bernoulli est une courbe de degré 4, tout comme l'œuf cher à Magritte !



La clairvoyance (1936), modifiée 2008.

Avec COPERNIC, la Terre n'est plus au centre de l'univers mais tourne autour du Soleil. Mais un cadre théorique manque encore pour calculer les trajectoires des planètes.

Trois contributions majeures permettront de l'édifier :
— celle de GALILÉE, qui écrit dans Il Saggiatore : « *La filosqfia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si puo intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali merzi è impossibile a intenderne umanamente parola ; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto* »[1] ;

(1) *La physique est écrite dans cet immense livre qui continuellement se tient ouvert devant nos yeux (je veux dire l'univers), mais elle ne peut se comprendre si on ne s'exerce d'abord à comprendre la langue et à connaître les caractères avec lesquels elle est écrite. Elle est écrite en langue mathématique, et les caractères sont les triangles, les cercles et autres figures géométriques, sans lesquelles il est humainement impossible d'en comprendre le moindre mot, sans lesquelles on s'égare vainement dans un labyrinthe obscur.*

— celle de KEPLER, dont les trois lois gouvernent le mouvement des planètes :

* les planètes se meuvent autour du Soleil en parcourant des ellipses dont un des foyers est occupé par le Soleil ;
* le segment joignant le Soleil et la planète balaie des aires égales dans des temps égaux ;
* il y a une relation algébrique entre le diamètre de l'ellipse et la distance au Soleil ;

— celle de NEWTON, basée sur une dimension complètement nouvelle des mathématiques, à savoir l'introduction du calcul différentiel.

Le succès du calcul différentiel a permis de développer une nouvelle géométrie différentielle, dont un des contributeurs essentiels a été Carl Friedrich GAUSS. Dans son ouvrage décisif, Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas(2) paru en 1878, il introduit la notion fondamentale de courbure intrinsèque d'un espace. Sa motivation principale vient de l'étude de la géodésie.

Tout au long du XVIIIe siècle, la mécanique céleste a connu un grand succès grâce à la théorie des perturbations. La complexité croissante des calculs a exigé de nouveaux outils : la mécanique analytique de LAGRANGE est une étape majeure.

Dans un mémoire paru en 1808, une autre étape radicalement nouvelle a été franchie par LAGRANGE puisqu'il propose de travailler dans un espace complètement abstrait, l'espace des mouvements elliptiques : une première historique.

Le processus visant à comprendre l'espace en élargissant les concepts géométriques a continué ensuite grâce aux contributions de beaucoup de mathématiciens et de physiciens :

Bemhard RIEMANN, en 1854, faisant une synthèse entre LAGRANGE et GAUSS, généralise de façon considérable la notion de métrique dans un espace :

* pour lui, une métrique est un produit scalaire sur les vecteurs tangents en chaque point : $g = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$;
* la déviation par rapport à la géométrie euclidienne est mesurée par un objet complexe : le tenseur de courbure R_{ijkl} ;
* il était inspiré par la recherche d'un modèle pour la théorie physique de l'Éther.

Son mémoire « *Über die Hypothesen, welche der Geométrie zu Grunde liegen* »(3) a été publié après sa mort en 1868.

Albert EINSTEIN, en 1905, a proposé que l'espace ne soit pas séparé du temps. C'est un des points de base de sa théorie de la relativité restreinte. Ceci a exigé de travailler dans une nouvelle géométrie, différente de la géométrie euclidienne, identifiée par Henri POINCARÉ et Hermann MINKOWSKI.

En 1915, EINSTEIN a franchi une étape de plus grâce à sa théorie de la relativité générale. Cela a été une stimulation forte pour la géométrie introduite par RIEMANN, car cela fait jouer un rôle central à la courbure (via un de ses avatars : la courbure de Ricci R_{ik}).

(2) *Recherches générales sur les surfaces courbes.*

(3) *À propos des hypothèses sur lesquelles repose la géométrie.*

Le processus de comprendre l'espace en élargissant les concepts géométriques a continué ensuite grâce aux contributions de beaucoup de mathématiciens et de physiciens : RIEMANN, EINSTEIN, POINCARÉ, MINKOWSKI, CONNES, …

En 1985, Alain CONNES affichait un programme ambitieux, inspiré par la physique quantique : il proposait de construire étape par étape un nouveau corps de connaissances, qu'il a appelé la géométrie non-commutative. Pour atteindre son but, il part de la théorie de la mesure, mais il a besoin d'aller plus loin. Il y parvient remarquablement en créant plusieurs concepts comme la cohomologie cyclique, les K-cycles, …

Le domaine est en pleine ébullition à cause des travaux d'Alain CONNES mais aussi maintenant de ceux de plusieurs centaines de chercheurs de par le monde. La géométrie non commutative permet de considérer sur un pied d'égalité des objets discrets et des objets continus, et fournit de très intéressants modèles pour la physique.

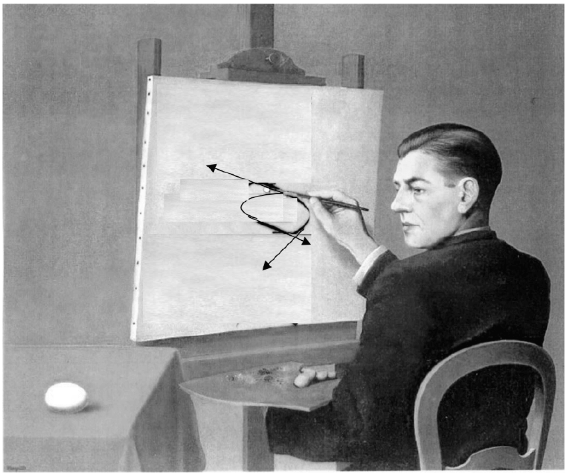
Quelques citations de sa Leçon inaugurale au Collège de France :

« *En fait, le passage de la mesure des distances en géométrie riemannienne à la mesure des distances en géométrie non-commutative est l'exact reflet de l'évolution de la définition du mètre dans le système métrique (1960).* »

« *La mesure des distances utilise les algèbres d'opérateurs. On obtient ainsi une notion d'espace géométrique de nature spectrale, d'une très grande flexibilité. La géométrie non-commutative traite à la fois d'espaces de dimension non entière, d'espaces de dimension infinie, et surtout d'espaces de nature “ quantique ”, et enfin de l'espace-temps lui-même si l'on prend en compte non seulement la force électromagnétique mais aussi les forces faibles et fortes qui conduisent à un modèle non commutatif de l'espace-temps.* »

Grâce aux nouveaux points de vue, de nouvelles perspectives ont pu être gagnées par exemple sur la distribution des zéros de la fonction ζ de RIEMANN, …

II. Le continu et le discret (la saga de l'analyse)



La clairvoyance (1936), modifiée 2008.

En 1687 paraît l'œuvre majeure de NEWTON : Philosophiae Naturalis Principia Matematica[4].

Le livre contient trois contributions majeures au développement des sciences :
— le calcul infinitésimal, qui est fondé sur la clarification du concept de limite, notamment la notion de vitesse instantanée, ce qui conduit à la création d'une nouvelle branche des mathématiques, l'analyse ;
— la loi fondamentale de la dynamique ;
— la loi de l'interaction gravitationnelle.

NEWTON établit que les trajectoires (elliptiques) des planètes sont solutions de l'équation différentielle $m\frac{d^2x}{dt^2} = F$.
Il retrouve les lois de KEPLER de façon déductive grâce à la forme de la loi fondamentale de la dynamique, et grâce à la forme qu'il propose pour l'interaction gravitationnelle.

Depuis lors, l'analyse s'est développée en une des branches majeures des mathématiques. Le développement du calcul différentiel à plusieurs variables a conduit à la théorie des équations aux dérivés partielles qui sont essentielles pour l'étude des problèmes d'évolution dans les sciences de la nature, comme les équations de la chaleur et des ondes, et l'étude de questions internes aux mathématiques, par exemple en géométrie et en théorie des nombres.

L'équation différentielle la plus simple est celle qui dit que la dérivée d'une fonction inconnue est une fonction connue : $\frac{dx}{dt} = f$.
Quand on résout une telle équation, on dit qu'on l'intègre, d'où le nom de calcul intégral donné à l'étude des primitives d'une fonction. Le calcul intégral, initié par LEIBNIZ, a été développé par RIEMANN. Au XXème siècle, l'analyse a continué son développement, avec des avancées décisives dans l'étude du calcul intégral par Henri LEBESGUE.

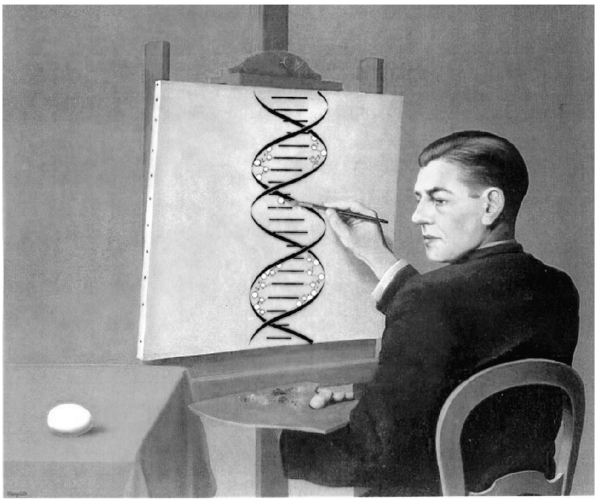
A aussi émergé une théorie générale des équations aux dérivées partielles linéaires. Cela a été rendu possible grâce à un nouveau concept : celui de solution faible, anticipé par certains physiciens. Une étape essentielle de ce point de vue a été franchie par Laurent SCHWARTZ, qui, grâce à sa théorie des distributions, a fourni un réservoir général pour les solutions faibles.
La stimulation par l'Informatique demande de nouvelles combinaisons de savoir-faire et donne plus d'importance à des champs classiques comme la combinatoire, les algorithmes, la logique, …

D'où l'émergence d'une nouvelle génération de mathématiciens comme :
— Terence TAO, qui a remarquablement contribué à beaucoup de domaines mathématiques, de l'analyse à la théorie des nombres, à partir d'idées combinatoires ;
— Sergei BRIN et Larry PAGE, les fondateurs de Google. Leur succès initial est dû

(4) *Principes mathématiques de la philosophie naturelle.*

au puissant moteur de recherche et d'indexation PageRank, qui a pour objet de déterminer le rang d'une page sur la toile pour un moteur de recherche. Il est fondé sur des marches aléatoires comme procédé de sommation géométrique ;
— Fan CHUNG : elle a généralisé le concept à la base de PageRank à des marches aléatoires qui satisfont l'équation de la chaleur sur un graphe. Cela permet de généraliser au cadre discret des résultats obtenus dans le cadre continu. On en déduit des algorithmes de partition rapide d'un graphe. Ceci est relié à une constante qui, dans le cas continu, est une borne inférieure du niveau minimum d'énergie.

III. Contrôler l'aléatoire (l'âge d'or des probabilités et des statistiques)



La clairvoyance (1936), modifiée 2008.

Tous les objets mathématiques considérés jusque là sont déterministes. D'autres approches ont été développées plus récemment et ont donné naissance à de nouvelles branches des mathématiques : l'approche statistique, l'approche stochastique. La théorie des probabilités a mis longtemps pour émerger comme théorie scientifique. Elle était initialement stimulée par les considérations reliées à des questions sociales, comme la démographie, l'évaluation du risque d'accidents par les compagnies d'assurance. Cela supposait d'utiliser des données statistiques.

La théorie a eu nombre de précurseurs, mais Andrei N. KOLMOGOROV est certainement celui qui a donné la forme finale aux fondements. Le modèle aléatoire le plus simple est le mouvement brownien, obtenu à la limite en lançant une pièce non biaisée et en avançant de cette façon à chaque étape. Le concept vient du naturaliste Robert BROWN, qui, en 1823, a observé comment le pollen se déplace à la surface d'un liquide.

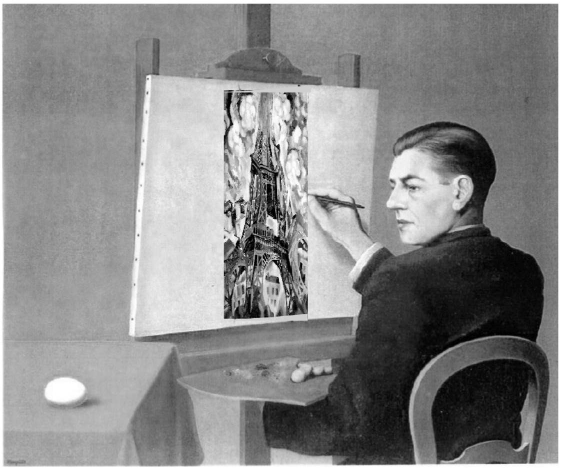
Les premières théories sont dues, à l'aube du XX^{e} siècle, à Louis BACHELIER et peu après à Albert EINSTEIN dans un de ses papiers fameux de 1905. Le graphe de la variation des prix du marché montre qu'il faut considérer des objets très irréguliers. Le tour de force a été de développer des outils permettant de calculer des espérances, et contrôler l'évolution de processus browniens ou même de processus plus complexes. Cela a été rendu possible grâce aux contributions ultérieures importantes de Paul LÉVY et Kiyoshi ITÔ. On doit à Kiyoshi ITÔ la définition d'une intégrale qui permet d'étendre le calcul intégral à des fonctions aléatoires.

En prenant la discussion classique en finance, un modèle pour le prix S d'une action en fonction du temps serait $(S_t)^{-1}\, dS_i = \mu\, dt + v\, dW_t$, où μ représente le taux instantané de retour sur un bien sans risque, v la volatilité de l'action, et dW_t la variation infinitésimale du mouvement brownien dans l'intervalle dt. Le problème est de donner un sens à dW_t car les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas dérivables ! ITÔ s'en sort par un procédé d'approximation. L'intégrale classique de RIEMANN s'obtient par un procédé de limite (on définit d'abord l'intégrale des fonctions en escalier comme l'aire sous le graphe de la fonction ; on approxime ensuite la fonction à intégrer par des fonctions en escalier). Dans l'intégrale d'ITÔ on utilise comme briques élémentaires les processus simples, i.e. les fonctions en escalier aléatoires. Les deux propriétés cruciales pour une fonction en escalier aléatoire a_t sont :

— $E(I(a_s\, dW_s)) = 0$, où E désigne l'espérance mathématique et I l'intégrale d'ITÔ ;

— l'espérance du carré est donnée par l'intégrale classique du carré de la fonction en escalier aléatoire.

IV. L'unité dynamique des mathématiques



La clairvoyance (1936), modifiée 2008.

Le développement des mathématiques, continu tout au long de l'Histoire, mais particulièrement accéléré au XX^{e} siècle, a conduit à la naissance de nouvelles branches des mathématiques et à de nouvelles interactions :

— avec l'avènement de l'informatique, une nouvelle insistance sur l'étude des structures discrètes ;
— les interfaces avec la biologie, la médecine, l'économie exigent une interaction forte avec les statistiques.

Les mathématiciens se préoccupent de l'unité de leur discipline, mais cela doit être compris comme un processus dynamique qui permet une réorganisation interne permanente. Beaucoup de sujets actuels supposent la collaboration de branches différentes pour fusionner des points de vue. Pour comprendre par exemple les derniers développements de la physique théorique d'un point de vue mathématique, le point de vue stochastique est central mais on doit combiner aussi les points de vue algébrique, analytique et géométrique.

Cela pose la question de la nature des mathématiques :
— elles sont une science et pas seulement un langage ; on peut se risquer à dire que c'est la science des structures ;
— d'une façon plus philosophique, les découvre-t-on ou les invente-t-on ?

Par la présence des portraits, j'ai voulu souligner l'aspect « aventure humaine » en citant des figures hors du commun ; dans le stade de développement qu'elles ont atteint aujourd'hui, elles ne peuvent se passer d'un beaucoup plus grand nombre de contributeurs.

Pour terminer je voudrais encore souligner trois points :
— l'avènement d'une société de l'information exige la manipulation de grandes quantités de données abstraites ;
— les débouchés offerts par une formation en mathématiques se sont considérablement élargis ;
— les besoins de connaissances de base en mathématiques par les citoyens sont beaucoup plus importants, et l'accès aux quatre piliers est une référence.