Exercices de-ci, de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par Mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Jean Fromentin, 17 rue de la Roussille, 79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique en joignant, si vous le pouvez, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Serge Parpay, aux collègues qui ont animé cette rubrique :

Cher(e)s collègues
Voilà ma dernière contribution aux « Exercices de-ci, de-là ». Un grand merci à tous les collègues qui ont proposé exercices et solutions et qui m'ont témoigné leur sympathie par leur courrier. La rubrique leur doit pratiquement tout. J'ai fait de mon mieux ; qu'ils me pardonnent quelques erreurs ou oublis.
Bien cordialement.

S. Parpay

Exercices

Exercice 482-1

Ce premier exercice provient d'archives que possédait Henri Bareil. Il est issu de la revue mensuelle de variétés scientifiques *Le Facteur X*, nº 68 de février 1961. Cette revue, à laquelle Gilbert Walusinski prêtait sa plume, proposait des « problèmes à chercher (un peu) tout seul ». En voici donc un, modeste, dont le caractère un tant soit peu désuet à l'ère de l'euro, ne doit pas dissuader d'un traitement moderne. Au contraire !
Reprenant la rubrique, je souhaitais rendre hommage à ces deux piliers, modestes et modernes, qui ont été et demeurent l'âme de l'association.

Bruno Alaplantive

Avec 6 Nouveaux Francs exactement, Yves a acheté des cartes A à 45 francs, des cartes B à 40 francs et des cartes C à 30 francs. Le nombre des cartes A est supérieur à celui des cartes B et à celui des cartes C.

Combien Yves a-t-il acheté de cartes de chaque sorte ?
N.B – Il faut compter, au moins, deux cartes B et deux cartes C.

(rappel pour les moins de cinquante ans : 1 Nouveau Franc = 100 francs).

Exercice 482-2 (Georges Lion – Wallis)

- Soit x, y et z, trois entiers premiers > 3. Montrer que $x^2 + y^2 + z^2$ n'est pas premier.
- Soit m et n deux entiers. Montrer que si $m^4 + 4n^4$ est distinct de 5 alors ce nombre n'est pas premier *(résultat dû à Sophie Germain)*.

Exercice 482-3 (proposé par la Régionale de Toulouse)

« La somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales. »
Établir ce résultat et proposer un puzzle.

Exercice 482-4 (Jean Théocliste – Valence)

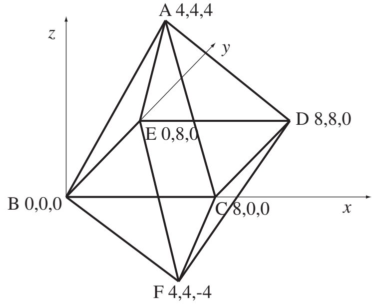
Calculer $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)\, dx$ et $\mathrm{J} = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x}\, dx$.

Solutions

Exercice 479-1. (Pierre Renfer – Ostwald)

À l'occasion de mon cinquante-neuvième anniversaire, j'ai trouvé sans démonstration, dans l'excellent livre « Les nombres remarquables » de François Le Lyonnais », que 59 était le nombre de régions découpées dans l'espace par les plans des faces d'un octaèdre régulier.
Comment le prouver ?

Nous avons donné la solution de l'auteur dans le Bulletin n° 481. Une nouvelle solution nous a été transmise depuis par Michel Lafond, avec, en complément, un traitement informatique sous Maple. Voici cette solution.



Il s'agit de **prouver** que le nombre de régions déterminées dans $\mathbb{R}^3$ par les faces d'un octaèdre régulier est bien **59.**
Prenons comme repère (Bx, By, Bz) et comme coordonnées celles du schéma ci-contre.
Le choix du nombre 8 est dicté par une contrainte informatique (voir ci-dessous).
L'octaèdre est (ABCDEF). Il est obtenu à partir de l'octaèdre régulier par une affinité, ce qui ne change pas le nombre de régions.
Les équations des plans des 8 faces sont :
$x - z = 0$ pour ABE.
$x + z = 0$ pour FBE.

$y + z = 0$ pour FBC.
$y - z = 0$ pour ABC.
$x - z - 8 = 0$ pour FCD.
$x + z - 8 =$ pour ACD.
$y - z - 8 = 0$ pour ADE.
$y + z - 8 = 0$ pour FDE.

On sait qu'un plan d'équation $S(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$ partage l'espace en deux demi-espaces E^+, E^- et que dans E^+ on a $S(x, y, z) > 0$ et dans E^- on a $S(x, y, z) < 0$.
Une région est donc parfaitement définie par les 8 signes + ou − des 8 expressions $S(x, y, z)$ figurant dans les membres de gauche des 8 équations des 8 faces.
Ainsi, en adoptant l'ordre ci-dessus, le centre (4, 4, 0) sera codé par l'octuplet [+, +, +, +, −, −, −, −].
Compter les régions revient à compter les octuplets ce qui peut se faire par balayage :

Le programme ci-dessous balaye avec un pas de 1 le pavé $P = [-10 ; 18] \times [-10 ; 18] \times [-14 ; 14]$ contenant largement l'octaèdre **pour être sûr de passer par toutes les régions**.
Pour chacun des $29^3 = 24\,389$ points x, y, z, il comptabilise les nouveaux octuplets de signes + ou − rencontrés, mais uniquement ceux qui n'ont pas de 0 sinon le point se trouverait sur le bord. Ainsi le point (9, 0, 1) codé [+, +, +, −, 0, +, −, −] est ignoré car il est dans le plan FCD.
Les coordonnées étant toujours entières, il n'y a pas d'erreur d'arrondi, d'où le choix de 8 plus haut.
Le programme sort bien 59. CQFD ?

Cet énoncé est très intéressant, car l'usage de l'informatique pose un problème de taille.
En maths pures, il y a bien des occasions de commettre des erreurs de raisonnement, mais si on y ajoute l'informatique on multiplie les risques au moins par 2.
Ici, pour avoir une rigueur maximale, il faudrait prouver (mathématiquement) que le pavé P contient bien au moins un point à coordonnées entières dans chaque région.
Devant un tel problème, je pense qu'on peut faire autant confiance au résultat d'un programme qu'à un raisonnement traditionnel qui fera nécessairement appel à une bonne vision dans l'espace.

Le programme ci-dessous est en MAPLE, mais n'importe quelle calculette évoluée fait l'affaire.
Nombre de régions déterminées par les faces d'un octaèdre régulier.

```
e:={ }: h:=10:
for x from -h to 8+h do
for y from -h to 8+h do
for z from -4-h to 4+h do c:=NULL:
 w:=0: if x-z>0 then w:=1:fi: if x-z<0 then w:=-1:fi: if w<>0 then c:=c,w else next: fi:
 w:=0: if x+z>0 then w:=1:fi: if x+z<0 then w:=-1:fi: if w<>0 then c:=c,w else next: fi:
 w:=0: if y+z>0 then w:=1:fi: if y+z<0 then w:=-1:fi: if w<>0 then c:=c,w else next: fi:
```

```
w:=0: if y-z>0 then w:=1:fi: if y-z<0 then w:=-1:fi: if w<>0 then c:=c,w else next: fi:
w:=0: if x-z-8>0 then w:=1:fi: if x-z-8<0 then w:=-1:fi: if w<>0 then c:=c,w else next: fi:
w:=0: if x+z-8>0 then w:=1:fi: if x+z-8<0 then w:=-1:fi: if w<>0 then c:=c,w else next: fi:
w:=0: if y+z-8>0 then w:=1:fi: if y+z-8<0 then w:=-1:fi: if w<>0 then c:=c,w else next: fi:
w:=0: if y-z-8>0 then w:=1:fi: if y-z-8<0 then w:=-1:fi: if w<>0 then c:=c,w else next: fi:
e:= e union {[c]}:
od:od:od:
print (nops(e)):
```

5 9

Exercice 479-2 (Jean Théocliste – Valence)

On considère l'équation

$$9x^4 - 14x^2 + 8x - 1 = 0 \qquad \text{(E)}$$

1) Dénombrer les racines réelles de (E).
2) Avec une calculatrice, déterminer des valeurs approchées de ces racines réelles.
3) Déterminer les valeurs exactes de ces racines.

Solution de Bernard Collignon (Coursan)

On considère l'équation :

$$9x^4 - 14x^2 + 8x - 1 = 0 \qquad \text{(E)}$$

1) ***Dénombrer les racines réelles de (E).***

Étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 9x^4 - 14x^2 + 8x - 1$.
Pour tout x réel : $f'(x) = 36x^3 - 28x + 8 = 4(x+1)(3x-2)(3x-1)$.

x	$-\infty$		-1		$1/3$		$2/3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-14	↗	$2/9$	↘	$-1/9$	↗	$+\infty$

D'après le tableau de variation, la fonction f s'annule quatre fois sur $\mathbb{R}$.

2) ***Avec une calculatrice, déterminer des valeurs approchées de ces racines.***

La fonction f s'annule :
a) une fois sur $]-\infty\,;-1]$ pour le réel α tel que : $\alpha \approx -1{,}484\,794\,907\,73$.
b) une fois sur $]-1\,;1/3]$ pour le réel β tel que : $\beta \approx 0{,}181\,316\,543\,163$.
c) une fois sur $]1/3\,;2/3]$ pour le réel γ tel que : $\gamma \approx 0{,}541\,985\,866\,151$.
d) une fois sur $]2/3\,;+\infty[$ pour le réel δ tel que : $\delta \approx 0{,}761\,492\,498\,419$.

3) ***Déterminer les valeurs exactes de ces racines.***

Le polynôme $P(x) = 9x^4 - 14x^2 + 8x - 1$ possède quatre racines réelles distinctes et non opposées.
On peut le factoriser sous la forme : $P(x) = (3x^2 + ax + b)(3x^2 + cx + d)$.
On est sûr que $a \neq 0$ et $c \neq 0$, sinon deux des racines seraient opposées et on peut supposer $a > 0$ pour la suite.

On doit avoir :

$$9x^4 + 3(a+c)x^3 + (3b+3d+ac)x^2 + (ad+bc)x + bd = 9x^4 - 14x^2 + 8x - 1.$$

D'où par identification :

$$\begin{cases} a+c=0 \\ 3(b+d)+ac=-14 \\ ad+bc=8 \\ bd=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a \\ b+d=(a^2-14)/3 \\ b-d=-8/a \\ bd=-1 \end{cases}$$

D'où (lignes 2 et 3) :

$$b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a^2-\frac{14}{3}-\frac{8}{a}\right)$$

et

$$d=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a^2-\frac{14}{3}+\frac{8}{a}\right).$$

En remplaçant dans la ligne 4 :

$$\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{3}a^2-\frac{14}{3}\right)^2-\left(\frac{8}{a}\right)^2\right)=-1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}a^4-\frac{28}{9}a^2+\frac{196}{9}\right)-\frac{64}{a^2}+4=0.$$

D'où en multipliant par $9a^2$:

$$a^6-28a^4+232a^2-576=0.$$

On pose $X = a^2 > 0$:

$$X^3-28X^2+232X-576=0. \qquad (E')$$

$X = 8$ est solution et l'équation (E′) est équivalente à :

$$(X-8)(X^2-20X+72)=0.$$

Ses solutions sont : $X=a^2=8 \quad \Rightarrow \quad a=2\sqrt{2}\approx 2,828,$

ou $X=a^2=10+2\sqrt{7} \quad \Rightarrow \quad a=\sqrt{10+2\sqrt{7}}\approx 3,910,$

ou $X=a^2=10-2\sqrt{7} \quad \Rightarrow \quad a=\sqrt{10-2\sqrt{7}}\approx 2,170.$

La somme des racines du trinôme $3x^2 + ax + b$ est égale à $-a/3$, donc elle est négative et une des racines est forcément α : on a le choix de regroupement des racines deux à deux pour former le trinôme ; selon le choix la somme sera égale à l'une des trois solutions de l'équation (E′).

Prenons par exemple et pour simplifier les calculs $a=2\sqrt{2}=\sqrt{8}$. Il vient :

$$b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sqrt{8}^2-\frac{14}{3}-\frac{8}{\sqrt{8}}\right)=-1-\sqrt{2}$$

et

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sqrt{8}^2 - \frac{14}{3} + \frac{8}{\sqrt{8}}\right) = \sqrt{2} - 1.$$

D'où :

$$\mathrm{P}(x) = \left(3x^2 + 2\sqrt{2}x - 1 - \sqrt{2}\right)\left(3x^2 - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1\right).$$

D'une part :

$$3x^2 + 2\sqrt{2}x - 1 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{3} \pm \frac{\sqrt{5 + 3\sqrt{2}}}{3}.$$

D'autre part :

$$3x^2 - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{3} \pm \frac{\sqrt{5 + 3\sqrt{2}}}{3}.$$

Bilan : l'ensemble S des solutions de l'équation initiale (E) est celui des racines du polynôme P(x) :

$$\mathrm{S} = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{3} \pm \frac{\sqrt{5 + 3\sqrt{2}}}{3} \; ; \; \frac{\sqrt{2}}{3} \pm \frac{\sqrt{5 + 3\sqrt{2}}}{3} \right\}.$$

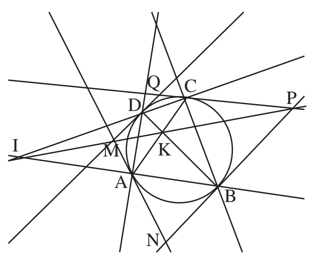
Autres solutions : Jean-Claude Carréga (Lyon), Alain Corre (Moulin), Jean-Pierre Friedelmeyer (Osenbach), Jean Théocliste (Valence).

Exercice 479-3 (Georges Lion - Wallis)

Le quadrilatère convexe ABCD *est inscrit dans un cercle* Γ.
Le quadrilatère convexe MNPQ *est circonscrit à* Γ *et tel que* A ∈ [MN], B ∈ [NP], C ∈ [PQ], D ∈ [QM].
Montrer que les diagonales (AC), (BD), (MP), (NQ) *sont concourantes.*

Solution de Raymond Raynaud (Digne)

Soit I le point commun aux droites AB et CD, J le point commun aux droites AD et BC et K le point commun aux diagonales (AC) et (BD). Par construction la droite (IK) est la polaire de J pour le cercle. La polaire de M et celle de P passent par J. (MP), comme (IK), est la polaire de J. Donc K est sur la diagonale [MP]. De même K est sur la diagonale [NQ].



Les quatre diagonales sont concourantes.

Pierre Renfer (Ostwald) nous fait remarquer que le résultat est encore vrai si l'on remplace le cercle par une conique : on se place dans le cadre du plan projectif.
Soit U le point d'intersection des droites (MN) et (PQ).
Soit V le point d'intersection des droites (NP) et (MQ).
Si l'on choisit la droite (UV) comme droite de l'infini, le quadrilatère (MNPQ) est un parallélogramme dont le centre est le centre O de symétrie de la conique.

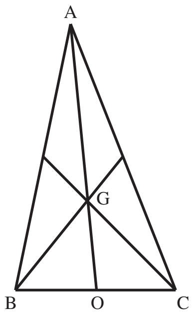
Le point O est aussi centre de symétrie du quadrilatère (ABCD) des points de contact. Les deux quadrilatères sont donc des parallélogrammes dont les diagonales se coupent en O.

Autres solutions : Jean-Claude Carréga (Lyon), Bernard Collignon (Coursan), Alain Corre (Moulins), Jean-Pierre Friedelmeyer (Osenbach), Georges Lion (Wallis).

Exercice 479-4 (Marc Royer – Montélimar)

1) ABC *étant un triangle éventuellement aplati, montrer que les médianes issues de* B *et* C *sont perpendiculaires si et seulement si* $AB^2 + AC^2 = 5\ BC^2$.
2) *Trouver tous les triangles « orthomédians » dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers.*

Solution de Jean-Claude Carréga (Lyon)



1) On note O le milieu de [BC]. Les médianes issues de B et C se coupent en G, centre de gravité du triangle. Ces médianes sont perpendiculaires si et seulement si G est situé sur le cercle de diamètre [BC], ce qui équivaut à OG = OC, c'est-à-dire à

$$OA = 3\ OC = 3/2\ BC.$$

D'autre part on a

$$AB^2 + AC^2 = 2\ OA^2 + BC^2/2.$$

Donc la condition OA = 3/2 BC équivaut à

$$AB^2 + AC^2 = 9/2\ BC^2 + BC^2/2\ ,$$

c'est-à-dire à

$$AB^2 + AC^2 = 5\ BC^2.$$

2) Soient x, y, z des entiers ≥ 1. Ces entiers sont les longueurs des côtés d'un triangle orthomédian ABC si et seulement si

$$|x - y| \leq z \leq x + y \qquad \text{(a)}$$

et

$$x^2 + y^2 = 5z^2. \qquad \text{(b)}$$

La condition (a) s'écrit

$$x^2 + y^2 - 2xy \leq z^2 \leq x^2 + y^2 + 2xy$$

et en utilisant (b)

$$5z^2 - 2xy \leq z^2 \leq 5z^2 + 2xy,$$

soit

$$-2xy \leq 4z^2 \leq 2xy,$$

soit

$$2z^2 \leq xy.$$

Ainsi x, y, z sont les longueurs des côtés d'un triangle ABC si et seulement si

$$2z^2 \leq xy \qquad \text{(a')}$$

et

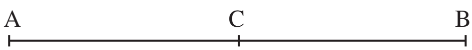
$$x^2 + y^2 = 5z^2. \qquad \text{(b)}$$

Dans l’anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss, la relation (b) s’écrit

$$(x + iy)(x - iy) = (2 + i)(2 - i)\, z^2.$$

On vérifie facilement que l’élément $2 + i$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$. Puisque l’anneau $\mathbb{Z}[i]$ est principal, l’élément $2 + i$ est aussi premier et le théorème de Gauss est valable dans $\mathbb{Z}[i]$. Ainsi l’élément $2 + i$ divise $x + iy$ ou divise $x - iy$.
– Si $2 + i$ divise $x + iy$, alors $(2 - i)(2 + i)$ divise $(2 - i)(x + iy) = (2x + y) + i(2y - x)$, c’est-à-dire 5 divise $(2x + y) + i(2y - x)$, c’est-à-dire que 5 divise $2x + y$ et divise $2y - x$ dans $\mathbb{Z}$.
– Si $2 + i$ divise $x - iy$, alors $(2 - i)(2 + i)$ divise $(2 - i)(x - iy) = (2x - y) - i(2y + x)$, c’est-à-dire 5 divise $2x - y$ et divise $2y + x$ dans $\mathbb{Z}$.
Ce résultat s’obtient à partir du précédent en permutant x et y.
On suppose donc que l’on est dans le cas où 5 divise $2x + y$ et $2y - x$ et on permutera x et y dans le résultat final.

– Si $2y - x < 0$, soit $y < x/2$, alors $x^2 + y^2 < x^2 + x^2/4 = 5/4\, x^2$, d’où par (b) $5z^2 < 5/4\, x^2$, soit $z < x/2$.
On a alors $y + z < x/2 + x/2 = x$, et cela est impossible pour un triangle dont les longueurs des côtés sont x, y, z.
- Si $2y - x = 0$, soit $x = 2y$, alors $5z^2 = x^2 + y^2 = 5y^2$, d’où $z = y$. Ce cas fournit les triangles aplatis ABC avec AB = 2AC et BC = AC.



Pour de tels triangles considérés comme limites de triangles voisins, la médiane issue de B est (AB) et la médiane issue de C est la perpendiculaire en C à (AB).

Pour la suite, on peut donc supposer que $2x + y$ et $2y - x$ sont des entiers ≥ 1 et divisibles par 5. Il existe donc des entiers a et $b \geq 1$ et vérifiant $2x + y = 5a$ et $2y - x = 5b$. La résolution de ce système donne $x = 2a - b$ et $y = 2b + a$.
En exprimant que $x^2 + y^2 = 5z^2$, on obtient que $a^2 + b^2 = z^2$. On est ainsi ramené à l’équation classique dont les solutions entières ≥ 1 sont données par :

$$a = d(u^2 - v^2),\ \mathrm{b} = 2duv\ ,\ \mathrm{z} = d(u^2 + v^2)$$

avec d, u, v entiers ≥ 1, u et v premiers entre eux et $u \geq v$. Ainsi que les solutions obtenues en permutant a et b.

En revenant à x et y donnés par $x = 2a - b$ et $y = 2b + a$, on obtient une double infinité de solutions, en tenant compte de la permutation de a et b.
S_1 : $x = 2d(u^2 - v^2 - uv)$, $y = d(4uv + u^2 - v^2)$, $z = d(u^2 + v^2)$.
S_2 : $x = d(4uv - u^2 + v^2)$, $y = 2d(u^2 - v^2 + uv)$, $z = d(u^2 + v^2)$
où les entiers d, u, v vérifient les conditions données précédemment.
Réciproquement, il nous faut vérifier que les solutions trouvées satisfont aux conditions (a′) et (b).
Concernant la condition (b), on vérifie que les triplets (x, y, z) donnés par S_1 et S_2 satisfont à $x^2 + y^2 = 5z^2$. Vérifions cela par exemple pour les triplets de S_1.

$$x^2+y^2 = d^2[4(u^2-v^2-uv)^2+(4uv+u^2+v^2)^2]$$
$$= d^2[4(u^2-v^2)^2+4u^2v^2-8uv(u^2-v^2)+16u^2v^2+(u^2-v^2)^2+8uv(u^2-v^2)]$$
$$= d^2[5(u^2-v^2)^2+20u^2v^2] = 5d^2[(u^2-v^2)^2+4u^2v^2] = 5d^2(u^2+v^2)^2 = 5z^2.$$

La condition

$$2z^2 \leq xy \qquad (a')$$

s'écrit, pour $x = 2a - b$, $y = 2b + a$, $z^2 = a^2 + b^2$,

$$2(a^2 + b^2) \leq (2a - b)(2b + a),$$
$$2(a^2 + b^2) \leq 4ab - 2b^2 + 2a^2 - ab,$$

soit $4b^2 \leq 3ab$, soit $b \leq 3/4\ a$.

– Pour les triplets (x, y, z) de S_1, la condition $b \leq 3/4\ a$ se traduit par

$$2duv \leq 3/4\ d(u^2 - v^2),$$

soit $u^2 - v^2 \geq 8/3\ uv$, $u^2 - 8/3\ uv - v^2 \geq 0$, $(u - 4/3\ v)^2 \geq 16/9\ v^2 + v^2$, $(u - 4/3\ v)^2 \geq 25/9\ v^2$, soit $|u - 4/3\ v| \geq 5/3\ v$.
Si $u \geq 4/3\ v$, l'inégalité s'écrit $u - 4/3\ v \geq 5/3$ v, soit $u \geq 3\ v$.
Si $u \leq 4/3\ v$, l'inégalité s'écrit $4/3\ v - u > 5/3\ v$, soit $u \leq -1/3\ v$, qui est impossible.
Ainsi, pour les triplets de S_1 la condition (a′) s'écrit $u \geq 3\ v$.

– Pour les triplets (x, y, z) de S_2, la condition $b \leq 3/4\ a$ se traduit par

$$d(u^2 - v^2) \leq 3/4\ (2duv),$$

soit $u^2 - 3/2\ uv - v^2 \leq 0$, $(u - 3/4\ v)^2$ - $9/16\ v^2 - v^2 \leq 0$, $(u - 3/4\ v)^2 \leq 25/16\ v^2$, soit $|u$ - $3/4v| \leq 5/4\ v$. Puisque $u \geq$ v, l'inégalité s'écrit u - $3/4\ v \leq 5/4\ v$, soit $u \leq 2v$. Ainsi, pour les triplets de S_2, la condition (a′) s'écrit $u \leq 2v$.

Conclusion : Les triangles orthomédians dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers sont :
1) Les triangles aplatis ABC, avec AB = 2AC et BC = AC où AC est un entier ≥ 1 quelconque.
2) Les triangles ABC dont les longueurs des côtés x = AB, y = AC, z = BC sont donnés à partir des entiers d, u, $v \geq 1$, avec u et v premiers entre eux par :
– Pour $u \geq 3\ v$, $x = 2d(u^2 - v^2 - uv)$, $y = d(4uv + u^2 - v^2)$, $z = d(u^2 + v^2)$.
– Pour $v \leq u \leq 2v$, $x = d(4uv - u^2 +$ v2$)$, $y = 2d(u^2 -$ v2 $+ uv)$, $z = d(u^2 +$ v2$)$.
3) Les triangles obtenus, à partir des triangles cités en 1) et 2), en permutant B et C, c'est-à-dire, en permutant x et y.

Autres solutions : Bernard Collignon (Coursan), Alain Corre (Moulins), Marc Royer (Montélimar).