Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer par courrier à

Max HOCHART
65, rue Blatin
63 000 CLERMONT-FERRAND

ou par courriel à

hochartmax@yahoo.fr.

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 482-1 (question de Michel Lafond)

Un quadrilatère convexe a des côtés de mesure 6, 7, 8 et 11 et une aire de mesure 60. Est-il inscriptible ?

Problème 482-2

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x, y, z \in \mathbb{C}$, simplifier

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x-kz)^{k-1} (y+kz)^{n-k}.$$

Problème 482-3

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{S}(n)$ la somme des chiffres dans l'écriture de n en base 10. Trouver les $k \in \mathbb{N}^*$ tels que la suite $\left(\dfrac{\mathrm{S}(n)}{\mathrm{S}(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit majorée. Des réponses partielles sont bienvenues.

Problème 482-4

Dans le développement asymptotique

$$\sum_{k=1}^{n} k\ln(k) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}n^2\ln(n) - \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n\ln(n) + \frac{1}{12}\ln(n) + \mathrm{O}(1),$$

montrer que le terme d'erreur tend vers $\dfrac{1}{12} - \zeta'(-1)$ où ζ est la fonction de Riemann.

Pour une motivation de cette question, on pourra lire le corrigé du problème 479-8 dans les pages qui suivent.

Solutions des problèmes antérieurs

Solution du problème 479-8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, G_n est la moyenne géométrique des coefficients binomiaux pour $k \in [[0, n]]$, c'est-à-dire que $G_n = \sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}$. Trouver $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{G_n}\right)$.

(A) Une première solution - Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit $P_n = \left(G_n\right)^{n+1}$, soit

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 1} = \frac{\prod_{k=1}^{n} \prod_{j=n-k+1}^{n} j}{\prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} j}.$$

On inverse l'ordre des produits :

$$P_n = \frac{\prod_{j=1}^{n} \prod_{k=n-j+1}^{n} j}{\prod_{j=1}^{n} \prod_{k=j}^{n} j} = \frac{\prod_{j=1}^{n} j^j}{\prod_{j=1}^{n} j^{n-j+1}} = \prod_{j=1}^{n} j^{2j-n-1}.$$

Ainsi,

$$\ln\left(P_n\right) = 2\sum_{j=1}^{n} j\ln(j) - (n+1)\sum_{j=1}^{n} \ln(j).$$

Or $G_n = \sqrt[n+1]{P_n}$, donc $\ln\left(\sqrt[n]{G_n}\right) = \dfrac{1}{n(n+1)}\ln\left(P_n\right)$ et

$$\ln\left(\sqrt[n]{G_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}\left(2\sum_{j=1}^{n} j\ln(j) - (n+1)\sum_{j=1}^{n} \ln(j)\right). \tag{1}$$

On fait apparaître une somme de Riemann dans la première somme

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j\ln(j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n}\ln\left(\frac{j}{n}\right) + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j\ln(n).$$

Par continuité de $x \mapsto x \ln x$ sur $[0,1]$,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n}\ln\left(\frac{j}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{4} + o(1) \tag{2}$$

tandis que

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j\ln(n) = \frac{n(n+1)}{2n^2}\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\ln(n) + o(1) \tag{3}$$

Par une comparaison entre série et intégrale (ou la formule de Stirling),

$$\sum_{j=1}^{n} \ln(j) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + o(n)$$

donc

$$-\frac{n+1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} \ln(j) \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(n) + 1 + o(1). \qquad (4)$$

En reportant les développements (2), (3) et (4) dans l'équivalent (1), on obtient

$$\ln\left(\sqrt[n]{G_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 2\left(\frac{1}{2}\ln(n) - \frac{1}{4}\right) - \ln(n) + 1 + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2} + o(1).$$

La limite cherchée est donc $\sqrt{e}$.

(B) Solution de Robert Ferréol - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque que

$$G_n = \sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}} = \sqrt[n+1]{\frac{(n!)^{n+1}}{(1!2!\ldots n!)^2}} = \frac{n!}{u_n^{\frac{2}{n+1}}} \text{ où } u_n = \prod_{k=1}^{n} k!. \qquad (5)$$

En admettant(1) l'existence d'un développement asymptotique de $\ln(u_n)$ de la forme

$$\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} an^2\ln(n) + bn^2 + cn\ln(n) + dn + o(n) \qquad (6)$$

et en injectant ce développement dans $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) = \ln(n!)$, on trouve, en utilisant la formule de Stirling,

$$2an\ln(n) + (a+2b)n + o(n) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + o(n),$$

soit

$$a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{3}{4}.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{G_n}{G_{n-1}}\right) &= \ln(n) - \frac{2}{n+1}\ln(u_n) + \frac{2}{n}\ln(u_{n-1})\\ &= \ln(n) + \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right)\ln(u_n) + \frac{2}{n}\ln\left(\frac{u_{n-1}}{u_n}\right)\\ &= \ln(n) + \frac{2}{n(n+1)}\ln(u_n) - \frac{2}{n}\ln(n!).\end{aligned}$$

La formule de Stirling et le développement asymptotique de $\ln(u_n)$ donnent alors

(1) Ce point est établi dans les compléments, en fin de texte.

$$\ln\left(\frac{G_n}{G_{n-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2} + o(1).$$

Ainsi, la suite $\left(\ln\left(\frac{G_n}{G_{n-1}}\right)\right)_{n\geq 2}$ converge vers $\frac{1}{2}$ et le lemme de Césaro permet de conclure :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{G_n}\right) = \sqrt{e}.$$

(C) Solution de Thibaud Rahier et Jean Roussel - Cette solution a le mérite de ne pas utiliser la formule de Stirling. Pour $n \geq 1$, on rappelle que $P_n = \prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

La relation $(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$ donne

$$P_{n+1} = \prod_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \prod_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}P_n. \tag{7}$$

Le quotient de cette égalité aux rangs $n-1$ et $n-2$ donne

$$P_n = \frac{(P_{n-1})^2}{P_{n-2}}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \exp\left(1+\varepsilon_{n-1}\right)\frac{(P_{n-1})^2}{P_{n-2}}, \tag{8}$$

où

$$\varepsilon_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$$

En réinjectant la relation (8) au rang $n-1$, on trouve

$$P_n = \exp\left(\left(1+\varepsilon_{n-1}\right) + 2\left(1+\varepsilon_{n-2}\right)\right)\frac{(P_{n-2})^3}{(P_{n-3})^2}.$$

Par récurrence descendante sur $k \in [[1, n-1]]$, on montre que

$$P_n = \exp\left(\left(1+\varepsilon_{n-1}\right) + 2\left(1+\varepsilon_{n-2}\right) + \ldots + k\left(1+\varepsilon_{n-k}\right)\right)\frac{(P_{n-k})^{k+1}}{(P_{n-k-1})^k}.$$

Au rang $k = n-1$, on obtient

$$P_n = \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} k\left(1+\varepsilon_{n-k}\right)\right) = \exp\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\varepsilon_k\right).$$

Ainsi,

$$\sqrt[n]{G_n} = \left(P_n\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} = \exp\left(\frac{n-1}{2(n+1)}\right)\exp\left(\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\varepsilon_k\right).$$

Pour prouver que la limite cherchée est $\sqrt{\mathrm{e}}$, il suffit de montrer que

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\varepsilon_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n^2). \tag{9}$$

Compte tenu de l'équivalent

$$\varepsilon_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n},$$

il existe une constante M > 0 tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|\varepsilon_k| \leq \frac{\mathrm{M}}{k}$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left|(n-k)\varepsilon_k\right| \leq \mathrm{M}n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \mathrm{O}(n\ln(n)),$$

ce qui établit (9) et termine la démonstration.

(D) Autres réponses et compléments

(D1) Jean-Claude LABLANQUIE propose une méthode relativement proche de celle exposée dans la première solution, basée sur une comparaison entre série et intégrale.

(D2) La troisième solution a également été proposée par Pierre RENFER, sous une forme un peu plus courte. Par ailleurs, Pierre RENFER remarque qu'en admettant la convergence de la suite $\left(\frac{\mathrm{G}_{n+1}}{\mathrm{G}_n}\right)_{n\geq 0}$ vers un réel $a > 0$, on peut astucieusement conclure. En effet, si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres réels strictement positifs qui converge vers un réel $a > 0$, le lemme de Césaro appliqué à $\left(\ln(x_{n+1})-\ln(x_n)\right)_{n\geq 1}$ assure la convergence de $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ vers a. L'exemple fréquent est celui de la suite $\left(\frac{n^n}{n!}\right)_{n\geq 1}$ qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}\right) = \mathrm{e}$. Avec la relation (7), on établit alors

$$\frac{\mathrm{G}_{n+1}}{\mathrm{G}_n} = \sqrt[n+2]{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}\,\mathrm{P}_n^{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}} = \sqrt[n+2]{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}\left(\sqrt[n]{\mathrm{G}_n}\right)^{\frac{-n^2}{(n+1)(n+2)}}.$$

Par passage à la limite, on obtient $a = \mathrm{e}\,a^{-1}$ donc $a = \sqrt{\mathrm{e}}$.

(D3) Franck GAUTIER signale l'équivalent $\mathrm{G}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\frac{n}{2}}\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2\pi n}}$, ce qui donne immédiatement la réponse. L'égalité $\ln(\mathrm{P}_n) = 2\sum_{j=1}^{n} j\ln(j) - (n+1)\sum_{j=1}^{n}\ln(j)$ et les développements asymptotiques donnés ci-dessous (D5) permettent de retrouver ce résultat.

(D4) Suite au problème posé, Robert FERRÉOL s'intéresse au comportement quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \prod_{k=1}^{n} k!$, expression qu'il appelle *surfactorielle* de n. Des calculs en Maple le conduisent à proposer l'équivalent

$$\prod_{k=1}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{K}\left(\frac{\sqrt{n}}{\mathrm{e}^{\frac{3}{4}}}\right)^{n^2}\left(\frac{\sqrt{2\pi n}}{\mathrm{e}}\right)^{n} n^{\frac{5}{12}}, \tag{10}$$

où $\mathrm{K} \simeq 2.124\,459\,441$. On revient dans le commentaire suivant sur cet équivalent.

En réalité, la quantité $\mathrm{sf}(n) = \prod_{k=1}^{n} k!$ a été introduite en 1995 par Neil Sloane et Simon Plouff et est appelée *superfactorielle* de n. Elle se note $\mathrm{sf}(n)$.

(D5) On peut obtenir le développement asymptotique de $\ln(u_n)$ (équation (6)) par la formule d'Euler-Maclaurin. On rappelle que $u_n = \prod_{k=1}^{n} k!$ Donc

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\ln(j) = \sum_{j=1}^{n}(n+1-j)\ln(j) = (n+1)\ln(n!) - \sum_{k=1}^{n} k\ln(k). \tag{11}$$

D'après la formule de Stirling,

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right). \tag{12}$$

En posant $f(t) = t\ln(t)$ pour $t > 0$, la formule d'Euler Maclaurin donne pour n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\big(f(n) - f(1)\big) + \frac{1}{12}\big(f'(n) - f'(1)\big) + \frac{1}{6}\int_1^n b_3(\{t\})f'''(t)\,\mathrm{d}t,$$

où $\{t\}$ désigne la partie fractionnaire de t et $b_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$. Tous calculs faits et puisque $t \mapsto b_3(\{t\})$ est bornée sur $\mathbb{R}$,

$$\sum_{k=2}^{n} k\ln(k) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}n^2\ln(n) - \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n\ln(n) + \frac{1}{12}\ln(n) + \mathrm{O}(1). \tag{13}$$

En reportant (12) et (13) dans l'égalité (11), on trouve

$$\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}n^2\ln(n) - \frac{3}{4}n^2 + n\ln(n) + \ln\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\mathrm{e}}\right)n + \frac{5}{12}\ln(n) + \mathrm{O}(1), \quad (14)$$

ce qui donne le développement voulu. D'après Maple, le terme O(1) dans la relation(14) est donné par

$$\frac{1}{2}\ln(2\pi) + \zeta'(-1) + \mathrm{o}(1),$$

ce qui revient à dire que le terme O(1) dans le développement (13) de $\sum_{k=2}^{n} k\ln(k)$ serait

$$\frac{1}{12} - \zeta'(-1) + \mathrm{o}(1).$$

En prenant l'exponentielle dans le développement asymptotique (14), la constante K dans l'équivalent (10) de $\prod_{k=1}^{n} k!$ serait donc $\sqrt{2\pi}\exp(\zeta'(-1)) \simeq 2.124\,459\,441.$