« L’invasion des Uns » dans deux collèges de Midi-Pyrénées

Frédérique Fournier

5536178929302995072800752920334385207329900902397165476388126866522
7260145047887947738470907379726512760892432043403642805735481370757
9028954215800254664230747937773348834634335381719537175441510269611
9139570558660453966672202845595969661739467419587001051873996567569
0638321430548635331893926811714554614405137574046393179427559098710
0703094724021480374245695620882466921330897414604440015501301002048
2862038421081769362785806237225267120633338869512262636328406134086
2536677185406632342357304988097215301998560593478381221281071804240
7130598460942257653767369761390688147040912362287549133587997564081
27110668216796766871505287050877484360294524719038919337873

Une suite de chiffres aléatoire[(1)] ???

Pas exactement…

L’aventure MATh.en.JEANS en quelques lignes

(extraits d’une présentation faite par Vincent et Mattéo élèves de l’atelier à leurs camarades de classe de sixième, Tournefeuille juin 2008)

Début octobre 2007, Xavier Buff, enseignant-chercheur à l’Université Paul Sabatier de Toulouse, est venu nous rencontrer au collège.

Il nous a présenté son métier de chercheur : un chercheur part d’un problème qui l’intéresse et se met à se poser des questions. Il essaie d’y répondre, et parfois passe par d’autres questions avant d’y arriver, demande de l’aide à d’autres chercheurs. Il se peut qu’il n’arrive jamais à répondre complètement à sa question. Il nous a aussi un peu parlé de ses recherches (c’était assez compliqué).

Il nous a dit que notre aventure allait ressembler à cette façon de travailler : il allait nous proposer deux sujets, à nous de nous en « emparer ». Nous étions libres de modifier la question, d’essayer toutes les pistes que nous voulions… Il nous a aussi expliqué que les professeurs étaient là pour nous encadrer, mais ne nous souffleraient pas de réponses, d’abord parce qu’ils ne les avaient pas toutes, et qu’ensuite chacun réfléchissait à sa manière.

Il nous a aussi dit qu’il faudrait nous organiser, échanger nos idées régulièrement d’un groupe à l’autre et surtout penser à noter sur papier ce que nous faisions, parce qu’ensuite, il faudrait être capables d’expliquer aux camarades de Pamiers notre travail

(*) Collège de Tournefeuille (31).

(1) Commentaire des élèves : ce fut souvent la question posée lors du congrès par les visiteurs qui approchaient notre stand. Comment avez-vous construit cette suite de nombres ? Comment obtenez-vous ces nombres ? Personne ne pensait qu’il s’agissait d’un nombre.

et après le faire au congrès devant un public qui n'aurait pas réfléchi à la question. Mais l'aventure n'allait pas s'arrêter au congrès, il a bien insisté : après le congrès, nous devrons écrire un article qui présenterait l'état de nos recherches ; peut-être que nous n'aurions pas de réponse précise au problème posé, mais il faudrait quand même se donner la peine d'écrire cet article : communiquer et transmettre ses résultats, ça fait partie du métier de chercheur, et nous allions être de vrais chercheurs pendant toute cette année.

Nous avons ensuite écouté les deux sujets ; le premier était sur un mélange de cartes, le deuxième sur les nombres.

37 × 3 = 111

12 345 679 × 9 = 111 111 111

et si on essayait avec 2 007 ?

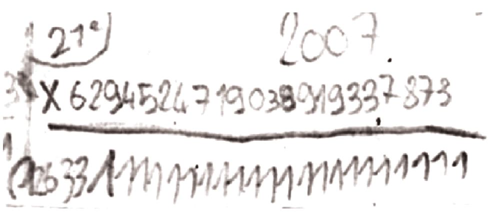
2 007 × ????? = 1 111 111…………

Nous avons choisi celui des nombres, et tout de suite nous nous sommes lancés dans les calculs. Pendant plusieurs semaines nous avons calculé, calculé et calculé ! Lorsque nous avons rencontré les camarades de Pamiers, nous avions trouvé quelques produits qui ne s'écrivaient qu'avec des 1(2) :

$$271 \times 41 = 11\ 111$$
$$11 \times 10\ 101 = 111\ 111$$
$$73 \times 152\ 207 = 11\ 111\ 111$$
$$3 \times 37\ 037\ 037 = 111\ 111\ 111$$

Et surtout une multiplication qui ne se terminait pas : le multiplicateur avait 152 chiffres.

Début de la multiplication…



Nous avions apporté les feuilles de calculs faits à la main(3), le chercheur nous a dit « Oh la la ! tous ces calculs à la main ? Un vrai brouillon ! Qui a vérifié ? Vous comptez me convaincre ainsi ??? Vous avez essayé d'utiliser un ordinateur ??? ». Les groupes de Pamiers en avaient eu assez de faire des multiplications, et ils venaient d'avoir une idée, que le chercheur encouragea : faire une division(4)…

De retour à Tournefeuille, un groupe s'est mis sur l'ordinateur pour programmer la multiplication et vérifier ses calculs, pendant qu'un autre s'est lancé dans la division : on a commencé par 11 111 / 2007 puis au lieu d'abaisser un 0, on a abaissé un 1. On a travaillé sur les restes possibles, et on s'est aperçu que la programmation

(2) Extrait du travail de Naguy et Adam.
(3) Annexe 1.
(4) Annexe 2.

sur tableur était très facile (Monsieur Estrade, notre professeur, nous a aidés pour trouver les bons « mots » pour programmer le tableur qui était installé sur les ordinateurs).

Nous avons ensuite lancé les deux programmes(5), et avons croisé les doigts… Chaque programme nous donnait les chiffres les uns après les autres, mais pas dans le même ordre : celui de la division les donnait de la position la plus grande vers celle des unités,

5536178929302995….

tandis que celui de la multiplication les donnait des unités vers la position la plus grande :

….19038919337873

Nous avons ensuite vérifié que nous obtenions le même nombre. Ça nous a pris presque une heure, mais au final, les deux nombres étaient bien identiques. OUF !

Ce nombre(6) est composé de 652 chiffres et multiplié à 2 007 il donne un produit ne comportant que le chiffe « 1 »(7) !

Nous avons ensuite terminé la préparation du congrès de Paris : on ne savait pas trop ce qui nous attendait, donc dans le train, nous avons distribué les rôles : les présentateurs, le responsable du diaporama, et tout le monde s'est mis à colorier une grande bande sur laquelle on avait recopié à la main le nombre. Nous avons rencontré un groupe de Bordeaux qui allait aussi au congrès : ils nous ont fait une partie de leur exposé pour s'entraîner, et, nous, on leur a montré le nôtre. Nous avons présenté notre exposé le dimanche matin dans une grande salle. On nous a posé quelques questions à la fin, par exemple : est-ce qu'on peut remplacer 2 007 par 2 008 ? On a répondu que non : 2 008 était pair, donc le produit serait toujours pair, donc ne pourrait pas se terminer par un 1 aux unités.

La semaine dernière nous avons présenté nos deux exposés à nos parents, et montré toutes les photos du congrès (il y en a beaucoup de la Tour Eiffel !).

En conclusion

(par les enseignants)

MATh.en.JEANS au collège, c'est possible ! Enfin .. une fois un créneau stable obtenu, indispensable ! et de préférence un label d'atelier scientifique accordé, ce qui facilite grandement, pour le premier, l'avancée des recherches, et pour le second, outre une reconnaissance de l'implication des différents acteurs, le financement du déplacement au congrès.

Les problèmes proposés conduisent souvent à de nombreuses heures d'essais, de manipulation, de retour en arrière pour enfin progresser grâce et avec les autres. Les élèves ne rechignent pas à la tâche, et mener des calculs des heures durant, ou mélanger des cartes encore et encore, n'en a arrêté aucun.

(5) Annexe 3.
(6) Que le lecteur a déjà rencontré au tout début de l'article.
(7) Notez que le produit obtenu compte 666 chiffres « 1 » : diabolique ?

Si on peut s'attendre à une telle pugnacité de la part de lycéens, on peut craindre que les plus jeunes ne se découragent : l'intervention du chercheur ou des correspondants évite l'enlisement et toujours des idées émergent. Les canaliser devient alors plus délicat ! Le sujet ici proposé offrait une solution abordable pour les collégiens (le groupe était composé d'élèves de sixième et de cinquième) et suffisamment prenante dans le temps. On aurait bien imaginé (souhaité ?) un prolongement une fois le programme de la division terminé, et un travail sur les restes plus poussé, pour éventuellement faire émerger l'idée d'un critère plus général…, mais les élèves ne s'engouffrèrent pas dans cette voie. L'autre sujet sur les cartes (étudié par des élèves de quatrième-troisième) a conduit à une solution plus ouverte qui amenait de nouvelles questions. Dans la tête du chercheur, il existait un lien entre les deux problèmes posés, à savoir qu'il y a un nombre fini de cas et qu'on peut donc procéder par épuisement, à ceci près que le problème sur les cartes est, lui, réellement ouvert.

Il me semble que le fait de donner des problèmes dont on n'a pas encore une réponse définitive fait partie de l'enthousiasme et de la ténacité des élèves chercheurs. En tout cas notre complice universitaire avait largement laissé planer la possibilité que les problèmes proposés soient non résolus.

Ce même esprit se retrouve au cœur du congrès. On y est de prime abord surpris de la diversité des sujets présentés, mais à chaque exposé ou atelier, deux points forts ressortent :

– chez ces jeunes chercheurs en herbe pour commencer : leur investissement, leur ténacité et la force de leur réflexion pour avancer vers une réponse.
– dans l'auditoire ensuite : le respect, l'écoute et le questionnement des plus grands (lycéens et adultes) envers leurs pairs, certes, mais surtout envers les plus jeunes.

On en repart impressionné.

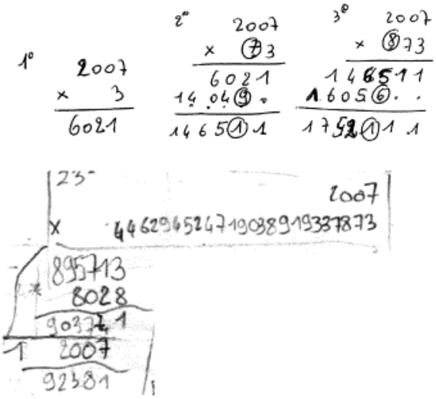
Et lorsqu'au détour de pages et de pages de calculs, Mattéo et Vincent obtiennent une propriété inattendue :

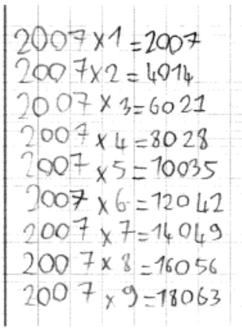
$$\begin{aligned}
&1 \times 9 + 2 = 11\\
&12 \times 9 + 3 = 111\\
&123 \times 9 + 4 = 1111\\
&1234 \times 9 + 5 = 11111\\
&12345 \times 9 + 6 = 111111\\
&123456 \times 9 + 7 = 1111111\\
&1234567 \times 9 + 8 = 11111111\\
&12345678 \times 9 + 9 = 111111111\\
&123456789 \times 9 + 10 = 1111111111\\
&12345678910 \times 9 + 11 = 111111110201^{(8)},
\end{aligned}$$

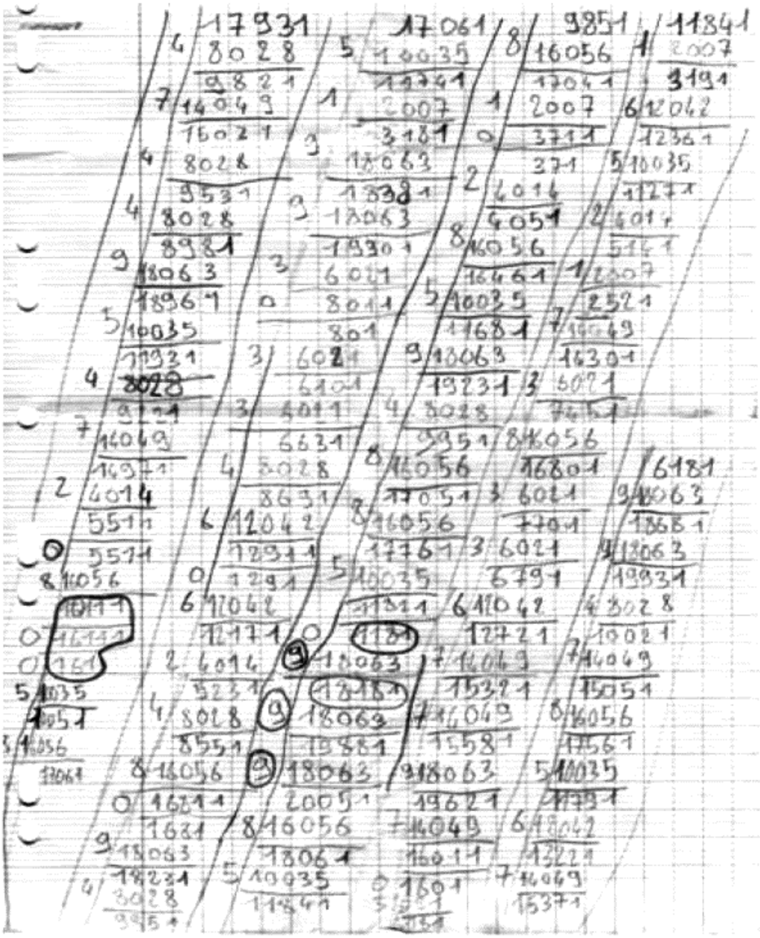
les professeurs(9) que nous sommes esquissent un sourire : les mathématiques ont encore de belles heures devant elles !

(8) Laissons au lecteur le soin de décrypter l'algorithme pour poursuive…
(9) Bruno Alaplantive, Anthony Estrade, Frédérique Fournier.

Annexe 1 : brouillon de Victor







Annexe 2 : Une première division présentée par les élèves de Pamiers

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 | 1 7
1 0 2                           |-----------------------------
------                          | 6 5 3 5 9 4 7 7 1 2 4 1 8 3
    9 1
    8 5
    ---
      6 1
      5 1
      ---
      1 0 1
        8 5
      -----
        1 6 1
        1 5 3
        -----
            8 1
            6 8
            ---
            1 3 1
            1 1 9
            -----
              1 2 1
              1 1 9
              -----
                  2 1
                  1 7
                  ---
                    4 1
                    3 4
                    ---
                      7 1
                      6 8
                      ---
                        3 1
                        1 7
                        ---
                        1 4 1
                        1 3 6
                        -----
                            5 1
                            5 1
                            ---
                              0
```

La division à effectuer :

```
  11 111 1 1    | 2 007
- 10 035        |--------
  --------      |  5 5 …
     1 076 1    |
  -  10 035     |
     --------   |
         726 1  |
                |
           …    |
```

jusqu'à ce que le reste soit égal à zéro.

Annexe 3

Les premières lignes de chaque programme de

– l’algorithme de la multiplication (Victor, Thomas, Romain, Julien) :

A	B	C	D	E	F	G
6 021	ENT (A1/10)	ENT (B1/10) × 10	B1 – C1	Fonction spéciale(10)	E1/2007	B1 + E1
G1	ENT (A2/10)	ENT (B2/10) × 10	B2 – C2	Fonction spéciale	E2/2007	B2 + E2

Ce qui donne, en colonne F les chiffres composant le nombre cherché en ordre croissant de position (début aux dizaines)

A	B	C	D	E	F	G
6 021	602	600	2	14 049	7	14 651
14 651	1 465	1 460	5	16 056	8	17 521

– l’algorithme de la division (Julien, Thomas) :

A	B	C	D	E
11 111	ENT (A1/2 007)	B1 × 2 007	A1 – C1	D1 × 10 + 1
G1	ENT (A2/2 007)	ENT (B2/10) × 10	A2 – C2	D2 × 10 + 1

Ce qui donne en deuxième colonne les chiffres du nombre par ordre décroissant de position :

11 111	5	10 035	1 076	10 761
10 761	5	10 035	726	7 261

Le programme est reproduit jusqu’à avoir un reste égal à zéro.

(10) Précision des élèves : la « fonction spéciale » est un programme qui renvoie le bon multiple de 2007 (en suivant le raisonnement de Victor, voir annexe 1), en fonction du nombre de la case D (la fonction « si » du tableur est limitée à huit tests possibles, alors qu’il nous en faut dix, d’où notre « fonction spéciale »).