

Une année MATH.en.JEANS dans l'académie de Poitiers

Gilles Maréchal(*)

Préparation

L'année MATH.en.JEANS 2007-2008 a commencé début juillet par une première rencontre entre des enseignants des lycées jumelés et le chercheur Camille Laurent de l'Université de Poitiers dans les locaux de l'IREM. Deux problèmes sont proposés : après une brève présentation, l'un des deux nous semble suffisamment clair « le rayon ne passe pas » et nous pensons que les élèves trouveront facilement des pistes d'investigations ; par contre le second sujet évoqué « toupie » demande réflexion, il semble inévitable de faire appel à des équations différentielles, et même en discrétisant et en transformant le problème sous forme « jeu », le sujet ne semble pas abordable par des élèves de seconde ou première, à mûrir...

Fin août le premier sujet est confirmé. Mais ne voyant pas quelle question originale poser sur la « toupie » et surtout la notion d'équation différentielle semblant incontournable, le chercheur décide de changer ce sujet et propose « carrés dans un lacet ». L'équipe valide ces propositions, mais seuls deux lycées (le Lycée de l'Image et du Son d'Angoulême et le Lycée Saint Joseph de Bressuire) lancent le projet pour cette année (le Lycée du Bois d'Amour de Poitiers avait décidé collectivement en juin, suite aux projets du Ministère sur les heures diverses, de ne déposer aucun projet pour l'année en cours).

Présentation dans les établissements

Camille Laurent se déplace en septembre dans chacun des établissements. À Bressuire, il est d'abord intervenu devant deux classes entières pour présenter les mathématiques et son métier. Ensuite il a présenté les problèmes aux élèves intéressés ; une quinzaine de lycéens de seconde, première ou terminale sont ainsi venus l'écouter : ils se sont inscrits rapidement à l'atelier, mais devant la régularité du « travail » (chaque semaine), certains ont baissé les bras, d'autres ayant reculé dès que le mot « démonstration » a été prononcé pour préciser la différence entre « conjecture » et « théorème »... Le groupe s'est ainsi rapidement stabilisé à 8 élèves des trois niveaux, et les initiatives et investigations ont fusé dans tous les sens.

Déroulement

Les rencontres hebdomadaires ont permis aux élèves de s'approprier progressivement les problèmes : ce n'est pas à la première séance que l'énoncé est compris, des feuilles de dessin ont été nécessaires avant de se l'approprier (suite à l'échec du carnet de bord des années précédentes, nous avons opté pour une

(*) Professeur au lycée Saint-Joseph de Bressuire, marchalgi@cc-parthenay.fr.

compilation des feuilles, datées, dans un classeur collectif). Au début les séances avaient lieu dans la salle de maths (nous voulions à tout prix éviter le piège « recherche internet »), mais, devant la nécessité d'évaluer la longueur de certaines courbes, les séances suivantes se sont déroulées en salle informatique où Géoplan était disponible (les initiés transmettant leur savoir-faire aux autres). Au départ les figures étaient fixes, puis progressivement la notion de point variable, et par la suite de longueur variable, est apparue : les notions de formules algébriques, puis de fonctions ont permis de valider certaines optimisations conjecturées.

Fin novembre une première rencontre entre les groupes des deux établissements est organisée un après-midi dans les locaux de l'IREM à Poitiers. Dans un premier temps, les deux établissements ont présenté leurs premiers travaux sur chacun des problèmes, avec des transparents ou diaporamas, certains élèves ayant utilisé Géoplan ou Géogébra. Puis le chercheur a présenté, lors d'une synthèse, quelques pistes méthodologiques. Ensuite les élèves ont travaillé en deux groupes et envisagé des pistes et questions à aborder pour chacun des problèmes. Dans le problème de la « courbe minimale » l'utilisation des fonctions et des logiciels a été renforcée. Le programme fait par un élève pour le problème du « carré » a été repris par l'autre groupe, en vue de nouvelles conjectures.

Début mars, dans les locaux du Laboratoire de Mathématique de l'Université de Poitiers au Futuroscope, la seconde rencontre a permis de présenter les résultats, encore à l'état d'ébauche, devant des chercheurs et étudiants. Les élèves ont démontré certains des résultats conjecturés. Au contraire, pour d'autres, l'optimisation est restée « expérimentale » avec un logiciel de géométrie, les fonctions étant trop complexes ou à deux variables. Certaines initiatives (par exemple, augmentation du nombre de segments) ont montré leurs limites, soit par le calcul, soit avec un dessin. En vu du colloque fin mars à Paris, une première ébauche de présentation est envisagée, les enseignants ayant à charge de permettre à chaque élève de présenter son travail.

Congrès

Fin mars le congrès « Graines de maths » a regroupé la centaine de projets dans les locaux de l'Université Paris-Diderot. Une présentation commune a été réalisée sous forme d'animation et d'exposé ; monter de telles présentations en temps limité (15 ou 20 minutes) est exigeant et très formateur pour les élèves : ce n'est pas le moment d'improviser, chaque mot, chaque phrase ayant été pesés auparavant. Le problème « carré dans un lacet maillé » a été présenté sous forme d'atelier : présentation avec affiches, diaporama, planches avec élastiques et programme interactif. Le sujet « courbes minimales » a été fait sous forme d'exposé en amphithéâtre. Ce fut aussi l'occasion pendant les trois jours du colloque de découvrir d'autres ateliers mathématiques, d'assister à d'autres exposés et d'écouter des conférences faites par de « vrais » mathématiciens.

Publication

Au retour du colloque, c'est un peu la décompression ... et pourtant l'année n'est pas terminée. D'une part des élèves ont des calculs ou projets de démonstrations en

cours, voire des idées nouvelles : il faut les aider à concrétiser leur travail. D'autre part, une publication est attendue pour clore l'année ; les semaines ne sont pas de trop pour « arracher » un « écrit » aux élèves. Certains d'entre eux, ayant un peu d'expérience, en ont compris tout l'intérêt et sont même moteurs, mais pour d'autres c'est plus laborieux (sans parler de l'orthographe, la précision est indispensable pour la description des figures et la rédaction des démonstrations)...

Cette « publication » est importante : par delà l'intérêt comme document d'étape (d'autres ateliers pourront prolonger ce travail), elle est ensuite diffusée largement et sert d'outil de validation pour une reconduction en Atelier Scientifique et Technique.

Autres étapes de l'année

En février, lors de la journée de rencontre académique des Clubs CNRS Jeunes Sciences et Citoyens à Poitiers les élèves de l'atelier mathématique de Bressuire ont présenté les problèmes de l'année sous l'appellation « courbes sous contraintes ». À cette occasion, ils ont participé à l'un des quatre débats en présence de scientifiques du CNRS.

Début mai les élèves des deux Lycées ont présenté leurs travaux à « Exposciences » à Niort et pendant trois jours les participants et visiteurs ont pu « manipuler des mathématiques », c'est-à-dire, avec des tenons et des élastiques, sur une planche trouée, ils ont pu chercher à matérialiser les carrés dans un lacet donné : le jury a remis le prix de la démarche scientifique pour ce projet jumelé.

Fin mai, Bressuire a aussi présenté le projet au concours « Faites de la science » à Poitiers : ce fut aussi l'occasion pour les élèves de découvrir d'autres projets scientifiques

Fin novembre, lors des journées APMEP à La Rochelle, des posters ont permis aux intéressés de découvrir des problèmes abordés et la démarche mise en œuvre dans MATH.en.JEANS.

Prolongements

Dans une brève de la revue La Recherche de juillet 2008 le problème du « carré dans une courbe » est cité comme étant d'actualité : une démonstration « élémentaire » vient d'être faite dans un cas particulier... Des mathématiques vivantes !

Le jumelage se poursuit en 2008-2009 à 3 lycées, avec deux nouveaux problèmes, et un collège entame sa deuxième année avec MATH.en.JEANS et l'Université de La Rochelle...

Témoignage de Sarah

Cette année le club mathématique MATH.en.JEANS a traité deux sujets de mathématiques. Les recherches étaient libres mais encadrées. Le chercheur Camille Laurent est venu présenter ces deux thèmes le 20 septembre 2007, et quelques essais et recherches miniatures ont été faits le jour même.

L'atelier de mathématiques du Lycée St Joseph, jumelé à celui du Lycée de L'image et du Son d'Angoulême, a alors commencé diverses recherches. Nous avons

eu quelques ratés, des essais qui n'aboutissaient pas. Mais faire le tri et partager nos idées en groupe nous a vite amenés à trouver des pistes de réponses....

Voici les deux problèmes proposés.

Le premier, sur lequel j'ai travaillé, était de partir de la conjecture que « dans tout lacet se trouve au moins un carré dont tous les sommets se trouvent sur ce lacet ». Le chercheur a simplifié le problème et proposé de partir d'un lacet maillé, c'est-à-dire un lacet tracé sur un quadrillage.

Le second problème portait sur le sujet suivant : « dans un jardin il faut creuser le moins possible pour être certain de retrouver une canalisation en ligne droite, qui passe sous le jardin. » On traduit ce problème en langage mathématique : la canalisation est une ligne droite et le jardin est un cercle.

Nous nous sommes divisés en deux groupes, selon le problème que nous voulions traiter. Nous avons rencontré à Poitiers pour la première fois le groupe d'Angoulême le 11 décembre 2007. En présentant ses recherches, chacun des groupes a pu s'exercer à l'oral. Cette rencontre était d'autant plus cruciale, qu'elle a permis à chacun d'améliorer ses recherches, d'explorer un point qui n'avait pas été vu, et qu'un autre avait un peu développé.

La seconde rencontre à Poitiers, le 6 mars 2008, a permis la même chose, même si nous avons bien avancé dans nos recherches. Nous avons pu comparer les résultats obtenus, et les personnes présentes qui ne faisaient pas partie du club mathématique (chercheurs, professeurs, ou étudiants de la faculté de mathématiques) ont pu poser des questions. Cette rencontre était un bon entraînement, et nous préparait à la rencontre de Paris des 28-29-30 mars 2008).

Il est sept heures du matin, nous attendons le bus, pour nous emmener à Poitiers où nous prendrons un direct pour Paris. Le voyage n'est pas si long, et nous pouvons réviser dans le train. Nous nous rendons dans l'Université Paris-Diderot où se déroule la rencontre nationale MATH.en.JEANS. Les conférences se suivent, et la découverte des mathématiques sous un autre angle permet une bonne approche : tout est intéressant. Les sujets sont variés, et vont de Titan, satellite de Saturne, au décryptage de codes utilisés durant la guerre.

La soirée du vendredi a été utilisée pour préparer les deux exposés communs aux deux Lycées. Nous présentons à l'oral, un groupe dans une salle de classe, l'autre dans un amphithéâtre : nous avons pu partager nos projets avec des gens intéressés et curieux.

Le projet a été présenté aussi les 13-14-15 mai 2008 à Niort lors des journées Exposciences : nous y avons obtenu le prix du CNRS pour la démarche scientifique, conjointement avec Angoulême. Nous avons aussi présenté le projet à « Faites de la Science » à Poitiers le 5 juin 2008.

Problème des « carrés enlacés »

L'énoncé, tiré du livre « Unsolved problems in geometry », est le suivant : « *Soit une courbe fermée et continue du plan. Montrer qu'il y a quatre points de cette courbe qui forment un carré !* ».

Ce problème est une vraie conjecture. Une variante, elle aussi non résolue, et peut être plus abordable, est d'étudier le cas d'un lacet tracé dans un quadrillage, c'est-à-dire dont les seuls points utilisables sont les points situés à la fois sur le lacet et les nœuds du quadrillage.

Le sujet sera finalement formulé de la façon suivante « *Peut-on toujours inscrire un carré sur un lacet maillé ? En existe-t-il plusieurs ? Existe-t-il des lacets qui en possèdent exactement un ?* ».

Dans son témoignage, Sarah, qui a travaillé sur ce problème, précise bien le sens du « lacet maillé », à savoir un lacet tracé sur un quadrillage. Trois autres élèves, Leslie, Mathilde et Stanislas ont également cherché à résoudre ce problème.

Le document présenté ici rassemble les notes que Mathilde et Stanislas ont rédigées pour le compte rendu oral qu'ils ont fait, au tableau, de leur travail de recherche ainsi que du prolongement qu'ils lui ont donné. Ces notes et leurs illustrations n'ont, bien sûr, pas le caractère dynamique que leurs auteurs ont pu imprimer à leur exposé pour décrire le caractère évolutif de cette recherche (règle du jeu n° 4). Elles permettent cependant de s'en faire une idée instructive.

Travail de Mathilde : recherches « à la main »

Première étape : carré inscrit dans un cercle ou un triangle équilatéral.

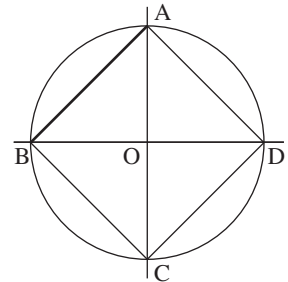
On a commencé par étudier le carré inscrit dans un cercle : le rapport entre le côté du carré C et le périmètre P du cercle.

Le rayon OD vaut 1, donc le périmètre vaut 2π , le côté vaut $\sqrt{2}$.

Le coefficient P/C vaut $P/C = 2\pi / \sqrt{2} = \pi\sqrt{2}$.

Alors dans tous les cercles avec un carré inscrit (car c'est proportionnel), on trouvera le côté du carré par la formule $C = P / (\pi\sqrt{2})$ ou le périmètre par

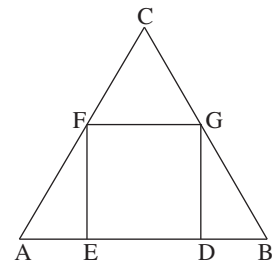
$$P = C \times (\pi\sqrt{2}).$$



De la même façon dans un triangle équilatéral, en posant $ED = 1$, on cherche AE : $\tan 60^\circ = EF / AE = 1 / \sqrt{3}$, d'où $AE = 1 / \sqrt{3}$, donc $AB = 1 + 2 / \sqrt{3}$, puis le périmètre de ABC vaut $3 + 6 / \sqrt{3}$; le coefficient P/C vaut $P/C = 3 + 6 / \sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{3}$.

Alors, quand le carré est inscrit dans un triangle équilatéral, on trouve le côté du carré par la formule

$$C = P / (3 + 2\sqrt{3}) \quad \text{ou} \quad \text{le périmètre par}$$

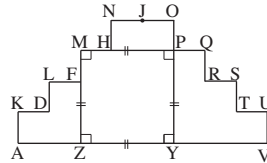


$P = C \times (3 + 2\sqrt{3})$ (ceci dans tous les triangles équilatéraux, car il y a proportionnalité).

Nous nous sommes rendues compte que ce travail que nous avons fait avec Leslie ne correspondait pas au problème de départ.

Deuxième étape : triangle « pyramidal ».

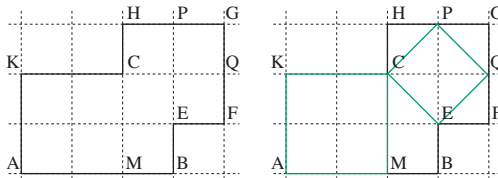
Dans cette sorte de triangle, nous avons conjecturé qu'il y a toujours un carré.



Troisième étape : recherche d'un lacet sans carré.

Le carré doit avoir ses sommets aux intersections du quadrillage et de la courbe.

Ici, ce lacet contient-il des carrés ? On se rend compte qu'il en contient au moins deux : AMCK et CEPQ.

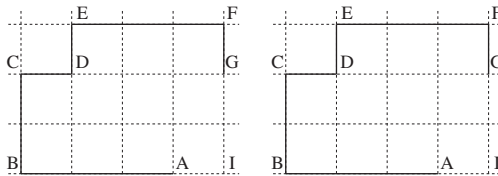


Dans tous les lacets que l'on a tracés au hasard il y avait des carrés.

On a alors eu l'idée de chercher à construire un lacet de façon qu'il ne contienne pas de carrés.

Quatrième étape : essai de construction d'un lacet sans carré

Ce début de lacet ne contient pas de carré. Peut-on le refermer en passant par le point I ?



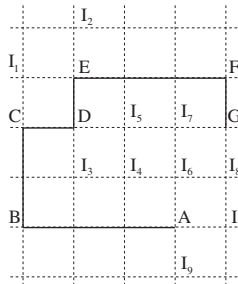
Non, car cela formerait le carré IFEH et la courbe contiendrait un carré.

Le point I est considéré comme un point interdit (il est le quatrième sommet d'un carré dont déjà trois sommets F, E, H sont sur le lacet).

On teste de même les autres nœuds du quadrillage I_6 et I_9 : à chaque fois un carré apparaît.

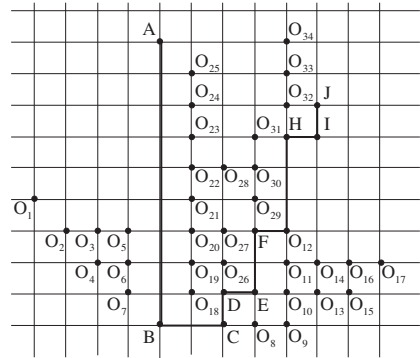
Tous les points I sont des points interdits par lesquels on ne peut pas passer faute de quoi on aurait un carré.

Pour fermer cette courbe on est obligé de passer par au moins l'un des points I. Cette courbe ne peut se refermer sans carré.

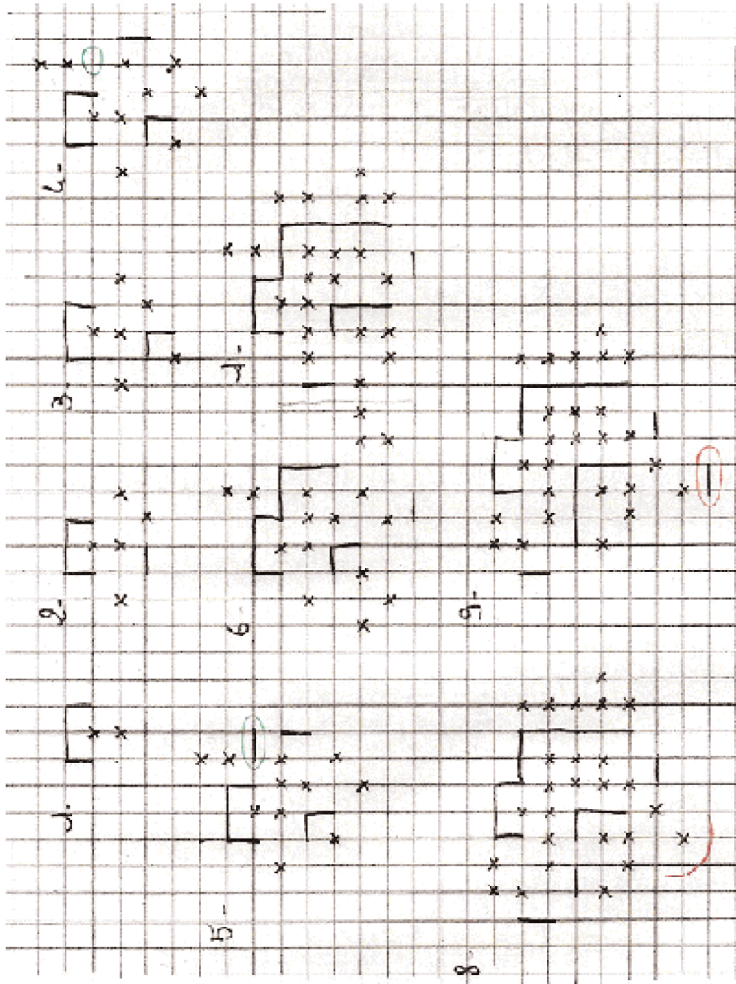


Avec le début de courbe ABCD..., l'apparition de points interdits fait que cette courbe ne peut pas se refermer (sans carré) : ici, elle ne peut que s'écartier.

Cette courbe semble impossible à fermer sans contenir de carré.



Cinquième étape : recherche avec des bouts de courbes

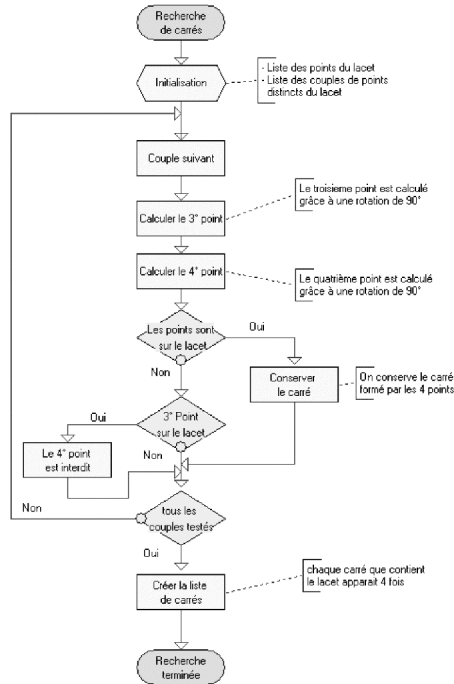
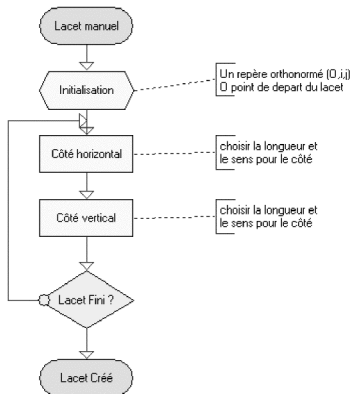


Ici le tracé de la courbe se fait en plusieurs bouts. Ainsi dans les cas où il y a un risque de blocage on peut « réserver » un bout de courbe et les points interdits se trouvent ailleurs (fig. 4 à fig. 5). Si les points interdits « débordent » trop à un endroit, on place un bout de courbe pour les « contenir » (fig. 8 à fig. 9). L'avantage, c'est de pouvoir placer le lacet dans les zones « dangereuses ».

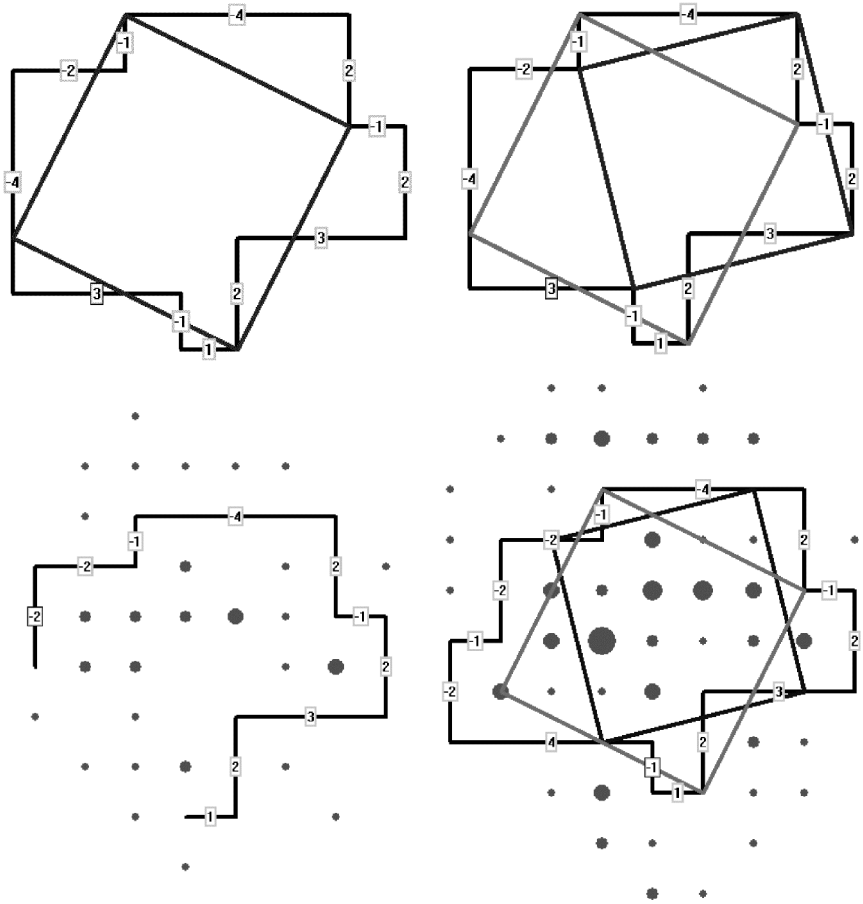
Travail de Stanislas : Recherches de carrés « avec ordinateur »

Pendant les recherches, Sarah a proposé de programmer un algorithme pour générer des lacets sur l'ordinateur. J'ai développé un premier programme en C++ qui crée aléatoirement des lacets. Cependant lors du premier séminaire en Novembre avec le lycée de l'Image et du Son d'Angoulême, il a été demandé de pouvoir créer des lacets manuellement, en précisant la longueur et le sens de chaque côté. Plus tard j'ai intégré une recherche automatique de carrés. Voici deux organigrammes qui présentent le fonctionnement de quelques parties du programme.

Tous les lacets fermés construits, aussi bien à la main qu'avec le logiciel créé, contiennent au moins un carré.



De plus lors d'une mise en commun pour la préparation du second séminaire, Mathilde nous a proposé une approche différente pour essayer de résoudre le problème. Au lieu de chercher un lacet où il n'y aurait pas de carré, elle a proposé de construire un lacet en évitant d'intégrer des carrés et cela en affichant, au fur et à mesure de la création du lacet, les points « interdits » : ces points sont les quatrièmes points qui formeraient avec trois points du lacet un carré.



En affichant, pendant la création du lacet, les points interdits (plus le point est gros plus il engendrerait de carrés), nous pouvons chercher à éviter d'engendrer des carrés dans le lacet. On remarque ici que l'origine est entourée par trois points interdits, donc il sera impossible de fermer ce lacet sans engendrer un carré.

Nous avons refait la tentative avec de nombreux lacets : nous n'avons trouvé aucun lacet qui pouvait se fermer sans carré. Nous conjecturons donc que tout lacet fermé ainsi construit contient au moins un carré.

Le logiciel nous a donné l'idée de faire un jeu : avec des planches trouées, que nous ont préparées les élèves de section Métiers du Bois du Lycée Professionnel, et des tenons, nous pouvons matérialiser un lacet et y chercher les carrés inscrits dans ce lacet (voir les photos et les maquettes qui suivent).

