Exercices de-ci, de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices, même « modestes » mais un peu curieux, imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci, de-là » qui vous ont plu ou qui vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et, en particulier, ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique en joignant, si vous le pouvez, une copie au format PDF pour contrôler, en particulier, les formules qui sont souvent dégérées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Serge Parpay, aux collègues qui ont animé cette rubrique :

Cher(e)s collègues
J'avais accepté de tenir cette rubrique à la demande d'Henri Bareil et ce depuis le bulletin 451 de mars-avril 2004.
Bruno Alaplantive prend le relais à partir du bulletin 483. Je l'en remercie bien vivement.
Les solutions des exercices 479-2, 479-3 et 479-4 seront données dans le bulletin nº 482.
Les propositions d'exercices reçues à ce jour seront transmises à Bruno Alaplantive (bruno.alaplantive@free.fr). Prière de ne plus m'en envoyer. Merci.
Bien cordialement.

S. Parpay

Exercices

Exercice 480-1 (Daniel Reisz – Auxerre)

Que peut-on dire de la suite de réels (u_n) vérifiant $u_1 = 1$ et, pour tout m et n, $|u_n - u_m| \leq \dfrac{2mn}{m^2+n^2}$?

Exercice 480-2 (Daniel Reisz – Auxerre)

Soit les deux fonctions $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $g(x) = cx^2 + bx + a$ avec $|f(0)| \leq 1$, $|f(1)| \leq 1$ et $|f(-1)| \leq 1$.

Montrer que pour tout x vérifiant $|x| \leq 1$ on a $|f(x)| \leq \dfrac{5}{4}$ et $|g(x)| \leq 2$.

Exercice 480-3 (Daniel Reisz – Auxerre)

Quel élève n'a pas eu au moins une fois dans sa vie mathématique la tentation d'écrire $(fg)' = f'g'$?
Y a-t-il des fonctions pour lesquels cette règle est vraie ? Que peut-on en dire ?

Exercice 480-4 (Georges Lion – Wallis)

Soit deux groupes finis G et G′ et une bijection φ de G sur G′ tels que, pour tout $x \in$ G, alors $\varphi(x)$ soit de même ordre que x. Se peut-il que φ ne soit pas un isomorphisme ?

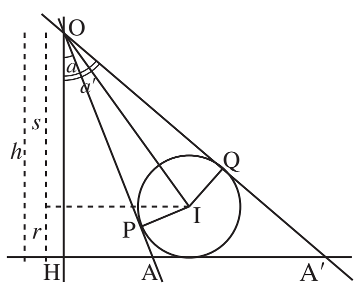
Solutions

Exercice 478-1 (Pierre Duchet et Jean Moreau de Saint-Martin – Paris)

Soit (Δ) une droite et O un point extérieur à la droite. On considère un nombre indéterminé de points A_i de (Δ) tels que les cercles inscrits dans les triangles OA_iA_{i+1} soient tous de même rayon r. Démontrer que, quel que soit k, les cercles inscrits dans les triangles OA_iA_{i+k} sont tous de même rayon r_k.

Solution de Raymond Raynaud (Digne)

1) Soit H le projeté de O sur Δ. Posons OH = h.
Soit A l'un quelconque des points A_i et A′ le point A_{i+1}.
Soit r le rayon du cercle inscrit dans le triangle OAA′ et $s = h - r$.



Désignons par a et a' les angles $\widehat{\text{HOA}}$ et $\widehat{\text{HOA}'}$. Si h et r sont fixés, la donnée de a entraîne celle de a'.
Calculons donc a' en fonction de a.

$$\text{OI}\cos\frac{a+a'}{2} = s \quad \text{et} \quad \text{OI}\sin\frac{a'-a}{2} = r.$$

$$r\cos\frac{a+a'}{2} = s\sin\frac{a'-a}{2},$$

d'où je tire

$$\tan\frac{a'}{2} = \frac{s\tan\frac{a}{2}+r}{r\tan\frac{a}{2}+s}.$$

$\tan\frac{a'}{2}$ est l'image de $\tan\frac{a}{2}$ par la fonction homographique $f : t \mapsto t' = \dfrac{st+r}{rt+s}$ (dont l'hyperbole représentative a son centre sur la deuxième bissectrice).

Appelons **fonctions φ** les fonctions du type $x \mapsto \dfrac{px+q}{qx+p}$ où p et q sont deux réels strictement positifs.

Il est facile de constater que la composée de deux fonctions φ est une fonction φ :

Si $f(x)=\dfrac{px+q}{qx+p}$ et $f'(x)=\dfrac{p'x+q'}{q'x+p'}$, alors $(f'\circ f)(x)=\dfrac{(pp'+qq')x+pq'+qp'}{(pq'+qp')x+pp'+qq'}$.

Donc, si f est une fonction φ, $f^{(k)}$ est aussi une fonction φ pour tout entier k supérieur à 0.

2) **A étant toujours l'un quelconque des points A_i, je désigne maintenant par A′ le point A_{i+k}, k étant un entier quelconque supérieur à 0.**

Comme précédemment, a et a' désignent les angles $\widehat{\text{HOA}}$ et $\widehat{\text{HOA}'}$. Si j'arrive à démontrer que le rayon du cercle inscrit dans le triangle AOA′ est indépendant de a, le problème sera résolu.

Mon arme pour réussir est celle-ci : **a' est l'image de a par une fonction φ.**

D'abord, h étant fixé ainsi que a et a', il faut calculer le rayon r du cercle inscrit dans le triangle AOA′.

En utilisant deux expressions de l'aire du triangle

$$2\mathrm{S}=h^2\left(\tan a'-\tan a\right),$$

$$2\mathrm{S}=h\left(\tan a'-\tan a+\frac{1}{\cos a}+\frac{1}{\cos a'}\right)r,$$

on obtient

$$r=\left(\frac{pt+q}{qt+p}-t\right)\left(1-t\frac{pt+q}{qt+p}\right).$$

Pour démontrer que r est indépendant de a, il suffit de démontrer qu'il en est de même de $u=\dfrac{\dfrac{1}{\cos a}+\dfrac{1}{\cos a'}}{\tan a'-\tan a}$.

Utilisant $t=\tan\left(\dfrac{a}{2}\right)$ et $t'=\tan\left(\dfrac{a'}{2}\right)$, on obtient $u=\dfrac{1-t^2t'^2}{(t'-t)(1+tt')}$. Comme t' est l'image de t par une fonction φ, il existe deux réels p et q tels que $t'=\dfrac{pt+q}{qt+p}$.

Dès lors :

$$u=\frac{\left(1-t^2\dfrac{(pt+q)^2}{(qt+p)^2}\right)}{\left(\dfrac{pt+q}{qt+p}-t\right)\left(1-t\dfrac{pt+q}{qt+p}\right)}=\frac{(qt+p)^2-t^2(pt+q)^2}{\left(pt+q-t(qt+p)\right)\left(qt+p-t(pt+q)\right)}.$$

$\mathrm{Num}(u) = -p^2t^4 - 2pqt^3 + 2pqt + p^2$ et $\mathrm{Dén}(u) = -pqt^4 - 2q^2t^3 + 2q^2t + pq$. Et $u = \dfrac{p}{q}$.

L'invariance visée est établie. Le rayon du cercle inscrit dans le triangle A_iOA_{i+k} est indépendant de i.

Exemple : intéressons-nous aux triangles A_iOA_{i+2}.

Si l'on pose $\widehat{A_1OA_2} = a$ et $\widehat{A_1OA_3} = a''$,

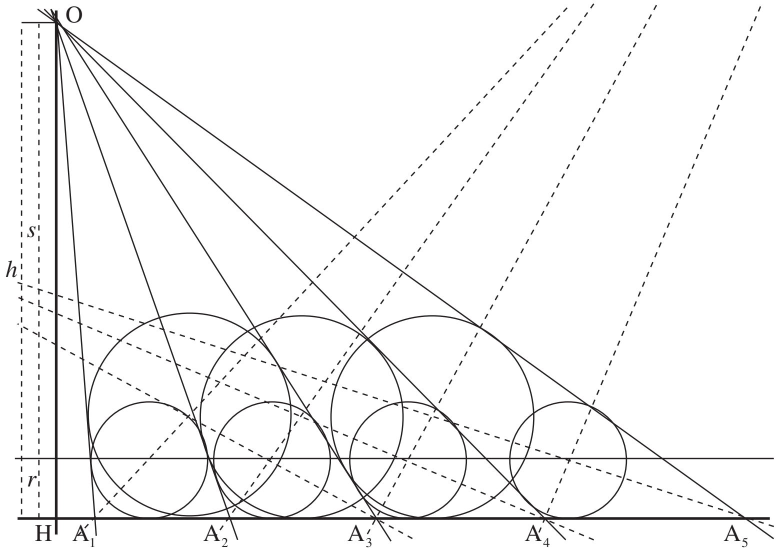
$$\tan\frac{a''}{2} = \frac{\left(r^2+s^2\right)\tan\frac{a}{2} + 2rs}{2rs\tan\frac{a}{2} + r^2 + s^2}.$$

Les coefficients p et q de l'étude précédente sont respectivement $r^2 + s^2$ et $2rs$.

Le rayon du cercle inscrit dans le triangle A_iOA_{i+2} est $\mathrm{R} = \dfrac{h}{1+u}$ avec $u = \dfrac{r^2+s^2}{2rs}$.

$$\mathrm{R} = \frac{h}{1+u} = \frac{h}{1+\dfrac{r^2+s^2}{2rs}} = \frac{2rsh}{2rs+r^2+s^2} = \frac{2rs}{h}.$$

Avec, par exemple comme ici, h = 10,4 cm et r = 1,2 cm, on trouve R = 2,1 cm.



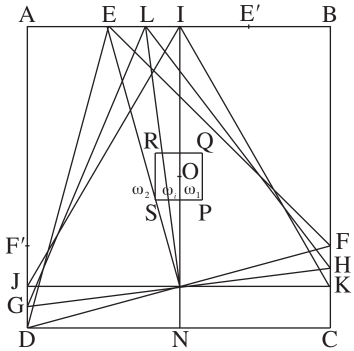
Autres solutions : Jean-Claude Carréga (Lyon), Marie-Laure Chaillout (Épinay/Orge), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisan), Pierre Renfer (Ostwald).

Exercice 478-2 (Georges Lion – Wallis)

Trouver le lieu géométrique des centres des triangles équilatéraux inscrits dans un carré.

Solution de Robert Bourdon (Tourgeville)

1) Quatre côtés pour trois sommets supposant un côté sans sommet, [DC] par exemple. Prenons un sommet sur le côté [AB].
Tout d'abord, soit I le milieu de [AB], soit a la longueur du côté du carré. Soit N le milieu de [CD].
Le triangle IJK est symétrique par rapport à (IN).
M étant le milieu de [JK], on a



$$\mathrm{IJ}\cdot\cos 60° = \mathrm{IA} = \frac{a}{2},$$

d'où

$$\mathrm{IJ} = a,\quad \mathrm{IM} = \frac{a\sqrt{3}}{2},\quad \mathrm{MN} = \frac{a\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}.$$

Soit O le centre du carré et ω_1 le centre de IJK.

$$\mathrm{M}\omega_1 = \frac{\mathrm{MI}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2},\quad \mathrm{O}\omega_1 = \frac{a}{6}\left(2\sqrt{3}-3\right).$$

2) Y a-t-il, sur [AB], un point E tel que D soit un sommet de triangle cherché ? Il faut DE = DF et $\widehat{\mathrm{EDF}} = 60°$. Mais alors, $\widehat{\mathrm{DAE}} = \widehat{\mathrm{DCF}}$ et $\widehat{\mathrm{ADE}} = \widehat{\mathrm{CDF}} = 15°$.

En posant t = tan 15° et $\tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2t}{1-t^2}$, on a $\tan 15° = 2-\sqrt{3}$, d'où

$$\mathrm{AE} = \mathrm{CF} = \mathrm{AD}\tan 15° = a\left(2-\sqrt{3}\right).$$

Or

$$\mathrm{KC} = \mathrm{MN} = \frac{a\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}.$$

Donc $\mathrm{KC} = \dfrac{\mathrm{FC}}{2}$ ou K est le milieu de [FC].
Donc [DF] a pour milieu le point M, milieu de [JK].

Si on appelle ω_i le centre de GLH, on a $\mathrm{M}\omega_i = \dfrac{\mathrm{ML}}{2}$. Donc le centre ω_i d'un triangle équilatéral dont un sommet est sur [AB] est sur le segment homothétique de [EE′] dans l'homothétie (M, 1/3). C'est le segment [ω_2P] (ou [SP] si on remplace ω_2 par S).
Un raisonnement analogue pour des sommets pris sur [BC], [CD] ou [DA] donnera les mêmes résultats mutatis mutandis.

Donc l'ensemble des centres des triangles équilatéraux inscrits dans le carré ABCD de centre O est le carré de centre O dont les côtés sont parallèles aux côtés ABCD, de longueur $EE' = \dfrac{a\left(2\sqrt{3}-3\right)}{3}$, soit PQRS, à moins qu'on ne dise qu'il est l'homothétique de ABCD dans l'homothétie $\left(O, \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$.

Autres solutions : Jean-Claude Carréga (Lyon), Marie-Laure Chaillout (Epinay/Orge), Bernard Collignon (Coursan), Alain Corre (Moulin), Jean Gounon (Chardonnay), Michel Lafond (Dijon), Georges Lion (Wallis), Raymond Raynaud (Digne), Pierre Renfer (Ostwald).

Exercice 478-3 Exercices pour amateur (Édouard Lucas – Théorie des nombres [tome 1] – Nouvelle édition : Blanchard 1961)

1°) On partage la suite des nombres impairs en groupes contenant respectivement 1, 2, 3, …, n termes. Trouver la somme des p termes du groupe de rang p. (Nicomède de Gérase [environ 100 ans av. J.C.])
2°) On partage la suite des nombres entiers en groupes contenant respectivement 1, 2, 3, 4, …, n termes. Démontrer que la somme des termes renfermés dans les n premiers groupes de rang impair est égal à n^4.
3°) Démontrer que la somme des n^2 entiers qui suivent les n premiers est le double des n premiers cubes.

Solution de Marie-Laure Chaillout (Epinay/Orge)

1°) Le groupe de rang p va du $\dfrac{p(p-1)}{2}+1$-ème nombre au $\dfrac{p(p+1)}{2}$-ème nombre impair. Donc la somme S_p des termes de ce groupe est :

$$S_p = \frac{p^2(p+1)^2}{4} - \frac{p^2(p-1)^2}{4} = p^3.$$

2°) Le groupe de rang p va de $\dfrac{p(p-1)}{2}+1$ à $\dfrac{p(p+1)}{2}$. Donc la somme S_p des termes de ce groupe est :

$$S_p = \frac{\dfrac{p(p+1)}{2}\left[\dfrac{p(p+1)}{2}+1\right]}{2} - \frac{\dfrac{p(p-1)}{2}\left[\dfrac{p(p-1)}{2}+1\right]}{2},$$

soit

$$S_p = \frac{p^3+p}{2}.$$

Si $p = 2n - 1$ alors

$$S_{2n-1} = \frac{(2n-1)^3 + 2n - 1}{2} = (2n-1)\left(2n^2 - 2n + 1\right)$$
$$= \left[n^2 - (n-1)^2\right]\left[n^2 + (n-1)^2\right] = n^4 - (n-1)^4.$$

et $S_1 = 1$. Donc

$$\sum_{i=1}^{n} S_{2i-1} = n^4.$$

3°) Les n^2 entiers qui suivent les n premiers vont de $n + 1$ à $n + n^2$. Donc leur somme est :

$$S_n = \frac{\left(n+n^2\right)\left(n^2+n+1\right)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{2}.$$

Et d'après le résultat du 1) la somme des n premiers cubes est $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Remarque : pour résoudre ces exercices, il est seulement nécessaire de savoir calculer la somme des termes d'une suite arithmétique et pourtant on obtient de jolis résultats.

Autres solutions : Robert Bourdon (Tourgeville), Jean-Claude Carréga (Lyon), Alain Corre (Moulins), Raymond Raynaud (Digne), Pierre Renfer (Ostwald).

Exercice 479-1 (Pierre Renfer – Ostwald)

À l'occasion de mon cinquante-neuvième anniversaire, j'ai trouvé sans démonstration, dans l'excellent livre « Les nombres remarquables » de François Le Lyonnais, que 59 était le nombre de régions découpées dans l'espace par les plans des faces d'un octaèdre régulier.
Comment le prouver ?

Solution de l'auteur

Considérons l'octaèdre dont les six sommets ont, dans un repère orthonormé, les coordonnées : (± 1, 0, 0), (0, ± 1, 0), (0, 0, ± 1).
Les huit plans des faces ont pour équations :

$$x + y + z = \pm 1,$$
$$-x + y + z = \pm 1,$$
$$x - y + z = \pm 1,$$
$$x + y - z = \pm 1,$$

Soient a, b, c, d les formes linéaires figurant respectivement dans les premiers membres ci-dessus.
Pour définir une région, il s'agit de préciser pour chacun des quatre nombres a, b, c, d s'il appartient à l'intervalle $G =]-\infty, -1[$ ou $M =]-1, +1[$ ou $D =]-1, +\infty[$.
A priori, 81 choix sont possibles, mais comme $a = b + c + d$, certains choix sont incompatibles et conduisent à une région vide.

Comme l'application linéaire $(x,\ y,\ z) \rightarrow (b,\ c,\ d)$ est inversible, les 27 choix pour l'affectation de $(b,\ c,\ d)$ sont possibles. Qu'en est-il alors pour a ?
1) Si b, c, d sont tous dans G, alors a est dans G.
2) Si b, c, d sont tous dans D, alors a est dans D.
3) Si b, c, d sont tous dans M, alors les trois choix sont possibles pour a.
4) Si, parmi b, c, d, l'un est dans M et les deux autres dans G, alors a est dans G.
5) Si, parmi b, c, d, l'un est dans M et les deux autres dans D, alors a est dans D.
6) Si, parmi b, c, d, l'un est dans G et les deux autres dans M, alors a est dans G ou M.
7) Si, parmi b, c, d l'un est dans D et les deux autres dans M, alors a est dans D ou M.
8) Si, parmi b, c, d, l'un est dans D et les deux autres dans G, alors tout est possible pour a.
9) Si, parmi b, c, d, l'un est dans G et les deux autres dans D, alors tout est possible pour a.
10) Si b, c, d appartiennent à trois intervalles distincts, alors tout est possible pour a.

En additionnant les possibilités des dix cas, on trouve
$$1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 6 + 6 + 9 + 9 + 18 = 59.$$

En faisant opérer le groupe des 48 isométries conservant l'octaèdre, on peut regrouper les régions en six classes d'équivalence :
1) Si a, b, c, d sont tous les quatre dans M, on obtient la région intérieure à l'octaèdre.
2) Si, parmi a, b, c, d, trois sont dans M, on obtient une classe de huit régions bornées, intérieures à des tétraèdres réguliers construits sur les faces de l'octaèdre vers l'extérieur.
3) Si, parmi a, b, c, d, deux sont dans M, on obtient une classe de douze régions vers l'extérieur de deux faces adjacentes de l'octaèdre.
4) Si, parmi a, b, c, d, un seul est dans M, on obtient une classe de vingt-quatre régions vers l'extérieur de trois faces ayant un sommet commun.
5) Si, parmi a, b, c, d, aucun n'est dans M, on obtient deux classes :

- L'une contient huit régions vers l'extérieur de quatre faces dont l'une est adjacente aux trois autres.
- L'autre contient six régions vers l'extérieur de quatre faces ayant un sommet commun.