Problèmes d'antan 5

1926

En feuilletant les anciens bulletins de notre association, on trouve des sujets d'exercices et de problèmes. Nous publierons dans chaque Bulletin Vert des exemples de ces exercices d'antan.

Envoyez vos propositions de solutions à frechetm.apmep@wanadoo.fr. Les meilleurs seront publiées.

Bacc. Math. – *Caen, Juillet 1926* (Extrait) : Dans un plan, on donne une droite (D) et, sur cette droite trois points distincts A, B et C. Par A, B respectivement, on mène les tangentes (AP) et (BP) (distinctes de (D)) à une circonférence tangente à (D) en C.

Lieu du point d'intersection P de ces deux droites lorsque la circonférence varie, A, B et C restant fixes.

(On distinguera deux cas : C est entre A et B ; C n'est pas entre A et B.)

Solution, problèmes d'antan 4

1921

Énoncé

Bacc. Math. – *Lyon, Octobre 1920* :

1. Soit un cercle O et un de ses diamètres, BC. On prend un point M de la circonférence du cercle O et, du point M comme centre, on trace la circonférence tangente à BC ; des points B et C on mène les tangentes à cette circonférence de centre M. Démontrer que ces deux tangentes sont parallèles.
2. On suppose maintenant que BC est une corde et non plus un diamètre du cercle O et l'on effectue la même construction. Les tangentes issues de B et C au cercle M se coupent alors en un point A. Trouver les lieux du point A quand M parcourt sur la circonférence O chacun des deux arcs sous-tendus par la corde BC.

Solution proposée

[BC] est le diamètre

Soient B′ et C′ les points de contact du cercle de centre M avec les tangentes distinctes de (BC) et issues respectivement de B et C. Les points B′ et C′ sont dans le même demi-plan limité par (BC). Le triangle BMC est rectangle en M comme inscrit dans un demi cercle.

Soient b et c les mesures des angles $\widehat{\mathrm{B}}$ et $\widehat{\mathrm{C}}$.

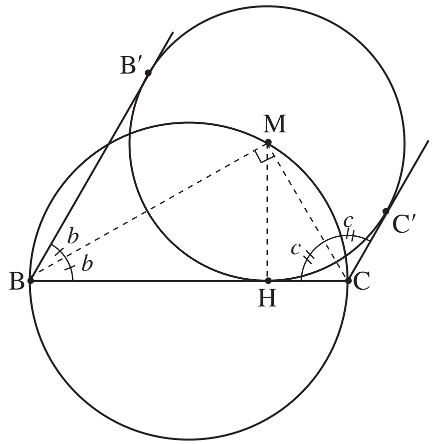
On a $b+c=\dfrac{\pi}{2}$.

Par construction, les droites (BM) et (CM) sont les bissectrices des angles $\hat{\mathrm{B}}$ et $\hat{\mathrm{C}}$ respectivement.

Ainsi,

$\widehat{\mathrm{CBB'}}+\widehat{\mathrm{C'CB}}=2b+2c=2\left(b+c\right)=\pi$;

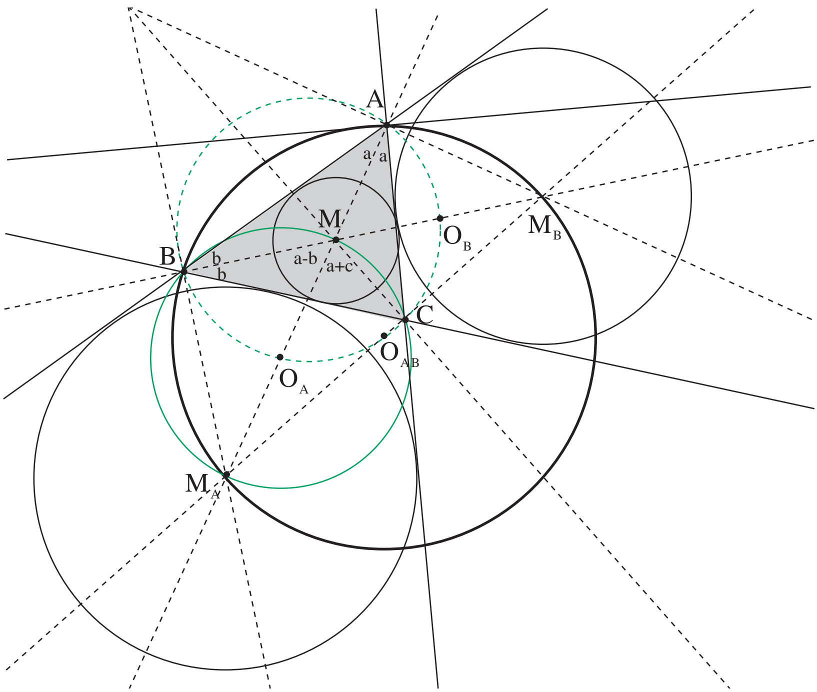
les angles sont supplémentaires et les droites (BB′) et (CC′) sont parallèles.



La deuxième partie va nous permettre de montrer une propreté liant le cercle circonscrit à un triangle et les bissectrices intérieures et extérieures.

Cercles inscrit et exinscrits à un triangle

On considère le triangle ABC, son cercle inscrit de centre M et un de ses cercles exinscrits de centre $\mathrm{M_A}$, $\mathrm{M_A}$ étant, par exemple, sur la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$.



On note $\widehat{\mathrm{BAC}}=2a$, $\widehat{\mathrm{ABC}}=2b$ et $\widehat{\mathrm{BCA}}=2c$ et $\mathrm{O_A}$ le milieu du segment $[\mathrm{MM_A}]$.

(On rappelle que le centre du cercle inscrit est l'intersection des bissectrices intérieures et que le centre de chacun des cercles exinscrits est l'intersection de deux bissectrices extérieures de deux angles du triangle et de la bissectrice intérieure du troisième angle.)

Considérons le cercle inscrit de centre M et le cercle exinscrit de centre M_A.

On sait que les bissectrices intérieure et extérieure d'un angle du triangle sont perpendiculaires. Les angles $\widehat{M_ABM}$ et $\widehat{MCM_A}$ sont donc droits et le quadrilatère MBM_AC est inscrit dans le cercle de diamètre $[MM_A]$. Par définition, M et M_A sont sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$; ainsi A, M, O_A et M_A sont alignés.

O_A est sur le cercle circonscrit au triangle ABC, car :

$$2\widehat{MM_AC} = \widehat{MO_AC} = \widehat{AO_AC}\,;$$

or

$$2\left(\pi - \frac{\pi}{2} - (a+c)\right) = \pi - 2(a+c) = \widehat{ABC}.$$

Ainsi, comme $\widehat{AO_AC} = \widehat{ABC}$, les points A, B, C et O_A sont cocycliques.

Nous venons de démontrer que les milieux des segments $[MM_A]$, M centre du cercle inscrit, M_A centre d'un cercle exinscrit, sont sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Considérons maintenant deux centres M_A et M_B de cercles exinscrits.

Soient M_A et M_B les centres des cercles exinscrits dont la bissectrice intérieure est issue de A et B respectivement.

Comme précédemment, le quadrilatère M_ABM_BA est inscrit dans le cercle de diamètre $[M_AM_B]$, de centre O_{AB}, milieu du segment $[M_AM_B]$ et passant par A et B. M_B et M_A sont sur la bissectrice extérieure de l'angle $\hat{C}$; ainsi M_A, O_{AB}, C et M_B sont alignés.

O_{AB} est sur le cercle circonscrit au triangle ABC, car :

$$2\widehat{AM_AM_B} = \widehat{AO_{AB}C}.$$

Or,

$$\begin{aligned} 2\widehat{AM_AM_B} &= 2\left(\pi - \frac{\pi}{2} - \widehat{AM_BM_A}\right) \\ &= \pi - 2\left(\pi - \widehat{ABM_A}\right) = -\pi + 2\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = 2b = \widehat{ABC}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\widehat{AO_{AB}C} = \widehat{ABC}$ et les points A, B, C et O_{AB} sont cocycliques.

Nous venons de démontrer que les milieux des segments $[M_AM_B]$, M_A et M_B centres de cercles exinscrits, sont sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Résolution du problème

Les points B, C et $O_A = O$ sont fixés par hypothèse. Le point M est le centre du cercle inscrit ou d'un des cercles exinscrits au triangle ABC et se trouve, ainsi que son symétrique M′ par rapport à O, sur le cercle de centre O passant par B et C.

Le point A est donc sur le cercle circonscrit à O, B et C.

Nous laisserons de côté les cas triviaux où M = B et M = C.

Prenons le point M sur le petit arc de cercle.

L'angle $\widehat{\mathrm{BMC}} = a + b + a + c = 2a + b + c$ est supérieur à un droit. Ainsi,

$$\begin{cases} 2a + b + c > \dfrac{\pi}{2} \\ 2a + 2b + 2c = 2a + b + c + b + c = \pi \end{cases} \Rightarrow b + c < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2b + 2c < \pi.$$

Le point A se trouve donc du côté de M (Cinquième postulat d'Euclide) et M est le centre du cercle inscrit à ABC.

Prenons le point M diamétralement opposé à un point du petit arc de cercle.

Le symétrique M′ de M se trouve donc sur le petit arc et nous nous retrouvons dans le cas précédent.

Le point M n'a pas son symétrique par rapport à O sur le petit arc.

Un raisonnement analogue au précédent montre que le point A se trouve du côté de M et M est le centre d'un cercle exinscrit à ABC.

Jean LEFORT a proposé une solution que l'on trouvera sur le site.