Nouvelle seconde : les questions du professeur de mathématiques

Il s'agit du texte de l'atelier que Catherine Combelles et Pascale Pombourcq ont animé lors du colloque de l'inspection générale les 26 et 27 novembre 2008. Quelques jours plus tard, Xavier Darcos annonçait le report de la réforme. Quand ce texte paraîtra nous ne savons pas si les questions abordées dans cet atelier seront encore d'actualité. Elles peuvent cependant servir de base à une réflexion de l'association sur la classe de seconde.

Ce que nous savons :

Les enseignements sont classés en trois catégories :

- les enseignements généraux (21 heures),
- les enseignements d'exploration ou d'approfondissement (6 h),
- les enseignements d'accompagnement (3h).

Les mathématiques peuvent être présentes dans ces trois dispositifs.

Nos questions :

1. L'enseignement général :

- Quel en sera l'horaire ?
- Disposerons-nous de TP ?
- Quels seront les objectifs ?
- Que sera le programme ?
- Que seront les exigibles ? Cette question en particulier doit être prise au sérieux. C'est toute la différence entre un enseignement simplement « culturel », qui « montre » des mathématiques, et un enseignement beaucoup plus exigeant et difficile, qui vise à rendre les élèves capables de « faire » des mathématiques, en acquérant un certain nombre de méthodes et de savoir-faire. Il convient alors bien sûr de préciser la liste de ces méthodes et de ces savoir-faire, ce qui n'a rien de simple à l'heure où l'usage des moyens de calcul se développe. Quels sont les besoins en calcul de l'étudiant et ceux du citoyen d'aujourd'hui ? La réponse à cette question devrait, à notre sens, conditionner les choix à opérer.

2. L'enseignement d'exploration et d'approfondissement :

- La première question est d'abord la clarification de l'architecture de ces enseignements. Les interprétations sont variées et chacun se transforme en exégète, épluchant les discours du ministre pour y trouver une indication. Pour notre discipline, il s'agit de savoir s'il convient de prévoir deux modules différenciés maths 1 et maths 2, s'il s'agit d'un enseignement annuel pouvant être pris en cours de route, ou s'il s'agit d'un module semestriel unique qui sera répété chaque semestre avec un public différent. La commande diffère sensiblement selon la réponse à ces questions !

- Les mathématiques seront-elles une discipline d'approfondissement et/ou d'exploration ? La conception du travail peut beaucoup différer selon la réponse apportée. Devra-t-on s'appuyer sur le programme du cours obligatoire ou pourra-t-on s'en évader ? L'objet sera-t-il de donner un aperçu des problèmes étudiés dans les classes ultérieures ? Sera-t-il d'assurer les fondements pour mieux armer les élèves pour un parcours scientifique ? Que seront les conditions de cet enseignement ? S'agira-t-il de travail de TP en groupes restreints, sur le modèle des TP scientifiques, qui permettrait de privilégier un travail en salle informatique ? Ou un travail en classe entière qui interdirait au contraire tout travail de ce type ?
- Que sera l'évaluation de cet enseignement, et quel sera le rôle de cette évaluation ? Cette question est elle-même reliée à la forme que prendra l'orientation des élèves. Comment sera-t-elle organisée ? Quelle sera la part de décision des professeurs ? la part des élèves ? la part des familles ? L'enseignement optionnel, dont l'objectif annoncé est d'aider à l'orientation des élèves, ne va-t-il pas être amené à jouer un rôle ? Peut-il s'en abstraire, et doit-il le faire ? Il nous semble qu'il faut examiner ces questions par avance avec lucidité, et prévoir des réponses si l'on ne veut pas que l'enseignement optionnel de mathématiques soit plombé par cet inévitable problème.
- Nous avons des propositions de contenus pour cet enseignement, et ce sera la deuxième partie de notre intervention.

3. L'enseignement d'accompagnement :

La nouveauté est d'abord son caractère obligatoire. C'est aussi son importance horaire. Il semble que les auteurs de la réforme se dédouanent totalement de toute responsabilité sur cet enseignement : il sera géré par les établissements. Les questions sont pourtant nombreuses : quelle forme de contenu ? quels enseignants ? quelle organisation de la répartition des élèves ? De l'étude surveillée par des étudiants en master d'enseignement à l'option sciences impliquant plusieurs professeurs, la gamme des possibles et des moyens mis en œuvre est large ! Ne rêvons pas, cette part de l'enseignement risque fort, s'il n'est pas un peu régulé, de constituer une variable d'ajustement administratif, et d'être souvent réduit à la portion congrue.

Quels contenus pour l'enseignement optionnel de mathématiques ?

1. Un cahier des charges :

- Cet enseignement ne sera pas obligatoire pour une orientation vers un parcours scientifique.
- Il devra montrer ce que sont les mathématiques : une science à part entière, mais aussi au service des autres sciences, un langage pour décrire le monde, mais aussi un outil de décision, une part du patrimoine de l'humanité aussi ancienne que

l'écriture, mais aussi un secteur en pleine évolution, dont le développement est lié aux avancées les plus modernes de la science et de la technologie, un outil qui intervient dans notre vie de tous les jours, même si sa présence n'est pas forcément visible. C'est une obligation de variété et d'ouverture en termes de contenus.

- Il doit être adapté au public qu'il reçoit, alors que ce public est aujourd'hui mal connu. Et il semble, pour compliquer encore les choses, qu'il doive accueillir au deuxième semestre à la fois des élèves qui l'ont déjà suivi et des élèves qui le découvrent. C'est une obligation de souplesse dans l'organisation et la progression.
- Il doit être formateur, c'est l'obligation première de tout enseignement. Mais la formation recherchée ici est spécifique : elle ne peut se décliner en termes de points du programme. Nous proposons de la décliner en terme d'activité de l'élève et donc à la fois en terme de capacités développées et en terme de type de problèmes abordés.
- Il doit laisser à l'élève le temps de la recherche.

Citons pour nourrir cette réflexion un extrait d'un article de Jean-Pierre Richeton, introduisant le travail du groupe « Problématiques » : il analyse ainsi la diversité des mathématiques :
— effectuer un calcul en utilisant un algorithme formel, ***mathématique science formelle*** ;
— optimiser une démarche, un résultat, ***mathématique science de l'économie de pensée*** ;
— représenter une situation par un graphique, un diagramme, ***mathématique science descriptive*** ;
— modéliser et formaliser une situation-problème, ***mathématique science des modèles*** ;
— différencier le général du particulier, ***mathématique science discriminante*** ;
— structurer un ensemble de données, ***mathématique science structurante*** ;
— disposer de méthodes sur la base de la logique propositionnelle, ***mathématique science rationnelle et méthodologique*** ;
— apprécier beauté, élégance (figure, méthode, preuve), ***mathématique science esthétique***.

En résumé : L'enseignement des mathématiques contribue à munir les élèves de modes de pensée et d'outils universels et transférables.

2. Une solution : les TP

Une offre de TP soigneusement organisée autour de thèmes variés nous semble une réponse adéquate à cette équation difficile.

- Elle permet un travail riche poursuivant plusieurs objectifs à la fois en termes de méthode, de capacités développées, de secteur des mathématiques travaillé, de contenu culturel.
- Elle permet, sans imposer de contenus, d'orienter le travail sans révolution brutale

vers les mathématiques du futur : mathématiques discrètes, arithmétique, dénombrement, statistique, probabilités.

- Elle s'affranchit facilement des questions de programmes tout en permettant un travail très consistant.
- Elle permet facilement d'offrir des sujets motivants.
- Elle apporte de la souplesse, car une même situation peut se traiter de façon plus ou moins approfondie pour s'adapter à un public ou à des ressources horaires variables.
- On peut prévoir plusieurs activités poursuivant les mêmes objectifs pour travailler deux fois avec les mêmes élèves un contenu donné, sans apporter de lassitude.
- Cette liste peut être aussi une ressource pour le travail « général », tout comme les sujets de thèmes de la classe de seconde ont pu nourrir le travail dans les années récentes.

Cette liste devra être très large, et proposer des thèmes et des exemples de TP plutôt qu'un travail clef en main, pour ne pas être contraignante, et laisser libre cours à la créativité des professeurs et des élèves. Car un professeur est un acteur qui fabrique son texte, et nous revendiquons une grande marge de liberté, tout en ayant besoin d'objectifs bien explicités et de ressources.

Des exemples :

Les sujets ne manquent pas, et il ne s'agit pas ici de réinventer le monde. Le travail à effectuer nous semble plutôt un travail de recension, de classification. Les brochures présentant des activités intéressantes pour la classe de seconde abondent : les IREM et l'APMEP en ont rédigé beaucoup.
Questionnez n'importe quel professeur de mathématiques chevronné, il est capable de citer trois TP de seconde qu'il affectionne et qu'il pratique régulièrement parce qu'ils sont riches, souples, intéressants et formateurs. C'est un peu ce que nous allons faire pour vous.

1. Deux TP d'arithmétique

Ces deux TP peuvent être un exemple de « TP jumeaux », qu'on peut traiter l'un au premier semestre, l'autre au deuxième semestre, avec des objectifs et des contenus voisins.

Les mathématiques, science à part entière.
Les mathématiques, patrimoine historique et culturel.
Les mathématiques discrètes, outillées par l'informatique.
L'algorithmique, outil de l'informatique.

C'est ce que veut montrer le premier TP : **Le crible d'Ératosthène.**
Secteur étudié : arithmétique, algorithmique.
Objets mathématiques utilisés : nombres premiers, divisibilité, partie entière.
Compétences développées : appliquer un algorithme, (éventuellement) utiliser les fonctions logiques d'un tableur, rédiger un programme.

Ce sujet d’un thème des programmes de 2001 est facile à aborder. La décomposition d’un nombre en produit de facteurs premiers se pratique au collège et ne peut être vue comme un obstacle à la réussite des élèves. Elle constitue un point de culture générale et concerne par exemple les futurs professeurs d’école. Le crible est un exemple d’algorithme bienvenu à ce niveau, qui peut se travailler à des niveaux divers.
On peut commencer par travailler à la main sur une grille fournie aux élèves des entiers de 2 à 100.
On peut étendre ensuite le travail sur tableur, en faisant prendre en charge par le tableur le travail mécanique et un peu fastidieux de suppression des multiples. C’est l’occasion d’introduire la commande « si » du tableur, de mettre en forme la condition « *a* est divisible par *b* », d’apprendre un mécanisme de « remise à zéro ». On peut alors étendre la recherche par exemple aux entiers de 2 à 1000. L’observation du tableau donnant l’emplacement des nombres premiers peut susciter des questions intéressantes et motiver un travail plus poussé sur les nombres premiers, par exemple la question de la distance entre deux nombres premiers successifs.
On peut enfin écrire un programme sur calculatrice ou ordinateur. La méthode usuelle consiste à supprimer dans une boucle les multiples des nombres impairs.
On peut au choix passer sur cette question une heure, deux heures ou trois heures selon le mode de travail choisi.

L’utilisation d’un tableur en arithmétique est le fondement du deuxième TP que nous proposons. Il permet aussi de déterminer la liste des nombres premiers entre 1 et 100, même si ce n’est pas l’objet premier du TP.

Quel est le plus grand nombre de diviseurs d’un entier entre 1 et 100 ?

On pourra d’abord travailler en aveugle en étudiant quelques candidats à un grand nombre de diviseurs. On peut penser que les propositions ne manqueront pas. Cette première phase permettra d’entrer dans le problème, de comprendre que les « petits » diviseurs ont un rôle privilégié.
Un travail systématique sur tableur permet de trouver la solution : 12, et on trouve 5 entiers inférieurs à 100 qui ont 12 diviseurs. Ce sont 60, 72, 84, 90, 96.
L’examen des résultats permet des remarques intéressantes : quels sont les nombres qui ont 2 diviseurs ? Quels sont ceux qui en ont 3 ? Pourquoi trouve-t-on plusieurs nombres qui ont 8 diviseurs mais si peu qui en ont 7 ? Comment s’expliquent les alignements de 1 du tableau ?
Cette étude conduit à établir et à examiner la liste de ces diviseurs, et à la mettre en relation avec la décomposition en facteurs premiers de ces nombres. On pourra construire quelques arbres de diviseurs, et on pourra parvenir jusqu’à la formule donnant le nombre de diviseurs d’un nombre à partir de sa décomposition en produit de facteurs premiers. C’est tout à fait à la portée d’un élève de seconde. On peut poursuivre la réflexion en essayant de prévoir ce que donnerait l’étude jusqu’à 200, puis vérifier les résultats.
Ici encore, le travail peut être poussé plus ou moins loin selon la rapidité et les remarques des élèves.

Ces deux TP peuvent être un exemple de « TP jumeaux », qu'on peut traiter l'un en semestre 1 et l'autre en semestre 2, avec des objectifs et des contenus voisins.

2. Trois TP d'optimisation

Ces trois sujets, très classiques, sont d'inspirations voisines. Ils montrent aux élèves l'efficacité d'un outil essentiel déjà introduit en troisième : la notion de fonction.
Les élèves ont peu de moyens calculatoires pour étudier les variations d'une fonction, c'est la calculatrice ou l'ordinateur qui donnera les résultats. On pourra parfois justifier les résultats obtenus.
Mais ce travail vise un deuxième but : celui de montrer l'intervention des mathématiques dans la vie quotidienne. L'expérience montre que les élèves y sont très sensibles et sont impressionnés de l'adéquation des résultats qu'ils obtiennent avec des objets courants.

• **Le stade :**

Un stade est constitué d'une pelouse centrale rectangulaire (ABCD), complétée par deux demi-disques de diamètres [AD] et [BC]. Ce terrain est entouré par une piste de course à pied : son périmètre est de 400 m.
Quelles doivent être les dimensions du rectangle (ABCD) si l'on veut que son aire soit maximale ?

Les élèves donnent un nom à la longueur AB (L) et au rayon des demi-cercles (R). Le périmètre vaut :

$$2L + 2\pi R = 400,$$

ce qui permet d'écrire soit :

$$L = 200 - \pi R,$$

soit

$$R = (200 - L)/\pi$$

et fournit l'aire à optimiser soit sous la forme :

$$A = 2L\,(200 - L)/\pi,$$

soit sous la forme :

$$A = 2\,(200 - \pi R)\,R.$$

Le maximum est atteint pour $R = 100/\pi$ ou pour $L = 100$ m.

Les pistes de course à pied sont bien construites ainsi : deux lignes droites de 100 m, et deux « virages » de 100 m. On découvre qu’alors le terrain de foot central a une aire maximale !

• La casserole

Pourquoi les batteries de casseroles que l’on trouve dans le commerce sont-elles toutes du même type ? Prenons par exemple la casserole de contenance deux litres. Pourquoi a-t-elle pour dimension à peu près 9 cm de haut pour un diamètre d’à peu près 17 cm quelle que soit la marque achetée ?
La tôle d’une casserole coûte cher au constructeur ! Pour minimiser son coût de fabrication, il faut minimiser la quantité de métal utilisée et donc l’aire de la casserole.

On nomme h la hauteur du cylindre et R son rayon. Le volume vaut 2 000cm^3.

$$V = \pi R^2 h = 2\,000,$$

ce qui fournit :

$$h = 2\,000/\pi R^2.$$

La surface à minimiser est alors :

$$A = \pi R^2 + 2\pi Rh = \pi R^2 + 4\,000/R$$

Les valeurs exactes des dimensions optimales sont :

$$h = R = (2\,000/\pi)^{1/3}.$$

On peut travailler sur la calculatrice, les modèles les plus simples fournissent les coordonnées des extrema avec une grande précision. On peut aussi utiliser un tableur, par balayage avec un pas de 1 puis de 0,1. Une précision au mm près est ici suffisante. On obtient une casserole de 8,6 cm de hauteur, et de diamètre 17,2cm. Ce sont bien les dimensions intérieures d’une casserole ordinaire.

• La boîte de maïs

Une variante du même problème est fournie par le calcul des dimensions d’une boîte de maïs. Pourquoi de maïs ? Les boîtes de conserve ordinaires, disons de petits pois, n’ont pas des dimensions optimisées. Mais le maïs est conservé sous vide, et requiert donc une tôle plus épaisse que les autres boîtes. Les industriels ont donc optimisé les dimensions pour réduire le coût. On impose un volume et le même genre de calcul conduit dans ce cas à un cylindre dont la hauteur est égale au diamètre. C’est bien le cas des boîtes de maïs usuelles.

3. Un TP de dénombrement, la grenouille de Fibonacci

Un escalier comporte 12 marches. La grenouille peut soit monter l’escalier marche par marche, soit en sauter une de temps en temps. Combien de façons a-t-elle de monter l’escalier ?
Le nombre de marches choisi importe peu en fait. On peut penser à commencer par un escalier de deux, trois ou quatre marches. Pour deux marches, il y a 2 possibilités, pour trois marches il y a 3 possibilités, pour quatre marches il y en a 5. En continuant avec 5 marches, on voit apparaître la suite de Fibonacci.

Mais il est aussi possible de travailler sur la décomposition des nombres. Répondre à la question, c'est décomposer le nombre de marches de l'escalier en 1 et 2.

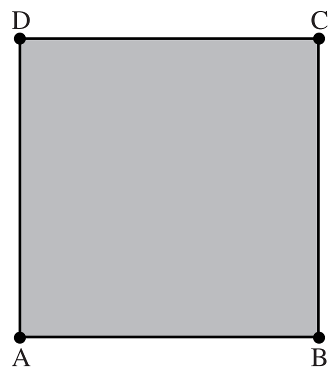
$2 = 1 + 1 = 2$

$3 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1 = 1 + 2$

$4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2$

Cet exercice permet de travailler aussi sur les anagrammes.

4. Un TP de statistiques, promenade aléatoire sur un carré



On veut se déplacer sur le carré du point A vers le point C. À partir du point A deux trajets sont possibles : vers B ou vers D. Pour simuler ces déplacements, on peut donc utiliser le lancer de pièces, c'est-à-dire une suite de pile ou face. Il suffit de définir une convention de déplacement. Pile je tourne dans le sens trigonométrique, face je tourne dans le sens contraire.

F F P P P F F F P F F F P P P P F F P P P F P P P P P P
F P F F P P F F F F F P F F P P F P F P P F P F F P P F
P F P F P P P P F P P P P P P P P P F P F F F F F F F F
P F F P F P P F F F P F F F F

J'utilise cette série de lancers, comme des expériences successives, en effet : FF j'ai traversé le carré donc je suis arrivée, je repars de A et je continue la suite des pile ou face.

Ma série de 99 lancers m'a permis de simuler 31 promenades aléatoires sur le carré. Le temps que j'ai mis à traverser le carré est compté en coups.

J'obtiens la distribution des temps de parcours suivante :

Temps de parcours	2	4	18
Effectif	20	10	1
Fréquence	0,65	0,32	0,03

Le temps moyen mis pour parcourir le carré est dans ce cas de 3,12 coups pour 31 parties.

Pour gagner du temps nous pouvons remarquer que le nombre de coups est obligatoirement pair et doit se terminer par deux lettres identiques.

FFFF P F P FFF P F P FF PPPP F PP FF P FF PP FFFFF PPP
FF PPPP F P FFFF P FF P FF PPP F PPP F P F P FFFFFFF PP
FFFF PPP F PPPP F P F P FFFF P FFF P

Le calcul probabiliste donne 4. Supposons que je traverse le carré en 10 coups, je pars de A et j'arrive en C. Je peux écrire le chemin parcouru de la façon suivante :

A - A - A - A - A - C.

Les tirets signifient que je suis soit en B soit en D, ils symbolisent un évènement certain puisque je n'ai pas d'autres choix. En revanche quand je suis en B ou en D, la probabilité pour retourner en A ou pour arriver en C est de 0,5. La probabilité de traverser en 10 coups est donc donnée par la formule suivante :

$$P(t = 10) = 0{,}5^4 \times 0{,}5 = 0{,}5^5.$$

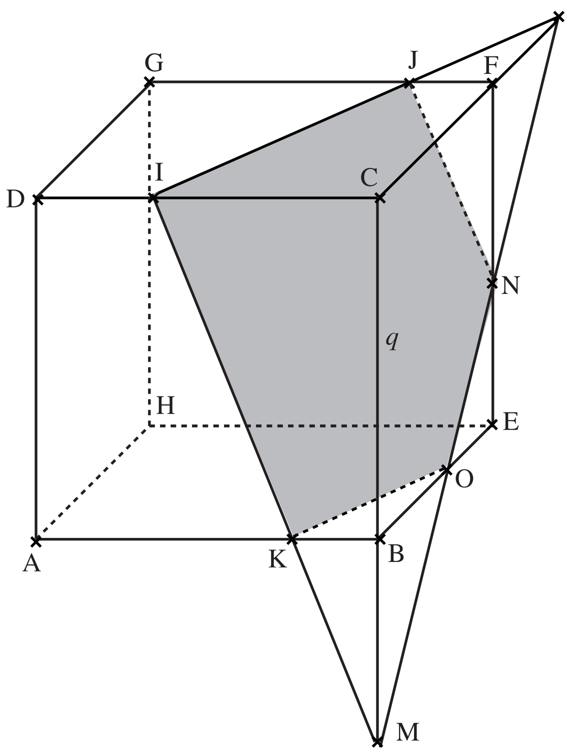
Je peux maintenant généraliser cette formule à une traversée en $2p$ coups :

$$P(t = 2p) = 0{,}5^{p-1} \times 0{,}5 = 0{,}5^p.$$

Il reste à calculer l'espérance de la variable aléatoire t définie comme le nombre de coups nécessaires pour traverser le carré, c'est-à-dire comme le temps mis pour traverser le carré.

L'espérance correspond à un temps moyen de parcours pour un nombre de parties infinies.

5. Un TP de géométrie dans l'espace : patron d'une section de cube



Il s'agit de construire en carton les deux morceaux du cube, coupés par le plan (IJK). Le travail se fait en plusieurs étapes :

- tracé de la figure en perspective,
- calcul de la position du point M (mise en équation utilisant le théorème de Thalès), puis des points O et N,
- tracé du patron des deux parties du cube,
- dessin en vraie grandeur du pentagone de la section,
- confection des deux parties du cube.

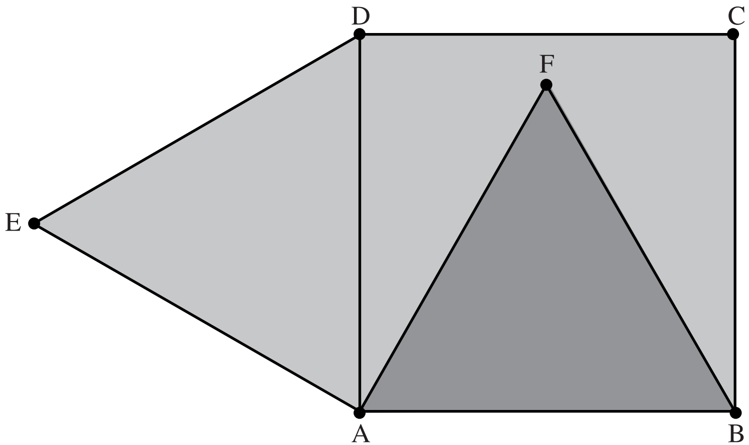
Quelle organisation possible pour l'enseignement optionnel de mathématiques ?

Nous avons du monter cet atelier assez rapidement et les idées de travaux pratiques nous sont venues immédiatement. Nous avions la contrainte de temps qui était de parler pendant une heure pour laisser la place au dialogue avec les participants de l'atelier. Nous avons donc dû trier parmi toutes nos idées. Nous avons essayé de présenter des domaines différents des mathématiques. Lister une cinquantaine de sujets répartis dans des thèmes tels qu'optimisation, arithmétique, dénombrement … est tout à fait faisable. Nous avons commencé à le faire. Voici quelques idées supplémentaires :

- *Optimisation :*
  - le cône de volume maximum dont le patron est découpé dans un disque donné,
  - le plus grand rectangle dans un triangle,
  - le plus grand triangle isocèle inscrit dans un cercle,
  - le plus grand cylindre inscrit dans une sphère.
- *L'idée de similitude :*
  - étude des formats de papier,
  - le format d'un rectangle, le rectangle d'or,
  - étude d'une suite de carrés : côtés, périmètres, aires.
- *Travail sur les nombres :*
  - le développement décimal des rationnels,
  - rationnels et irrationnels,
  - l'algorithme de Babylone : pourquoi une telle vitesse ?
- *Simulations :*
  - on lance 2 dés, 3 dés : on s'intéresse à la somme, au minimum, au maximum des nombres obtenus,
  - l'idée de test : on lance une pièce choisie au hasard entre une pièce équilibrée et une pièce truquée de loi connue. On doit décider en deux lancers si la pièce est truquée ou pas. Comment décider ? Quelle est la probabilité de se tromper ?
- *Arithmétique :*
  - numération : compléter une opération à trous,
  - comprendre l'utilisation d'un boulier,
  - trouver le nombre maximum de diviseurs d'un entier entre 1 et 100.
- *Dénombrement :*
  - 10 personnes se rencontrent, et se saluent en se serrant la main. Combien de

poignées de main sont-elles échangées ?
- elles se mettent à table autour d'une table ronde : combien de dispositions possibles ?
- elles s'alignent pour une photo : combien de dispositions possibles ?

- *Décrire les variations d'une grandeur, par exemple :*
  - On remplit d'eau un récipient conique de contenance 100 l et de hauteur 80cm. Le débit est de 1/3 l/s. Tracer le graphique donnant la hauteur de l'eau en cm en fonction du temps en minutes.
- *Trouver le plus de solutions possibles à un problème. Par exemple :*



- Les points E, F et C sont-ils alignés?

En conclusion, dans le cadre de la nouvelle classe de seconde,
- les TP nous semblent une réponse adaptée à l'enseignement optionnel,
- pour les mettre en place, il faudra établir une liste de thèmes d'activités, en variant les types de problèmes, les méthodes, les cadres de résolution,
- proposer des ressources abondantes tout en laissant libre cours à la créativité des professeurs.