Orthocentres et aires

Comment un résultat peu connu a été (re)trouvé grâce à un logiciel de géométrie dynamique

Louis Rivoallan(*)

Je vais mourir étouffé par l'orgueil, mais mourir heureux.
J'ai trouvé « un théorème ».
Probablement, d'ici peu, un des lecteurs objectera que le résultat était connu depuis des lustres, mais quand même, je suis très fier.
Et puis, en attendant que ce lecteur – que je hais par avance – apporte la mauvaise nouvelle, permettez-moi de vous conter ma trouvaille(1).
D'abord le théorème en question :
Dans un plan, on considère un triangle ABC et un point M quelconque non situé sur les droites (AB), (BC) ou (CA). Soit A′, B′ et C′ les orthocentres respectifs des triangles MBC, MCA et MAB.
Alors les triangles ABC et A′B′C′ ont la même aire.

La démonstration ?
Comme je n'ai pas trouvé de démonstration géométrique, je me suis lancé dans de pénibles calculs de géométrie analytique. On donne des coordonnées aux points A, B, C et M, puis on calcule les coordonnées de A′, B′ et C′, et enfin on compare les produits vectoriels $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}$. C'est long et pas marrant, mais ça marche. Depuis, j'ai trouvé mieux (cf. annexe 1), mais cela reste très calculatoire.
Là encore, il y a un lecteur, que je hais au moins autant que le précédent, qui va trouver une jolie démonstration géométrique. Pour peu que ce soit le même ...(2) (cf. annexe 3).

Une démonstration d'un résultat probablement connu depuis des siècles mérite-t-elle un article dans ce bulletin vert ? Non bien sûr. En revanche, comment j'ai trouvé cette propriété qui m'était parfaitement inconnue me paraît intéressant.

(*) louis.rivoallan@gmail.com
(1) Il n'aura pas fallu attendre longtemps pour trouver ce lecteur ! Dès la relecture de cet article, J.-P. Friedelmeyer, membre de la commission, particulièrement fureteur disent ses amis, a déniché l'énoncé de cette propriété dans le *Traité de géométrie* de Rouché et Comberousse, édition de 1935, première partie Géométrie plane, page 502 (exercice 9). Sans démonstration, ni aucune indication de méthode.
(2) Ce n'est qu'une formule de style, car ce sentiment m'est totalement étranger. D'autant plus que, piqués au vif, Marc Roux et J.-P. Friedelmeyer, les relecteurs précédents, ont trouvé deux autres démonstrations. L'une, calculatoire, qui utilise les propriétés des déterminants (annexe 3) ; l'autre, plus géométrique, « à la Euclide », et qui se termine grâce à un théorème sur les polynômes, est trop longue et compliquée pour être incluse ici.

C'est grâce à GEOGEBRA et à la rubrique « petits problèmes » que publie Corol'aire, notre publication régionale du Poitou-Charentes. J'y participe régulièrement, parfois pour apporter des solutions, parfois pour proposer des énoncés.
À la recherche d'énoncés « nouveaux », j'ai eu l'idée de prendre un triangle ABC quelconque, un point M quelconque. Ayant tracé les segments [AM], [BM] et [CM], il a été facile de faire apparaître les centres des cercles circonscrits aux triangles MAB, MBC et MCA que j'ai appelé C′, A′ et B′.
GEOGEBRA permet d'afficher les aires des polygones.
C'est en déplaçant le point M que je me suis rendu compte du résultat suivant :
(P2) Si le point M était l'orthocentre de ABC, alors le triangle A′B′C′ était l'image de ABC dans la symétrie centrale dont le centre est le centre du cercle des neuf points de ABC (et de A′B′C′ aussi d'ailleurs)[(3)].
Je tenais là un bel énoncé dont la solution est abordable en classe de Première S (prévoir des questions intermédiaires cependant).
D'autant plus que cette configuration est la source de nouvelles conjectures (cf. Annexe 4).

Fort de ce premier pas, à partir de la même configuration, ABC et M quelconques, au lieu de regarder les centres des cercles circonscrits, j'ai fait apparaître les orthocentres, en gardant les notations.
Et là, quelle ne fut pas ma surprise de constater que les triangles ABC et A′B′C′ avaient toujours la même aire.
Vous connaissez la suite.
Pas tout à fait cependant car, en observant de plus près, on voit que si M est sur le cercle circonscrit à ABC alors les triangles ABC et A′B′C′ sont isométriques. Là encore la démonstration est accessible à un élève de Première S (cf. annexe 2).

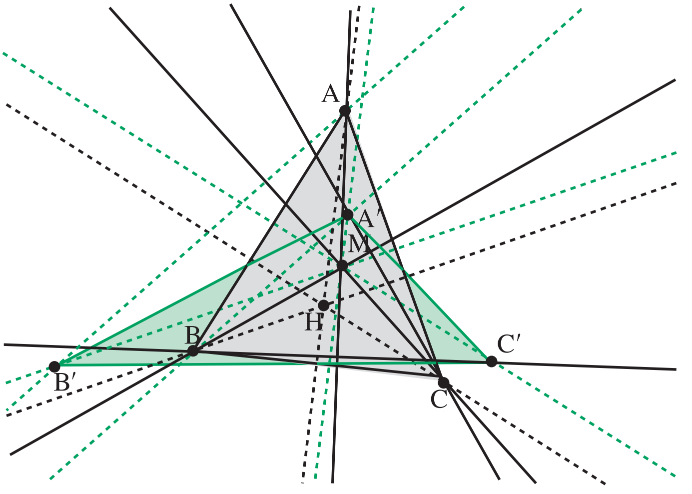
Les logiciels de géométrie dynamique permettent de multiplier les tracés, de faire bouger les figures, de faire des calculs aussi. Avec un papier et un crayon, jamais je n'aurais eu le courage de faire ces figures, et encore moins de faire les calculs d'aire. Et je n'aurai pas trouvé « mon » théorème. Avouez que cela aurait été regrettable.

Dernière minute : j'apprends que l'équipe de L'OUVERT (journal de la régionale d'Alsace de l'APMEP) s'est « attaquée » à ce problème et a découvert :
1) une démonstration géométrique pure, simple et élégante, avec une première généralisation ;
2) une démonstration algébrique également simple, se généralisant à toutes les dimensions.
Espérons-en une publication prochaine.

(3) Le cercle des neuf points d'un triangle ABC, encore appelé cercle d'Euler, passe par 9 points remarquables du triangle ABC : les trois milieux des côtés, les trois pieds des hauteurs et les trois milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets. De plus, son centre est le milieu du segment dont les extrémités sont l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit à ABC, et le centre de gravité du triangle est aligné avec ces trois points (droite d'Euler).

Annexe 1 : la démonstration

Soit un triangle ABC non rectangle et M un point quelconque;
On note A′, B′ et C′ les orthocentres respectifs des triangles MBC, MCA et MAB.
Alors les triangles ABC et A′B′C′ ont la même aire.



La démonstration ci-dessous sera faite en partie de façon analytique.

Soit un repère orthonormé $\left(\mathrm{M}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit $\mathrm{A}\left(a_1,a_2\right)$, $\mathrm{B}\left(b_1,b_2\right)$, $\mathrm{C}\left(c_1,c_2\right)$ trois points quelconques du plan.

L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\right|$.

Or $\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MC}}-\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right)$.

Compte tenu de la bilinéarité du déterminant, on a :

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MB}},\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right)-\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MB}},\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right)-\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right)+\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right).$$

Et en utilisant le fait qu'il s'agit d'une forme bilinéaire antisymétrique, on a :

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MB}},\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right)+\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MC}},\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right)+\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right).$$

Le point C′, orthocentre du triangle MAB est donc le point d'intersection de la hauteur issue de A relative à (MB) et de la hauteur issue de B relative à (MA). Pour déterminer ses coordonnées, il suffit donc d'écrire $\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=0$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}}=0$, puis de résoudre le système formé par ces deux équations. Après calculs :

$$\overrightarrow{\mathrm{MC'}}=\frac{a_2b_2+a_1b_1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{pmatrix}b_2-a_2\\-(b_1-a_1)\end{pmatrix}.$$

Et de façon analogue, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{MB}'}=\frac{c_2a_2+c_1a_1}{c_1a_2-c_2a_1}\begin{pmatrix}a_2-c_2\\-(a_1-c_1)\end{pmatrix}.\quad \overrightarrow{\mathrm{MA}'}=\frac{b_2c_2+b_1c_1}{b_1c_2-b_2c_1}\begin{pmatrix}c_2-b_2\\-(c_1-b_1)\end{pmatrix}.$$

De façon analogue à ce qui a été calculé auparavant,

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A'B'}},\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}\right)=\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MB'}},\overrightarrow{\mathrm{MC'}}\right)+\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MC'}},\overrightarrow{\mathrm{MA'}}\right)+\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MA'}},\overrightarrow{\mathrm{MB'}}\right).$$

Calculons chacun de ces trois déterminants.

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MB'}},\overrightarrow{\mathrm{MC'}}\right)=\frac{c_2a_2+c_1a_1}{c_1a_2-c_2a_1}\times\frac{a_2b_2+a_1b_1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{vmatrix}a_2-c_2 & b_2-a_2\\-(a_1-c_1) & -(b_1-a_1)\end{vmatrix}.$$

Les règles de calculs sur les déterminants permettent d'écrire successivement :

$$\begin{vmatrix}a_2-c_2 & b_2-a_2\\-(a_1-c_1) & -(b_1-a_1)\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_2-c_2 & b_2-a_2\\a_1-c_1 & b_1-a_1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1-c_1 & b_1-a_1\\a_2-c_2 & b_2-a_2\end{vmatrix}=\det\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right).$$

Par ailleurs,

$$a_2b_2+a_1b_1=\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\mathrm{MA}\times\mathrm{MB}\cos\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)$$

et

$$a_1b_2-a_2b_1=\mathrm{MA}\times\mathrm{MB}\sin\left(\widehat{\mathrm{C}}\right).$$

Alors

$$\frac{a_2b_2+a_1b_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{\mathrm{MA}\times\mathrm{MB}\cos\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)}{\mathrm{MA}\times\mathrm{MB}\sin\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)}=\frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)}.$$

De même

$$\frac{c_2a_2+c_1a_1}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{B}}\right)}.$$

On peut donc écrire :

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MB'}},\overrightarrow{\mathrm{MC'}}\right)=\frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{B}}\right)}\times\frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)}\times\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right).$$

On obtient des expressions analogues pour les autres déterminants, ce qui permet d'écrire :

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A'B'}},\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{B}}\right)}\times\frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)}+\frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)}\times\frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{A}}\right)}+\frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{A}}\right)}\times\frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{B}}\right)}\right)\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right).$$

On réduit au même dénominateur :

$$\det\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)=\frac{\tan\left(\widehat{A}\right)+\tan\left(\widehat{B}\right)+\tan\left(\widehat{C}\right)}{\tan\left(\widehat{A}\right)\times\tan\left(\widehat{B}\right)\times\tan\left(\widehat{C}\right)}\times\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right).$$

Or c'est un résultat classique, donc bien connu, que, pour les trois angles d'un triangle non rectangle, $\dfrac{\tan\left(\widehat{A}\right)+\tan\left(\widehat{B}\right)+\tan\left(\widehat{C}\right)}{\tan\left(\widehat{A}\right)\times\tan\left(\widehat{B}\right)\times\tan\left(\widehat{C}\right)}=1$.

L'égalité des déterminants entraîne l'égalité des aires des triangles ABC et A′B′C′.

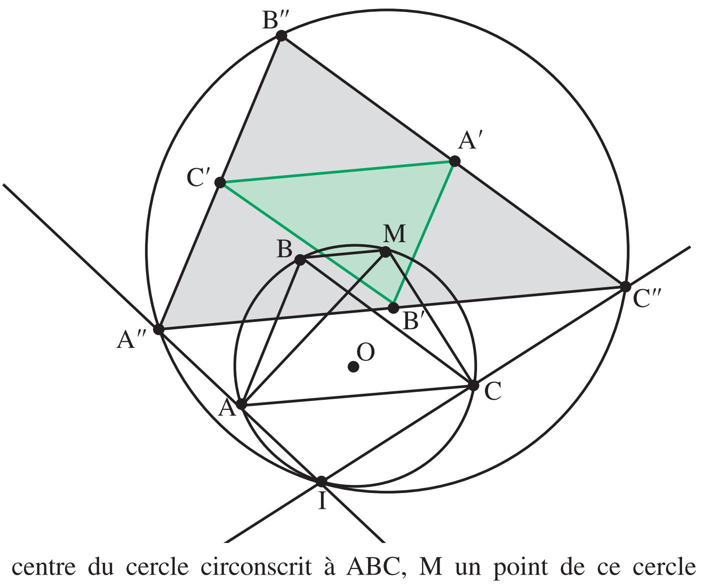
Lorsque le triangle ABC est rectangle, par exemple en A, alors tous les termes où apparaît $\cos\left(\widehat{A}\right)$ sont nuls et la relation s'écrit alors

$$\det\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)=\frac{1}{\tan\left(\widehat{B}\right)}\times\frac{1}{\tan\left(\widehat{C}\right)}\times\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right).$$

Mais alors $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires et $\dfrac{1}{\tan\left(\widehat{B}\right)}\times\dfrac{1}{\tan\left(\widehat{C}\right)}=1$.

La propriété est encore vraie dans le cas où ABC est un triangle rectangle.

ANNEXE 2.
Cas particulier où le point M est sur le cercle circonscrit à ABC



Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC, M un point de ce cercle et I son symétrique par rapport à O.

Soit A″, B″ et C″ les images respectives de A, B et C dans l'homothétie de centre I et de rapport 2.
Soit c, b et a les milieux respectifs des segments [A″B″], [C″A″] et [B″C″].
On va montrer que c, b et a sont les orthocentres des triangles MAB, MCA et MBC.
Par construction B est le milieu de [IB″].
Par suite le théorème des milieux dans le triangle IA″B″ permet de dire que (cB) est parallèle à (A″I).
Puisque [MI] est un diamètre du cercle circonscrit à ABC, (MA) est perpendiculaire à (AI), d'où l'on déduit que (MA) est perpendiculaire à (cB).
De façon analogue, on a (MB) perpendiculaire à (cA).
Par suite le point c est l'orthocentre du triangle MAB. Autrement dit c est égal à C′.
On montre de même que a = A′ et b = B′.
On sait que le triangle formé par les milieux des cotés d'un triangle est l'image de ce triangle par une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ ayant pour centre le centre de gravité du triangle.
Par conséquent le triangle A′B′C′ est l'image du triangle ABC par la composée de deux homothéties dont le produit des rapports est −1, c'est-à-dire une symétrie centrale.
A′B′C′ est donc isométrique à ABC.
Remarque : le point M est l'orthocentre du triangle A′B′C′.

ANNEXE 3. Démonstration de la « propriété de Rivoallan » – Variante

1. L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|$ et celle du triangle A′B′C′ est égale à $\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)\right|$.

Il suffit donc de montrer que $\det\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)=\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

2. Remarquons d'abord que, A′ étant l'orthocentre de MBC, on a (CA′) ⊥ (MB) et, C′ étant orthocentre de MAB, on a (AC′) ⊥ (MB) ; d'où (AC′) // (A′C).
De même (AB′) // (A′B) et (BC′) // (B′C).

On en déduit que les déterminants $\det\left(\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{A'C}\right)$, $\det\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{A'B}\right)$, $\det\left(\overrightarrow{BC'},\overrightarrow{B'C}\right)$ sont tous nuls.

3. $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\det\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right)+\det\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}\right)+\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$

(démonstration : voir Rivoallan) ; de même :

$\det\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)=\det\left(\overrightarrow{MB'},\overrightarrow{MC'}\right)+\det\left(\overrightarrow{MC'},\overrightarrow{MA'}\right)+\det\left(\overrightarrow{MA'},\overrightarrow{MB'}\right)$.

On décompose les vecteurs de façon à faire apparaître les déterminants nuls vus en 2 :

$$\det\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)=\det\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB'},\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC'}\right)$$
$$+\det\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA'}\right)+\det\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB'}\right)$$

On « développe » :

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)&=\det\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}\right)+\det\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{BC'}\right)+\det\left(\overrightarrow{CB'},\overrightarrow{MB}\right)+\det\left(\overrightarrow{CB'},\overrightarrow{BC'}\right)\\
&\quad+\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right)+\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{CA'}\right)+\det\left(\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{MC}\right)+\det\left(\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{CA'}\right)\\
&\quad+\det\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)+\det\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{AB'}\right)+\det\left(\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{MA}\right)+\det\left(\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{AB'}\right)\\
&=\det\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}\right)+\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right)+\det\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)\\
&\quad+\det\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{BC'}\right)-\det\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{AC'}\right)+\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{CA'}\right)-\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{BA'}\right)\\
&\quad+\det\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{AB'}\right)-\det\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{CB'}\right)+0+0+0\\
&=-\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\det\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{BA}\right)+\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{CB}\right)+\det\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{AC}\right)\\
&=-\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\det\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)\\
&\quad+\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{CB}\right)+\det\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\\
&=-\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)\\
&\quad+\det\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)+\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\\
&=-\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+0+2\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\\
&=\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right).
\end{aligned}$$

ANNEXE 4 : quelques conjectures à démontrer...

Plusieurs conjectures sont apparues à propos de la configuration suivante :

Soit un triangle ABC et un point M non situé sur les droites (AB), (BC) et (CA). On considère A′, B′ et C′ les centres des cercles circonscrits respectivement à MBC, MCA et MAB . On note ϕ la fonction $M\mapsto\dfrac{\text{aire}(A'B'C')}{\text{aire}(ABC)}$. On démontre que lorsque M est l'orthocentre de ABC, alors $\phi(M) = 1$ et que si M appartient au cercle circonscrit de ABC alors $\phi(M) = 0$.

1. Mais il semblerait que si le point M est à l'intérieur de ABC, alors $\phi(M) \geq 1$
Quel est l'ensemble des points M situés à l'intérieur de ABC lorsque ϕ est minimale ? Il semblerait que lorsque ABC est acutangle que cet ensemble soit réduit à l'orthocentre de ABC.

2. Quel est l'ensemble des points M tels que $\phi(M) = 1$?