La règle à calcul à travers les classes

Bruno Alaplantive[*]

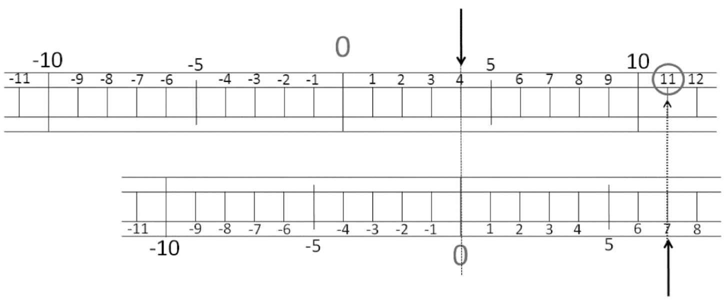
L'APMEP promeut les mathématiques de la maternelle à l'université. Je jongle pour ma part cette année, de la sixième à la terminale. Ce n'est pas de tout repos mais fort intéressant et enrichissant.
Le manque d'élèves pour mettre les sommes algébriques en théâtre en cinquième, allié à la question du *parachutage* des logarithmes en terminale m'ont curieusement poussé à envisager une réponse analogue : la règle à calcul[1]. L'instrument n'est certes pas nouveau mais mérite d'être manipulé voire créé.

1. Règle à additionner et soustraire les entiers relatifs (en Cinquième)

Il s'agit tout simplement de faire coulisser une règle graduée le long d'une autre (graduation régulière, au sens habituel).

• Avec les nombres « habituels »[2] : les entiers naturels

Pour additionner

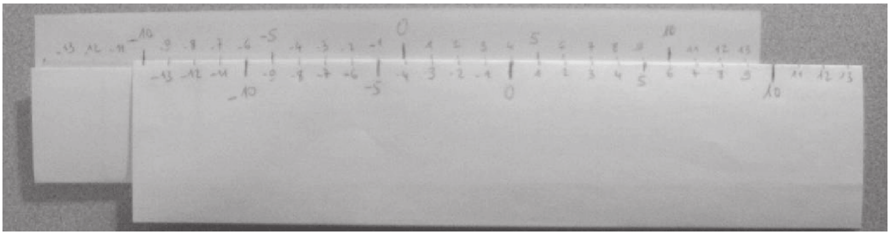


Calcul de 4 + 7
((+4) + (+7))

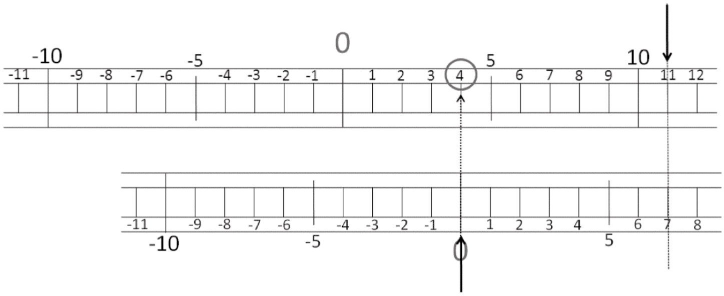
Il faut lire le premier nombre sur la règle du haut ; amener le zéro du bas sous ce premier nombre ; lire le second nombre sur la règle du bas. Le résultat est situé juste au-dessus de ce second nombre.

Ci-dessous, une règle fabriquée avec une feuille de papier. On plie les deux bandes pour les faire coulisser l'une le long de l'autre et on fait la graduation des deux en même temps.

(*) Lycée Louis Pasteur, Calgary. bruno.alaplantive@free.fr
(1) En fait, une première approche a été celle de la construction approchée de la courbe de ln entre 1 et 6, suivant la méthode d'Euler.
(2) On peut éventuellement fabriquer ou montrer une première règle et ne travailler qu'avec les entiers naturels.



Pour soustraire



Calcul de 11 – 7

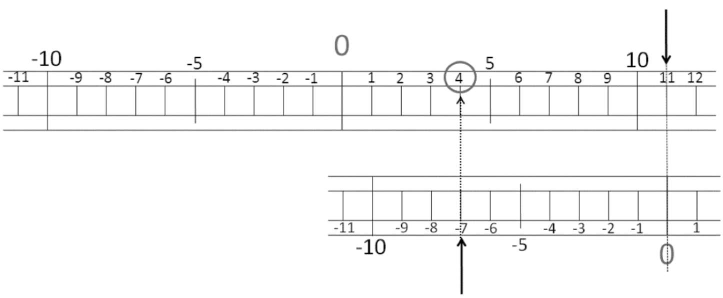
((+11) - (+7))

Il faut lire le premier nombre sur la règle du haut ; amener le second nombre sous ce premier nombre. Le résultat est situé juste au-dessus du zéro du bas.

• **Avec les nombres relatifs**

Rien ne change pour la manipulation de la règle !

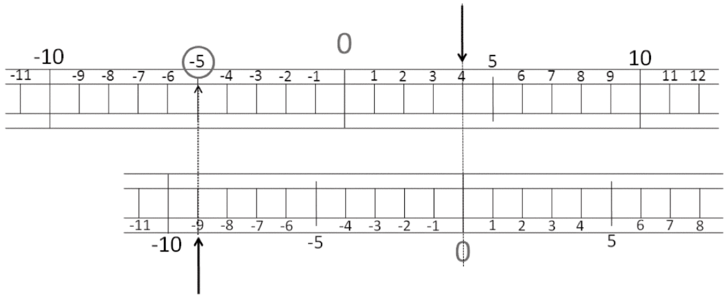
→ Une autre façon de concevoir 11 − 7



Calcul de 11 – 7

((+11) + (-7))

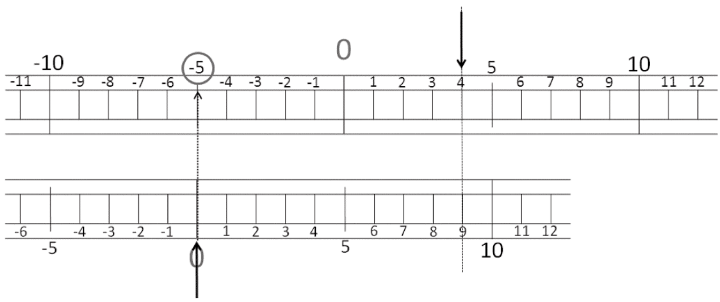
→ Et si on ajoute un négatif qui fait repasser de l'autre côté du zéro du haut…



Calcul de 4 – 9

((+4) + (-9))

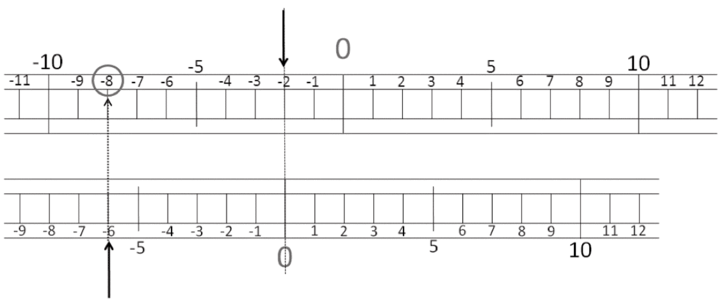
c'est comme si on avait retiré plus que ce que l'on a !



Calcul de 4 – 9

((+4) - (+9))

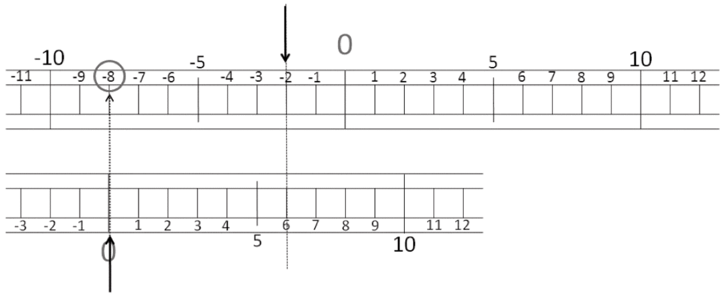
→ Ajouter deux nombres négatifs…



Calcul de -2 - 6

((-2) + (-6))

ou

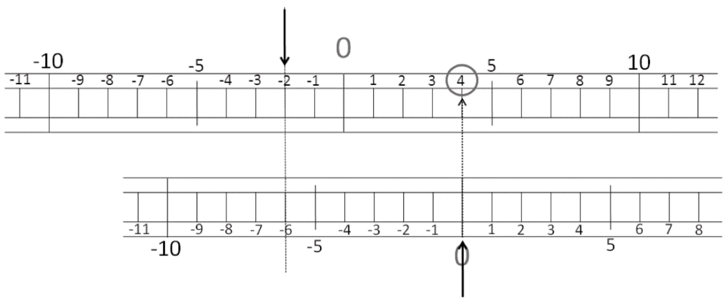


Calcul de -2 - 6

((-2) - (+6))

c'est s'éloigner à gauche de zéro deux fois de suite.

→ Il ne reste plus qu'à retirer un négatif…



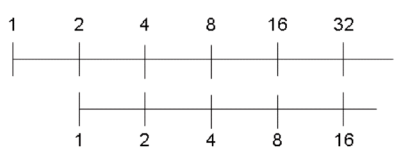
Calcul de (-2) – (- 6)

((-2) ...???..) *Alors ?*

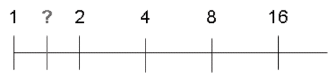
Vers une règle à multiplier (en troisième)

Il s'agit toujours de faire coulisser une règle graduée le long d'une autre, le problème étant d'établir la graduation adéquate.

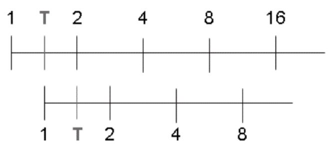
• **Pour commencer**



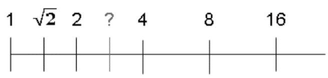
Les puissances de 2 sont celles qui permettent de placer le plus de nombres des tables de multiplications habituelles, mais bon, ça ne fait que les puissances de 2 ; ce n'est pas top. Pourtant si on essaye de graduer davantage…



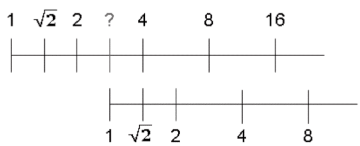
Non, non, ce n'est pas 1,5 ! En effet



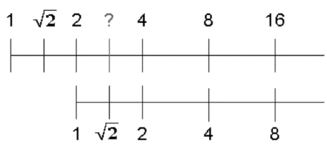
il faut T × T = 2 *(c'est quand même bien commode l'écriture littérale)*. On reconnaît (ou on définit) $\sqrt{2}$. Et ensuite



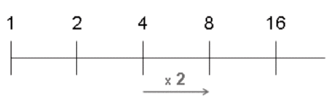
Alors, ce n'est pas 3 et non, non, ce n'est pas $\sqrt{4}$ puisque $\sqrt{4} = 2$. C'est le nombre qui, multiplié par $\sqrt{2}$, donnera 4.



Hum… Mais c'est aussi …

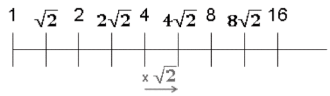


Tonnerre, 2 $\sqrt{2}$!!! Du déplacement initial(3),



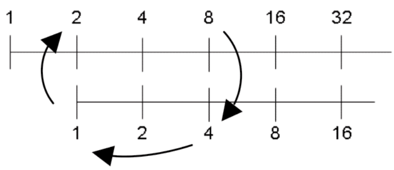
nous en sommes maintenant à

(3) Plus de vecteur, plus de translation… !



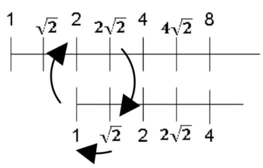
Voilà donc du calcul en prévision.

D’autant que la règle à multiplier peut bien évidemment servir de règle à diviser.



$$8 : 4 = 2$$

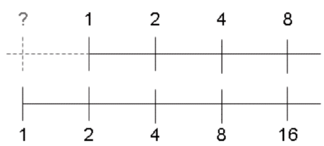
ou



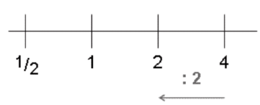
$$2\sqrt{2} \;:\; \sqrt{2} = 2.$$

Voilà donc une nouvelle perspective… Barre à gauche, toute !

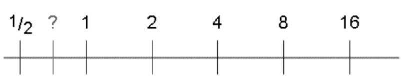
Et si on divisait par plus grand que le nombre de départ ?



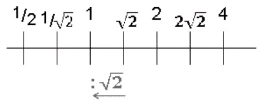
À ce stade, si on n’a pas trop perdu les élèves, on peut espérer ne pas entendre 0 mais bien 1/2 ; l’explication la plus convaincante étant certainement :



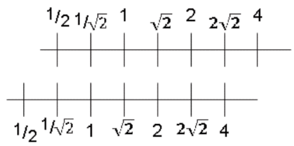
Ainsi, par prolongement pour



on obtient ;



et les différentes lectures de la position



amènent les égalités $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Etc.

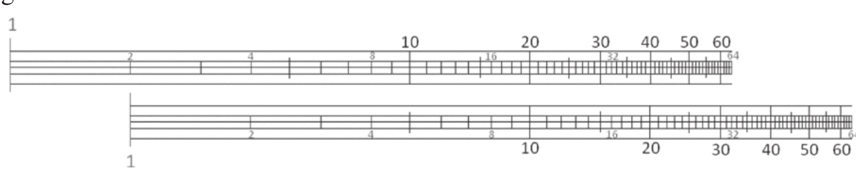
3. Un prolongement possible au lycée

• Où donc est 3 ?(4)

Si les élèves de troisième ont vu l'approche avec $\sqrt{2}$, on peut alors envisager au lycée de prolonger l'activité en demandant de placer 3...
Une recherche sur tableur permet d'approcher 3 par dichotomie. On obtient $2\sqrt{2}\sqrt[16]{2}\sqrt[64]{2}\sqrt[128]{2}$ ou $2\cdot 2^{1/2}\cdot 2^{1/16}\cdot 2^{1/64}\cdot 2^{1/128}$ soit encore $2\cdot 2^{75/128}\approx 3{,}002$.
On peut ensuite placer tous les $2^n\times 3^p$ en utilisant la règle.

• Pour conclure

Arrivé à ce stade il est temps de dévoiler les logarithmes qui permettent d'abréger grandement les placements de 5, 7, 11, 13 et tous ces curieux nombres entiers qu'on n'arrive pas à écrire sous forme de multiplication pour pouvoir les placer sur la règle(5)…



Utilisation de la règle à calculer :

– En sixième : multiplication et division des décimaux, ordres de grandeurs, …

– En Terminale : pour dévoiler les logarithmes ou s'en servir, selon.

(4) où l'on retrouve le problème du nénuphar géant qui double de surface tous les jours : s'il double en une journée, quelle est sa croissance en une demi-journée ? Et en 1/3 de journée ? …
(5) Voir le fichier R_calcul_2.ppt sur le site de l'APMEP (http://www.apmep.asso.fr/)