Problèmes d'antan 4

Michel Fréchet

En feuilletant les anciens bulletins de notre association, on trouve des sujets d'exercices et de problèmes. Nous publierons dans chaque Bulletin Vert des exemples de ces exercices d'antan.

Envoyez vos propositions de solutions à frechetm.apmep@wanadoo.fr. Les meilleurs seront publiées.

Bacc. Math. – *Lyon, Octobre 1920 :*

1. Soit un cercle O et un de ses diamètres, BC. On prend un point M de la circonférence du cercle O et, du point M comme centre, on trace la circonférence tangente à BC ; des points B et C on mène les tangentes à cette circonférence de centre M. Démontrer que ces deux tangentes sont parallèles.
2. On suppose maintenant que BC est une corde et non plus un diamètre du cercle O et l'on effectue la même construction. Les tangentes issues de B et C au cercle M se coupent alors en un point A. Trouver les lieux du point A quand M parcourt sur la circonférence O chacun des deux arcs sous-tendus par la corde BC.

Solutions, Problèmes d'antan nº 1, BV nº 476

Énoncé exercice nº 2

Soit un triangle isocèle ABC (AB = BC). Construire le foyer F de la parabole tangente en A et B aux côtés AC et BC. Lieu du point I, projection du foyer F sur AC, et enveloppe de la droite FI quand A et B restant fixes, le sommet C du triangle isocèle se déplace.

Solution

Rappels

La **parabole** est le lieu géométrique des points du plan équidistants d'un point fixe F et d'une droite fixe Δ.

F est le **foyer** de la parabole.

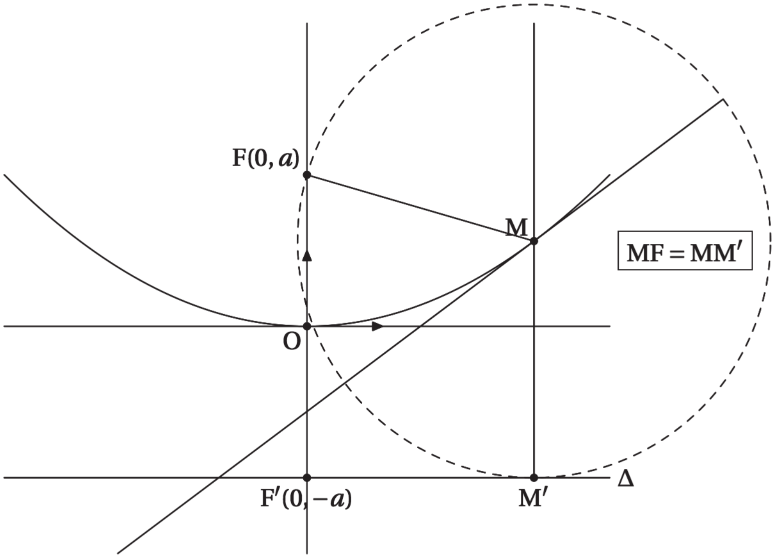
Δ est la **directrice** de la parabole.

La droite passant par F et orthogonale à la directrice est appelé **axe** (de symétrie) de la parabole.

La parabole est donc le lieu des centres de cercles tangents à Δ et passant par F.

Tangentes à la parabole

Pour construire un point M, on se donne un point M′ sur la directrice, le point M se trouve à l'intersection de la médiatrice de [M′F] avec la perpendiculaire à la directrice issue de M′.
La médiatrice est alors la tangente à la parabole. En effet :



Considérons un repère orthonormal dont l'origine est le milieu O de [FF′]. Nous avons alors ($a \neq 0$) :

$$F(0,\ a)\ ;\ F'(0,\ -a)\ ;\ M(x,\ y)\ ;\ M'(x,\ -a)\ ;\ MF = MM'$$

$$MM' = MF \Leftrightarrow MF^2 = MM'^2 \Leftrightarrow (x-x)^2 + (y+a)^2 = (0-x)^2 + (a-y)^2$$

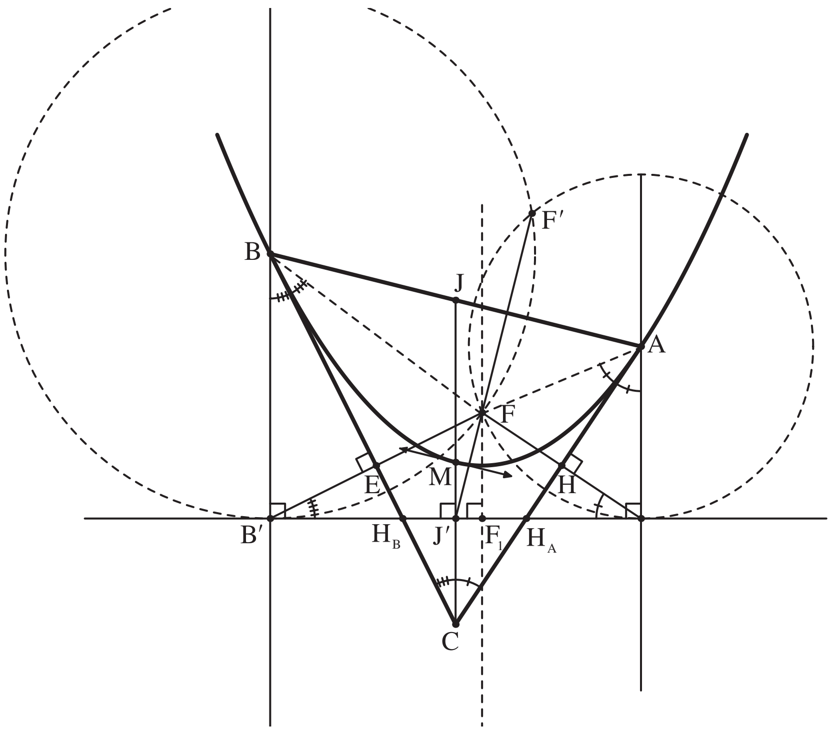
$$\Leftrightarrow y = f(x) = \frac{1}{4a}x^2.$$

Le coefficient directeur de la tangente en $M_0(x_0,\ y_0)$ est : $f'(x_0) = \dfrac{1}{2a}x_0$.

La médiatrice de $[M_0F]$ a pour coefficient directeur : $\dfrac{x_0}{2a}$.

$$\overrightarrow{M'F}\begin{pmatrix} x_0 \\ -2a \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2a \\ x_0 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{x_0}{2a} \end{pmatrix}.$$

La tangente et la médiatrice ont même coefficient directeur, elles passent par M_0 ; elles sont donc confondues.



Analyse

Supposons le problème résolu.

Diamètre :

Soient A et B deux points construits comme indiqués précédemment. A′ et B′ sont leurs projections orthogonales respectives sur la directrice Δ.

A et B sont les centres des cercles C_A et C_B de rayons AF et BF respectivement.

Ces deux cercles se coupent en un autre point F′. La droite *f* = (FF′) coupe Δ en J′. Si F = F′, on considère la droite *f* tangente commune aux deux cercles.

On a (puissance d'un point par rapport à un cercle) :

$$J'F \times J'F' = J'A'^2 = J'B'^2 \Rightarrow J'A' = J'B'.$$

Ainsi J′ est le milieu de [A′B′].

La droite *f* est perpendiculaire à la droite (AB). Elle passe par le point fixe F. Si l'on considère deux autres points A et B situés sur une autre corde à la parabole parallèle à (AB), le point J′ ne changera pas.

Soit J le projeté de J′ sur (AB) parallèlement à l'axe (FF_1). C'est le milieu du segment [AB] et (JJ′) est la médiatrice de [A′B′].

Ainsi :

Le lieu des milieux des cordes d'une parabole parallèles à une direction (AB) est une droite parallèle à l'axe ; cette droite est appelée diamètre de la parabole relativement à la corde [AB]. Cette corde

devient tangente en un point M ; ce point est appelé sommet de la parabole relativement à ce diamètre.

***Montrons que le diamètre passe par* C.**

(CB) est médiatrice de [B′F], donc CB′ = CF.

(CA) est médiatrice de [A′F], donc CA′ = CF.

Ainsi, CB′ = CA′, ce qui signifie que C est sur la médiatrice du segment [A′B′] ; comme J′ est le milieu de [A′B′], (CJ′) est la médiatrice de [A′B′]. Ainsi (CJ′) = (JJ′) et le diamètre passe par C. Ce diamètre est donc la médiane du triangle ABC issue de C.

Nous connaissons donc la direction de l'axe de la parabole.

Angles :

(AC) est la médiatrice du segment [A′F], c'est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{FAA'}$.

(A′B′) étant tangent au cercle CA, on a : $\widehat{FA'B'} = \frac{1}{2}\widehat{FAA'} = \widehat{FAC}$.

D'autre part, les triangles rectangles $HA'H_A$ et $J'CH_A$ sont semblables donc : $\widehat{JCA} = \widehat{FA'B'}$.

Ainsi, $\widehat{FAC} = \widehat{JCA}$.

De même : $\widehat{FBC} = \widehat{JCB}$.

Synthèse

Construire le foyer revient à :

- Construire la médiane (CJ) de ABC issue de C,
- construire la droite (FA) vérifiant $\widehat{FAC} = \widehat{JCA}$, intérieure au triangle ABC,
- construire la droite (FB) vérifiant $\widehat{FBC} = \widehat{JCB}$, intérieure au triangle ABC.

Le foyer de la parabole est donc l'intersection de (FA) et (FB).

Aucun lecteur du BV n'a fourni de solutions pour l'étude des lieux. Nous la proposerons donc plus tard.

Éric Oswald, de Borgo (20290) a proposé une autre solution que l'on trouvera sur le site internet de l'APMEP.