Exercices de ci, de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire. Par ailleurs, les exercices de géométrie prennent une part importante de la rubrique ; il serait souhaitable qu'il y ait plus de propositions d'exercices d'algèbre et d'analyse.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer à :

Serge Parpay
22 rue Alphonse Rougier
79000 NIORT
ou par Mél à : jeanfromentin@orange.fr

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique en joignant, si vous le pouvez, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent dégérées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 479-1 (Pierre Renfer – Ostwald)

J'ai trouvé sans démonstration, dans l'excellent livre « *Les nombres remarquables* »[(1)] de François Le Lionnais, que 59 était le nombre de régions découpées dans l'espace par les plans des faces d'un octaèdre régulier. Comment le prouver ?
Pierre Renfer vous propose cet exercice (qu'il a bien sûr résolu).

Exercice 479-2 (Jean Théocliste – Valence)

On considère l'équation

$$9x^4 - 14x^2 + 8x - 1 = 0 \qquad \text{(E)}$$

1) Dénombrer les racines réelles de (E).
2) Avec une calculatrice, déterminer des valeurs approchées de ces racines réelles.
3) Déterminer les valeurs exactes de ces racines.

Exercice 479-3 (Georges Lion – Wallis)

Le quadrilatère convexe ABCD est inscrit dans un cercle Γ.
Le quadrilatère convexe MNPQ est circonscrit à Γ et tel que $A \in [MN]$, $B \in [NP]$, $C \in [PQ]$, $D \in [QM]$.
Montrer que les diagonales (AC), (BD), (MP), (NQ) sont concourantes.

(1) *Éditions Hermann, 1983*. François Le Lionnais cite la question pour rire de Raymond Queneau : « *13 bis : 13 bis, est-ce un nombre pair ou impair ?* » S.P.

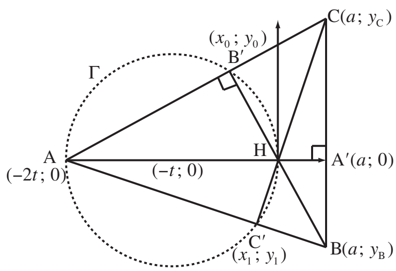
Exercice 479-4 (Marc Royer – Montélimar)
1) ABC étant un triangle éventuellement aplati, montrer que les médianes issues de B et C sont perpendiculaires si et seulement si $AB^2 + AC^2 = 5\ BC^2$.
2) Trouver tous les triangles « orthomédians » dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers.

Solutions

Exercice 476-1 (Maurice Bauval – Versailles)
On donne les trois distances a, b, c de l'orthocentre H aux trois sommets du triangle ABC. On suppose le triangle acutangle.
Calculer les longueurs des trois côtés BC, CA et AB du triangle.

Solution de Michel Lafond (Dijon)

1) Soient AA′, BB′, CC′ les hauteurs et H l'orthocentre du triangle acutangle ABC.
On connaît HA′ = a, HB′ = b, HC′ = c.
Prenons comme paramètre le rayon t du cercle Γ de diamètre AH.
Dans le repère (HA′,Hy) ce cercle a pour équation $x^2 + y^2 = -2\,tx$.



Les coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ de B′ vérifient $b^2 = x_0^2 + y_0^2 = -2tx_0$. Donc $x_0 = -\dfrac{b^2}{2t}$,

$$y_0 = \frac{b\sqrt{4t^2 - b^2}}{2t}.$$

Les coordonnées $(x_1\ ;\ y_1)$ de C′ vérifient $c^2 = x_1^2 + y_1^2 = -2tx_1$. Donc $x_1 = -\dfrac{c^2}{2t}$,

$$y_1 = -\frac{c\sqrt{4t^2 - c^2}}{2t}.$$

Le signe moins dans y_1 vient du fait que ABC est acutangle, donc B′ et C sont d'ordonnées positives, et B et C′ sont d'ordonnées négatives.

On calcule facilement les coordonnées de B (intersection de AC′ et BC) et de C (intersection de AB′ et BC) : leur abscisse commune est a et leurs ordonnées valent :

$$y_B = \frac{-c(a+2t)}{\sqrt{4t^2 - c^2}}, \quad y_C = \frac{b(a+2t)}{\sqrt{4t^2 - b^2}}.$$

L'alignement BHB′ entraîne $x_0\ y_B = a\ y_0$ qui se simplifie en :

$$\sqrt{4t^2 - b^2}\sqrt{4t^2 - c^2} = \frac{bc(a+2t)}{a} \qquad (1)$$

[On obtiendrait la même chose en traduisant l'alignement CHC′].

Dans (1), l'élévation au carré et une simplification par t mène à l'équation en t :

$$\phi(t) = 4at^3 - \left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)t - ab^2c^2 = 0 \qquad (2)$$

Le centre de symétrie de la courbe de ϕ a pour coordonnées $(0\,;-ab^2c^2)$ donc l'équation (2) a une seule racine positive qu'on peut exprimer en fonction de a, b, c par les formules classiques (voir §4).

Soit t cette racine positive.
On calcule enfin en fonction de t donc de a, b, c les mesures demandées :

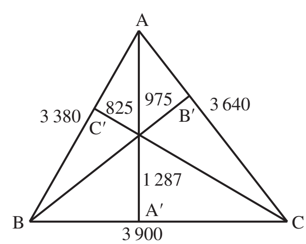
2) Mesures des côtés :

De $AB^2 = AA'^2 + A'B^2 = (a+2t)^2 + y_B^2$, on tire $AB = \dfrac{2t(a+2t)}{\sqrt{4t^2-c^2}} = \dfrac{2at}{bc}\left(\sqrt{4t^2-b^2}\right)$ d'après (1).

De $AC^2 = AA'^2 + A'C^2 = (a+2t)^2 + y_C^2$, on tire $AC = \dfrac{2t(a+2t)}{\sqrt{4t^2-b^2}} = \dfrac{2at}{bc}\left(\sqrt{4t^2-c^2}\right)$ d'après (1).

$$BC = y_C - y_B = \frac{a}{bc}\left(b\sqrt{4t^2-c^2} + c\sqrt{4t^2-b^2}\right).$$

3) Si on reprend les données de l'exercice 473-4 auquel fait référence Maurice Bauval, en multipliant par 65 pour avoir des nombres entiers, on obtient la figure ci-contre, à partir de : $a = 1287$, $b = 975$, $c = 825$.



L'équation (2) est

$$6\,625\,476\, t^3 - 3\,348\,971\,071\,875\, t - 832\,713\,633\,984\,375 = 0.$$

Sa solution positive est $t = 812{,}5$ (exactement). On a bien :

$$AB = \frac{2at}{bc}\left(\sqrt{4t^2-b^2}\right) = 3\,380,\quad AC = \frac{2at}{bc}\left(\sqrt{4t^2-c^2}\right) = 3\,640,$$

$$BC = \frac{a}{bc}\left(b\sqrt{4t^2-c^2} + c\sqrt{4t^2-b^2}\right) = 3\,900.$$

4) Résolution de l'équation (2)

En divisant tout par $4\,a^2$, on obtient la forme standart :

$$t^3 + pt + q = 0 \qquad (3)$$

où $p = \dfrac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{4a^2}$ et $q = \dfrac{b^2c^2}{4a}$.

Posons pour simplifier $S = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$. Le discriminant vaut

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{1}{64a^6}\left(a^4b^4c^4 - \frac{S^3}{27}\right).$$

Il est négatif car la moyenne géométrique de $\{a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2\}$, soit $G = (a^4b^4c^4)^{\frac{1}{3}}$, étant inférieure à leur moyenne arithmétique $\dfrac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{3} = \dfrac{S}{3} = M$, après élévation au cube, on a bien $a^4b^4c^4 \leq \dfrac{S^3}{27}$.

La théorie de l'équation du troisième degré nous dit que dans ce cas, les solutions de (3) sont données par : $t = \lambda \cos(\theta)$ où $\lambda^2 = -\dfrac{4p}{3}$; $\cos(3\theta) = -\dfrac{4q}{\lambda^3}$.

Ici, on a : $\lambda^2 = \dfrac{S}{3a^2} = \dfrac{M}{a^2}$; $\cos(3\theta) = \left(\dfrac{3}{S}\right)^{\frac{3}{2}} a^2b^2c^2 = \left(\dfrac{G}{M}\right)^{\frac{3}{2}}$, d'où

$$3\theta = \pm \operatorname{Arccos}\left[\left(\frac{G}{M}\right)^{\frac{3}{2}}\right] + 2k\pi.$$

Notons $\theta_0 = \operatorname{Arccos}\left[\left(\dfrac{G}{M}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$. On a donc $\theta = \dfrac{1}{3}(\pm\theta_0 + 2k\pi)$.

Il est facile de voir que la solution positive de (3) est (pour $k = 0$)

$$t = \lambda \cos\left(\frac{1}{3}\theta_0\right) = \frac{1}{a}\sqrt{M}\cos\left(\frac{1}{3}\theta_0\right).$$

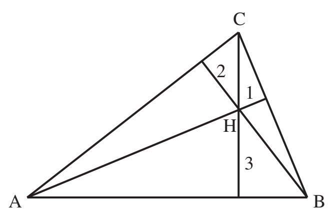
Finalement, les mesures des côtés sont obtenues par les formules ci-dessous :

M = moyenne arithmétique de $\{a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2\}$,
G = moyenne géométrique de $\{a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2\}$,

$$\theta_0 = \operatorname{Arccos}\left[\left(\frac{G}{M}\right)^{\frac{3}{2}}\right], \quad t = \frac{1}{a}\sqrt{M}\cos\left(\frac{1}{3}\theta_0\right),$$

$$AB = \frac{2at}{bc}\left(\sqrt{4t^2 - b^2}\right), \quad AC = \frac{2at}{bc}\left(\sqrt{4t^2 - c^2}\right),$$

$$BC = \frac{a}{bc}\left(b\sqrt{4t^2 - c^2} + c\sqrt{4t^2 - b^2}\right).$$



5) Vérifions dans le cas particulier : $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$.
On a : M = 49/3, G = $6^{4/3}$, $\theta_0 \approx 0{,}994$, $t \approx 3{,}822$,
AB ≈ 9,397, AC ≈ 8,955, BC ≈ 6,032.

Autres solutions de Maurice Bauval (Versailles), Jean-Claude Carréga (Lyon), Georges Lion (Wallis), Pierre Renfer (Ostwald).

Georges Lion propose une variante : remplacer dans l'énoncé ci-dessus « sommets » par « côtés ».

Exercice 476-2 (Frédéric de Ligt – Montguyon) – Corol'aire n° 67

On a l'identité $(n+2)n+1=(n+1)^2$; cela suggère l'idée de s'intéresser aux suites (a_n) qui vérifient $a_{n+2}a_n+1=a_{n+1}^2$. En particulier, pourriez-vous montrer, qu'à partir de $a_1=1$ et de $a_2=m$ avec m entier supérieur à 1, la suite (a_n) ne produit que des entiers naturels ?

Solution de Pierre Samuel (Hossegor)

1) Voyons tout d'abord le cas où l'entier m de l'énoncé est **pair**, $m=2k$. La suite (a_n) commence par 1, $2k$, $4k^2-1$, $8k^3-4k$. Le cas spécial $m=2$, $k=1$ étant traité dans l'énoncé, on suppose $k\geq 2$. On considère le nombre $\mathrm{A}=k+\sqrt{k^2-1}$.
C'est un entier quadratique (trace $2k$, norme 1) et irrationnel (car k^2-1 n'est pas un carré). Ses puissances sont de la forme : $\mathrm{A}^n=b_n+c_n\sqrt{k^2-1}$ où b_n, c_n sont des entiers naturels tels que $b_n^2-\left(k^2-1\right)c_n^2=1$.

Comme $\mathrm{A}^2=2k^2-1+2k\sqrt{k^2-1}$, on a $c_1=a_1$ et $c_2=a_2$. Pour montrer que $c_n=a_n$ pour tout n, et donc que les a_n sont bien des entiers, il suffit de montrer que la suite (c_n) satisfait la relation de récurrence $c_{n+1}^2-c_{n+2}c_n=1$. Ceci est classique et facile à vérifier. En effet,

$$\mathrm{A}^{n+1}=kb_n+\left(k^2-1\right)c_n+\left(b_n+kc_n\right)\sqrt{k^2-1},$$

$$\mathrm{A}^{n+2}=\left(2k^2-1\right)b_n+2k\left(k^2-1\right)c_n+\left(2kb_n+\left(2k^2-1\right)c_n\right)\sqrt{k^2-1},$$

d'où

$$c_{n+1}^2-c_{n+2}c_n=\left(b_n+kc_n\right)^2-2kb_nc_n-\left(2k^2-1\right)c_n^2=b_n^2-\left(k^2-1\right)c_n^2=1.$$

2) Lorsque m est **impair**, on introduit l'entier quadratique $\mathrm{A}=\frac{1}{2}\left(m+\sqrt{m^2-4}\right)$, (trace m, norme 1), irrationnel (car m^2-4 n'est pas un carré). Écrivons ses puissances sous la forme $2\mathrm{A}^n=b_n+c_n\sqrt{m^2-4}$ où b_n, c_n sont des entiers de même parité tels que $b_n^2-\left(m^2-4\right)c_n^2=4$. Comme $2\mathrm{A}^2=m^2-2+m\sqrt{m^2-4}$, on a $a_1=c_1$ et $a_2=c_2$. Pour voir que $a_n=c_n$ et est donc un entier pour tout n, il suffit de montrer que la suite (c_n) satisfait la même relation de récurrence $c_{n+1}^2-c_{n+2}c_n=1$ que (a_n). Comme ci-dessus, ceci résulte d'un calcul sans malice.

Complément : Le résultat ci-dessus admet une sorte de réciproque. Soit $(a_n)_{n\geq j}$ une suite croissante de nombres rationnels positifs tels que $a_{n+1}^2-a_na_{n+2}=1$ pour tout n. Si ses quatre premiers termes sont des entiers, elle se prolonge en une suite dont un terme vaut 1 (et tous ses termes sont donc entiers).

En effet, posons $a_j = a$ et $a_{j+1} = b$. On peut supposer $a > 1$.
Alors $a_{j+2} = (b^2 - 1)^2/a$ et $a_{j+3} = ((b^2 - 1)^2/a^2 - 1)/b = (b^4 - 2b^2 + 1 - a^2)/a^2b$ sont des entiers. Donc b doit diviser $a^2 - 1$, d'où $a^2 - 1 = bc$ avec c entier et $c < a$ car $a < b$. On peut alors prolonger la suite en posant $a_{j-1} = c$. Si $c = 1$, on a gagné. Sinon on peut recommencer car les quatre termes a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, a_{j+2} sont des entiers.

Solution de Jean-Claude Carréga (Lyon)

Soit une suite réelle $(a_n)_{n\geq 1}$ vérifiant $\forall n \geq 1, a_{n+2}a_n + 1 = a_{n+1}^2$ et $a_1 = 1$, $a_2 = m$, avec $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.

1) Montrons par récurrence sur n que $\forall\ n \geq 1$, $a_{n+1} \geq a_n + 1 \geq 2$
– Pour $n = 1$, on a bien $a_2 = m \geq 1 + 1 \geq 2$.
– Supposons le résultat pour n et montrons le pour $n + 1$. Par hypothèse, on a $1 \leq a_n \leq a_{n+1} - 1$, d'où

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 - 1}{a_n} \geq \frac{a_{n+1}^2 - 1}{a_{n+1} - 1} \geq a_{n+1} + 1 \geq a_n + 1 + 1 \geq 2.$$

Retenons de cela que $\forall\ n \geq 1$ $a_n > 0$. Ainsi la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est à termes strictement positifs et elle est définie par $a_1 = 1$, $a_2 = m$ et $\forall n \geq 1, a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}^2 - 1}{a_n}$.

2) On a $a_1 = 1$, $a_2 = m$, $a_3 = m^2 - 1$, $a_4 = m^3 - 2m$. Puisque $m \geq 2$ est un entier naturel, il en est de même pour a_1, a_2, a_3 et a_4. Raisonnons par récurrence. Supposons $n \geq 2$ et $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ entiers naturels et démontrons que $a_{n+3} = \dfrac{a_{n+2}^2 - 1}{a_{n+1}}$ est un entier naturel. Cela revient à démonter que a_{n+1} divise $a_{n+2}^2 - 1$.

On a $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - 1}{a_{n-1}}$, soit

$$a_n^2 - 1 = a_{n+1}a_{n-1} \qquad (1)$$

On a $a_n = \dfrac{a_{n+1}^2 - 1}{a_{n+2}}$, d'où

$$a_n^2 - 1 = \left(\frac{a_{n+1}^2 - 1}{a_{n+2}}\right)^2 - 1 = \frac{\left(a_{n+1}^2 - 1\right)^2 - a_{n+2}^2}{a_{n+2}^2} = \frac{a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} + 1 - a_{n+2}^2}{a_{n+2}^2}.$$

En utilisant la relation (1), on obtient $a_{n+1}a_{n-1}a_{n+2}^2 = a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} + 1 - a_{n+2}^2$. Il en résulte que a_{n+1} divise le second membre, donc divise $a_{n+2}^2 - 1$.

Autres solutions de Maurice Bauval (Versailles), Alain Corre (Moulins), Éric Oswald (Borgo), Michel Lafond (Dijon), Pierre Renfer (Ostwald), Léon Rouzière (Albi), Odile Simon (La Prenessaye).

Exercice 476-3 (Louis Rivoallan – Rochefort-sur-Mer) – Corol'aire nº 59
On considère les nombres à n chiffres (en base dix) tels que leur carré se termine par les mêmes n chiffres. On accepte que contrairement à l'usage, les chiffres « de gauche » soient égaux à 0. Il y a à l'évidence deux nombres qui répondent à la question : 0 et 1, que l'on fait précéder de $(n-1)$ zéros avec la convention précédente. Montrer, que pour tout n, il y a exactement deux autres nombres écrits avec n chiffres qui répondent à cette condition.
L'idée est venue d'un collègue de l'IUFM de La Rochelle qui a cherché à généraliser un exercice posé au concours de recrutement des professeurs des écoles.

Alain Corre nous a signalé que cet exercice avait déjà été proposé sous le numéro 469-1 dans le Bulletin Vert d'avril 2007, et des solutions données dans le Bulletin Vert 472 (octobre 2007). Veuillez nous excuser pour cette étourderie. Nous en donnons ici d'autres solutions.

Solution de Jean-Yves Coquan (Albi)

Les nombres à un chiffre vérifiant la propriété d'avoir leur carré se terminant par ce même chiffre sont 0, 1, 5 et 6.
Seuls 5 et 6 vont permettre d'étendre cette propriété à de « vrais » nombres de n chiffres.
Tout nombre à deux chiffres se terminant par 0 et dont le chiffre des dizaines est non nul a son carré qui se termine par deux zéros.
Tout nombre à deux chiffres se terminant par 1 s'écrit $x = 10\,a + 1$ avec $a \neq 0$.
Alors $x^2 = 100\,a^2 + 20\,a + 1$ et x^2 se termine par $10\,a + 1$ si et seulement si $(x^2 - x)$ est multiple de 100.
Cette condition conduit à $10\,a = 0$ soit $a = 0$.
En revanche, en conduisant un raisonnement analogue, on trouve que 25 et 76 vérifient la propriété et que ce sont les seuls.
Par exemple : soit $x = 10\,a + 6$. Alors $x^2 = 100\,a^2 + 120\,a + 36$ et
$$(x^2 - x) = 100\,a^2 + 110\,a + 30.$$
Il est clair que $(x^2 - x)$ est multiple de 100 si et seulement si $a = 7$.

De la même manière, on peut démontrer qu'il existe un unique nombre à trois chiffres se terminant par 25 (625) et un unique nombre à trois chiffres se terminant par 76 (376) qui possèdent la propriété demandée.

Nous allons démontrer par récurrence qu'il existe pour tout n (à partir du rang 2) exactement deux nombres vérifiant la propriété.
Soit un nombre N à n chiffres vérifiant la propriété et considérons un nombre à $(n + 1)$ chiffres $x = 10^n\,a + \mathrm{N}$.
Alors $x^2 = 10^{2n}\,a^2 + 2\,\mathrm{N}\,a\,10^n + \mathrm{N}^2$.
x^2 se termine par x si et seulement si $(x^2 - x)$ est divisible par $10^n + 1$.
$(x^2 - x) = 10^{2n}\,a^2 + (2\mathrm{N} - 1)\,a\,10^n + \mathrm{N}^2 - \mathrm{N}$. Or comme N vérifie la propriété, $\mathrm{N}^2 - \mathrm{N} = 10^n\,p$ avec p entier naturel.
On aboutit donc à l'équation :
$$((2\mathrm{N} - 1)\,a + p)\,10^n = q\,10^n + 1.$$

Comme N et p sont connus, on a bien une équation du premier degré d'inconnue a avec une solution unique.

Commentaires

1) On peut dans certains cas trouver $a = 0$. Après 625, on trouve 0 625 puis 90 625.
2) Cette propriété appliquée à 25 et 76 se trouve dans certains manuels de seconde dans le cadre de l'apprentissage de la démonstration.
Ce type d'exercice permet de réfléchir au système de numération en base 10.
On peut peut-être étudier le cas général en Spécialité Math de Terminale.

Solution de Jean-Claude Carréga (Lyon)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$; soit $x \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$ et $x \pm 1$, ayant n chiffres (en base dix).
x^2 et x se terminent par les mêmes n chiffres si et seulement si $x^2 - x$ se termine par n zéros, ce qui équivaut à 10^n divise $x(x - 1)$. Comme x et $x - 1$ sont premiers entre eux, cela équivaut aux deux cas suivants :
1) 5^n divise x et 2^n divise $x - 1$.
2) 2^n divise x et 5^n divise $x - 1$
Dans le premier cas si x_1 et x_2 sont des solutions vérifiant $2 \leq x_1 \leq x_2$, alors $x_2 - x_1$ est divisible par 2^n et par 5^n, donc par 10^n, et comme $0 \leq x_2 - x_1 < 10^n$, on a $x_2 - x_1 = 0$, soit $x_1 = x_2$. On a donc au plus une solution dans le premier cas et, par un raisonnement analogue, il y a aussi au plus une solution dans le deuxième cas.
En fait, il y a bien une solution dans chacun des deux cas et, pour la trouver, on part d'une relation de Bézout entre 5^n et 2^n. Puisque 5^n et 2^n sont premiers entre eux, il existe λ_0 et μ_0 dans $\mathbb{Z}$ tels que $5^n\lambda_0 + 2^n\mu_0 = 1$. On sait que les autres relations de Bézout entre 5^n et 2^n sont obtenues par $5^n\lambda + 2^n\mu = 1$ avec $\lambda = \lambda_0 - 2^nh$ et $\mu = \mu_0 + 5^nh$, pour h quelconque dans $\mathbb{Z}$.
– On peut alors choisir h pour obtenir une relation de Bézout $5^n\lambda + 2^n\mu = 1$ avec $0 < \lambda < 2^n$. μ est alors négatif et $x = 5^n\lambda$ est une solution, car $x - 1 = -2^n\mu$ et $1 < x < 10^n$.
- On peut aussi choisir h pour obtenir une relation de Bézout $5^n\lambda + 2^n\mu = 1$ avec $0 < \mu < 5^n$. λ est alors négatif et $x = 2^n\mu$ est une solution, car $x - 1 = -5^n\lambda$ et $1 < x < 10^n$.
En résumé, pour chaque $n \geq 1$, il existe exactement deux entiers naturels $x \geq 2$, ayant n chiffres, tels que x^2 et x se terminent par les même chiffres.

Exemples :
1) Pour $n = 1$, il est clair que les deux nombres sont 5 et 6.
2) Pour $n = 2$, une relation de Bézout entre 5^2 et 2^2 est $5^2 - 6 \times 2^2 = 1$. Ici $\lambda_0 = 1$ et $\mu_0 = -6$. D'où la solution $x = 25$. Pour trouver l'autre solution, on cherche une relation de Bézout $5^2\lambda + 2^2\mu = 1$ avec $0 < \mu < 25$. On sait que $\mu = -6 + 5^2h$, on choisit $h = 1$, d'où $\mu = 19$. D'où la solution $x = 19 \times 2^2 = 76$. On vérifie que l'on a bien $25^2 = 625$ et $76^2 = 5776$.
3) On procède de même pour chaque valeur de n.

Suite page 819

Pour $n = 3$, les nombres sont 625 et 376 ; pour $n = 4$, on trouve 0 625 et 9 376 ; pour $n = 5$, on trouve 90 625 et 09 376.

Autres solutions : Jean Gounon (Chardonnay), Pierre Renfer (Ostwald), Pierre Samuel (Hossegor).

On peut trouver dans le tome premier (page 38) du livre d'Édouard Lucas « Théorie des nombres » (Réédition 1961 - Librairie Albert Blanchard : « Exemple III : Le carré d'un nombre terminé 8 212 890 625 *se termine de la même façon, et il n'y a qu'un seul autre nombre de dix chiffres, (en exceptant dix zéros ou neuf zéros suivis de 1) qui possède la même propriété ; c'est le nombre* 1 787 109 376*). »* S.P.