

Ovale, bel ovale

Daniel Reisz(*)

À Henri.

*Le souvenir de son amitié
et de son charisme nous restera,
mais ses conseils si pertinents
nous manquent déjà.*

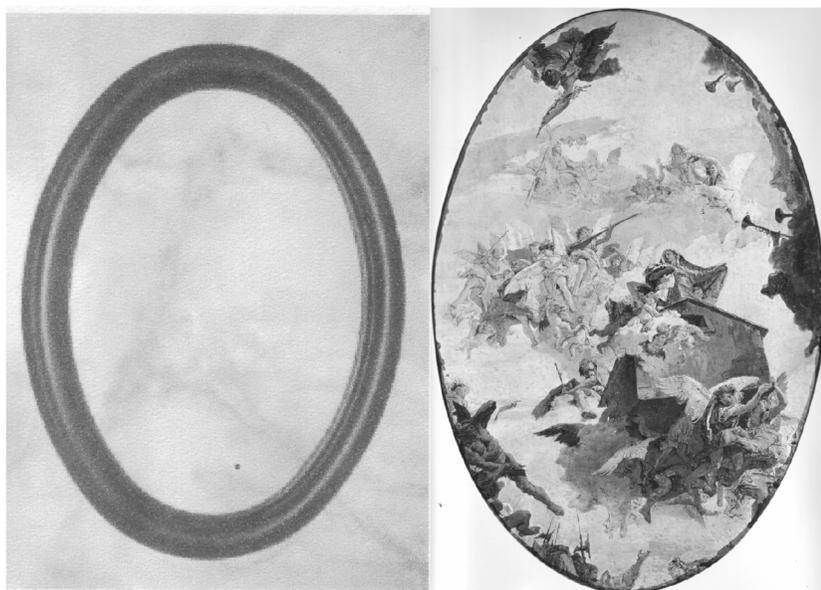


Figure 1

Rien ne ressemble autant à une ellipse que les formes ovales qu'utilisent les encadreurs ou les peintres (fig. 1), mais aussi les jardiniers, les architectes, les maçons, les ferblantiers et bien d'autres corps de métier. Or dans la plupart des cas ces ovales sont construits comme raccordement de quatre arcs de cercle, symétriques deux à deux et raccordés en quatre points où ces arcs ont une tangente commune. Bien malin celui qui pourra dire à l'œil nu où se trouvent exactement ces points de raccordement sur le cadre ou l'esquisse vénitienne de la figure 1. Pour de tels ovales on parle aussi de courbe en *anse de panier*, surtout lorsqu'il s'agit du demi-ovale. Certes cela peut y faire penser mais est totalement incorrect : une baguette d'osier que l'on courbe pour en faire une anse ne prend pas du tout cette forme géométrique (voir pour cela les courbes splines).

L'intérêt de notre ovale, en particulier par rapport à une ellipse, est triple :

(*) reiszd@aol.com

- Il est facile de le tracer que ce soit dans les petites dimensions (encadreurs) ou dans les grandes dimensions (maçons, architectes, jardiniers)
- Il est facile de tracer des ovales « parallèles » ce qui s'avère souvent utile tant pour l'encadreur que pour le jardinier, l'architecte ou le maçon. On peut voir que les ellipses homothétiques ou homofocales n'ont pas cette propriété. D'ailleurs la courbe « parallèle » à une ellipse n'est pas une ellipse (voir pour cela dans ce bulletin l'excellent article de Bernard PARZYSZ, [PAR]).
- Sur un tout autre plan, celui de l'enseignement, l'ovale mène facilement à des activités géométriques et calculatoires pour la plupart accessibles en collège. On pourra aussi sensibiliser les élèves au jeu des différents paramètres en fonction des contraintes qui s'imposent à l'utilisateur.

Une remarque préliminaire, à propos des raccordements d'arcs de courbe

Dans une première approche un raccordement « lisse » de deux arcs de cercles est basé sur le fait que les cercles porteurs des deux arcs sont tangents au point de raccordement. D'une façon plus générale le raccordement « lisse » de deux arcs se fait en imposant en ce point des demi-tangentes respectives dans le prolongement l'une de l'autre. D'un point de vue analytique cela revient à exiger l'égalité entre la dérivée première à gauche de l'une et la dérivée première à droite de l'autre des fonctions ayant pour courbes représentatives les deux arcs concernés.

En réalité un bon raccordement peut être plus exigeant, « plus lisse que lisse », que celui obtenu entre deux arcs de courbes avec égalité de dérivées premières. En effet, en matière de « courbure » (pour les arcs de cercle cette courbure est pilotée par les rayons, pour des arcs de courbe plus généraux, elle l'est par le rayon de courbure, c'est-à-dire par la dérivée seconde), il y a discontinuité de celle-ci pour deux arcs de cercles de rayons distincts. Jamais des ingénieurs ne raccorderont ainsi deux arcs de route ou de voie ferrée : ils imposeront au raccordement au moins une continuité de la dérivée seconde, c'est-à-dire une continuité dans la variation du rayon de courbure (il peut y avoir des exigences supplémentaires, destinées en particulier à modérer cette variation elle-même). La clothoïde, aussi appelée spirale de Cornu, est une courbe souvent utilisée pour ce type de raccordement « bien tempéré » : sa courbure est proportionnelle à son abscisse curviligne.

Pour les raccordements d'arcs de cercle qui nous occupent ici, il est évident que cette discontinuité de courbure est peu perceptible à l'œil si les rayons des deux cercles sont assez voisins mais nettement plus perceptible si, au contraire, les deux rayons sont très différents (fig. 2)

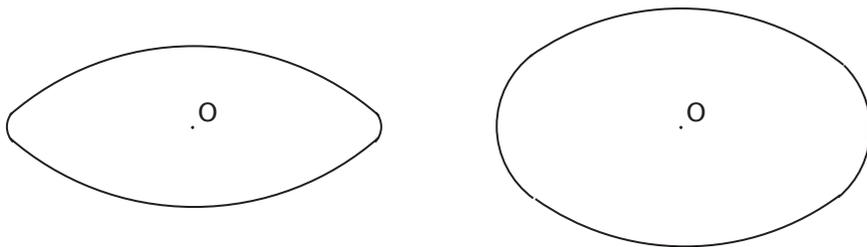


Figure 2

A - Construction basique de l'ovale « anse de panier »

Si nous nous plaçons dans le cadre de la géométrie traditionnelle (sur une feuille de papier avec une règle graduée et un compas et, pourquoi pas, une équerre) la construction la plus élémentaire est la suivante (fig. 3).

On choisit un axe de symétrie (AA') avec $AA' = 2a$. Soit O le milieu de $[AA']$ et (yy') la médiatrice de $[AA']$. Sur le segment $[OA]$ on choisit un point I et on considère le cercle de centre I passant par A . On pose $OI = u$, $0 \leq u \leq a$, et donc le rayon r du cercle vérifie $r = a - u$.

Sur ce cercle on choisit un point T tel que l'angle $\alpha = \widehat{AIT}$ soit aigu. La droite (TI) recoupe (yy') en un point J . On trace alors le cercle de centre J passant par T . L'alignement T, I, J assure que ce nouveau cercle sera tangent au précédent en T ce qui n'est possible que si $r \leq b$, c'est à dire $a - b \leq u$.

On remarque donc que u doit vérifier $a - b \leq u \leq a$.

On considère la réduction des arcs ainsi construits à un quadrant, puis par symétries successives on trace l'ovale complet. (fig. 3)

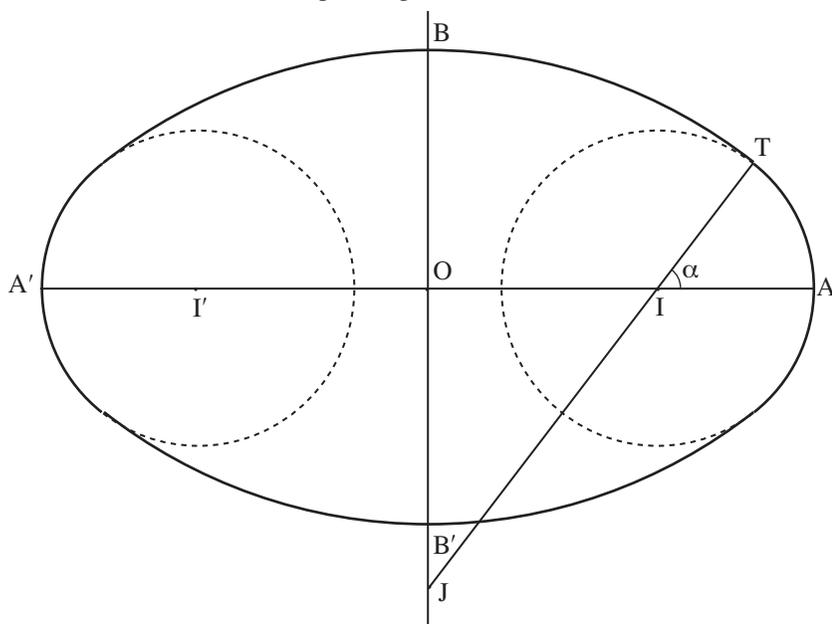


Figure 3

On désigne par B et B' les intersections de l'ovale avec la droite (yy') , par J' le symétrique de J par rapport à (AA') (c'est donc le centre de l'autre grand cercle) (fig. 4) et de façon analogue à ce qu'on a fait sur (AA') on pose $BB' = 2b$, $OJ = v$.

Le rayon R du cercle de centre J vérifie alors $R = b + v$ où $v \geq 0$.

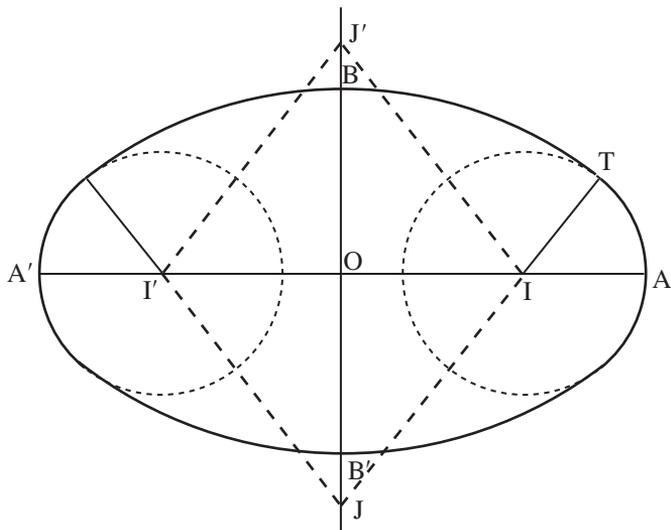


Figure 4

Résumons le paramétrage utilisé ici pour notre ovale :

- la donnée de $[AA']$, avec sa longueur $AA' = 2a$ et son milieu O ,
- le choix du point I sur $[OA]$ par $OI = u$,
- l'angle aigu $\alpha = \widehat{AIT}$.

Remarques.

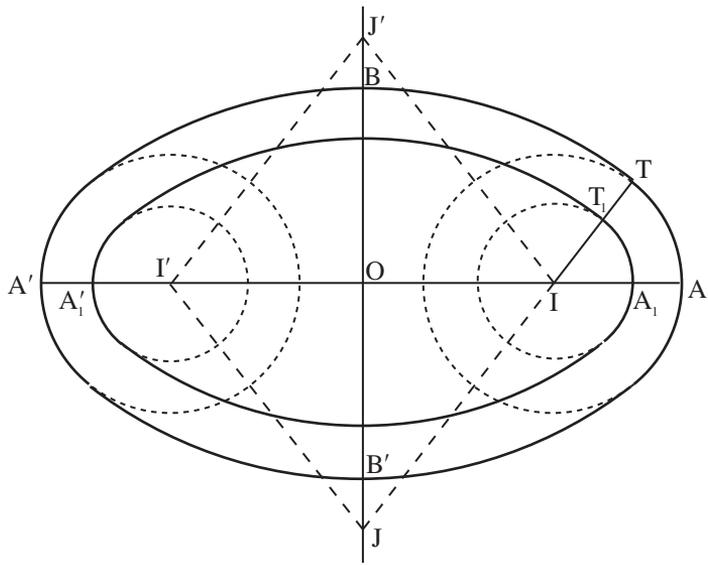


Figure 5

La donnée de $\alpha = \widehat{AIT}$ peut être remplacée par la donnée du point J sur la demi-droite

(Oy') en posant $OJ = v$. On a alors les relations évidentes $v = u \tan \alpha$ et $IJ = \frac{u}{\cos \alpha}$.

Un autre regard : On peut remarquer que le losange IJJ' constitue une sorte de charpente de notre ovale : il le définit au choix de r (ou R) près (fig. 4). À partir d'un même losange on peut alors tracer des ovales parallèles (fig. 5) en jouant simplement sur la donnée de r . Cela peut se révéler d'une grande utilité tant pour l'encadreur que pour le jardinier et ses massifs ou encore l'architecte romain et les gradins de son amphithéâtre (voir là encore [PAR]).

B – Un ovale en anse de panier inscrit dans un rectangle

La construction précédente, pour simple qu'elle est, n'est pas toujours opérationnelle dans la réalité professionnelle de l'encadreur, du jardinier, du maçon ou de l'architecte. En effet pour ces professionnels la donnée de base est souvent l'inscription d'un ovale dans un rectangle donné dont on connaît les dimensions $2a$ et $2b$ ($a > b$) (fig. 6).

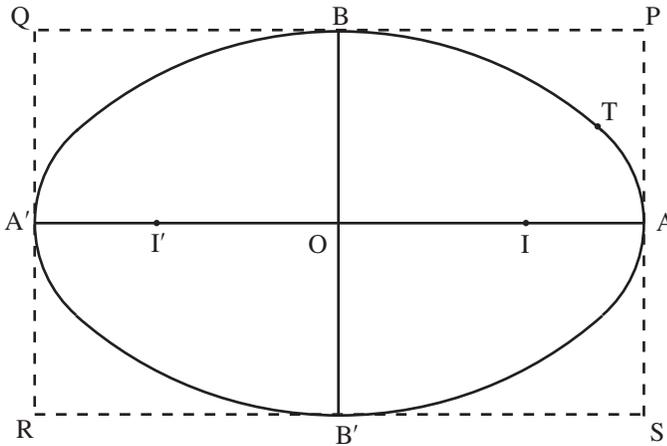


Figure 6

Par analogie avec l'ellipse inscrite dans un tel rectangle, on parlera du grand axe de longueur $2a$ et du petit axe de longueur $2b$ de l'ovale.

Remarquons tout de suite qu'il semble qu'on peut inscrire une infinité d'ovales dans un rectangle donné (fig. 7).

Une donnée supplémentaire est donc nécessaire pour la détermination d'un unique ovale inscrit dans le rectangle donné. Un candidat assez naturel est le choix du point I sur $[OA]$ ou encore la donnée de la longueur $OI = u$ ($u < a$).

Le problème se pose alors dans les termes suivants : *construire un ovale de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$ avec $OI = u$* . On peut aborder ce problème de façon calculatoire qui consiste à passer du triplet (a, b, u) au triplet (a, u, v) ou d'une façon géométrique en construisant les deux cercles permettant les raccordements idoines et l'inscription dans le rectangle.

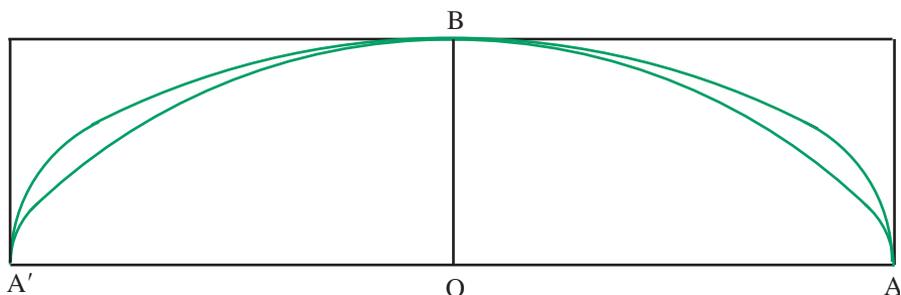


Figure 7

1. Méthode calculatoire $(a, b, u) \rightarrow (a, u, v)$

On a $r = a - u$ et R qui doit être à la fois égal à JB et JT, c'est-à-dire vérifier

$$b + v = \sqrt{u^2 + v^2} + (a - u).$$

Regardons cette égalité comme une équation d'inconnue v . Elle est équivalente à :

$$(b - a)^2 + (u + v)^2 + 2(b - a)(u + v) = u^2 + v^2 \quad \text{et} \quad b - a + u + v \geq 0,$$

$$(b - a)^2 + 2uv + 2(b - a)(u + v) = 0 \quad \text{et} \quad u + v \geq a - b,$$

soit

$$v = \frac{(a - b)(2u + b - a)}{2(u + b - a)} = \frac{(a - b)(2u - (a - b))}{2(u - (a - b))} \quad \text{et} \quad u + v \geq a - b.$$

Rappelons que dès le début nous avons imposé à u et v les conditions $u \geq a - b$ et $v \geq 0$, ce qui implique nécessairement $u + v \geq a - b$.

2. Construction géométrique.

La construction géométrique présentée ici repose sur ce qui fut un classique des classes de Math. Élem. et de Terminale C : *construire le (ou les) cercle(s) d'un faisceau de cercles, tangent(s) à un cercle donné*. Ici il s'agit du faisceau de cercles tangents en B à la parallèle en B à la droite (OA) qui en est donc l'axe radical et du cercle donné de centre I passant par A (fig. 8). La méthode, qu'on ne justifiera pas ici (voir par exemple [COM]), consiste à tracer un cercle quelconque du faisceau qui coupe le cercle donné en deux points M et N. La droite (MN) coupe l'axe radical en P d'où on peut mener deux tangentes PT et PT' au cercle donné. Il y aura donc deux solutions, mais pour ce qui nous concerne seul le point T nous convient. Là encore la condition la condition $a - b \leq u \leq a$, c'est-à-dire $0 \leq r \leq b$, assure que le point T est bien à l'intérieur du rectangle $2a \times 2b$ (et ici plus précisément dans le premier quadrant).

La droite (TI) coupe (OB) en J, centre du cercle support de l'arc \widehat{TB} à construire.

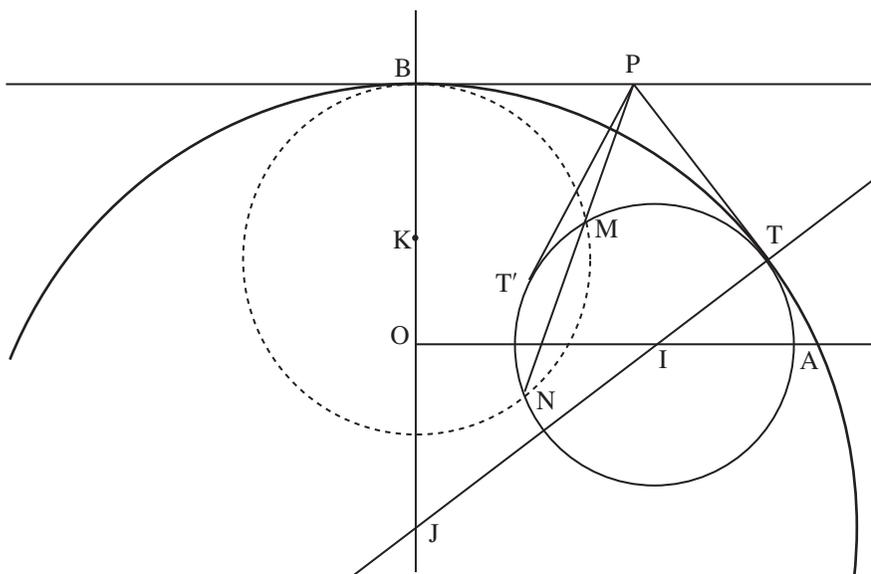


Figure 8

Je ne résiste pas au plaisir de jeter un coup d'œil au second cercle solution. Il se construit comme le premier à partir du centre J' , intersection de (IT') avec (OB) (fig. 9). On a alors une « contre-anse » dont on appréciera la beauté, complétant l'anse et épurée des lignes de construction, sur la figure 10.

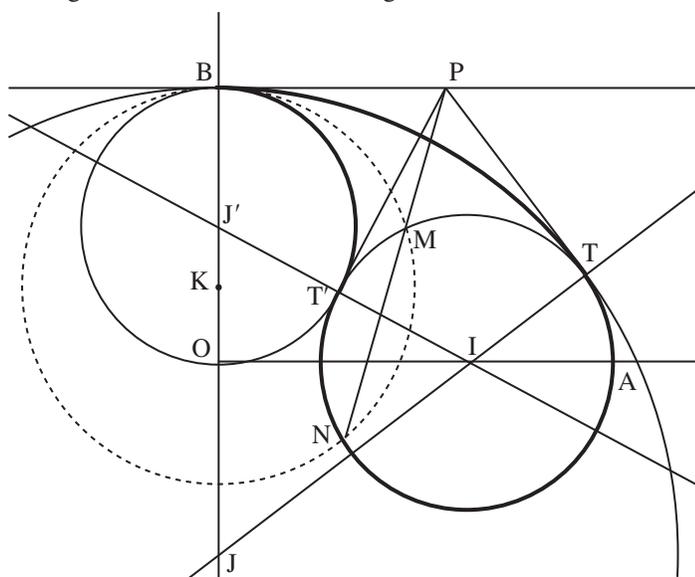


Figure 9

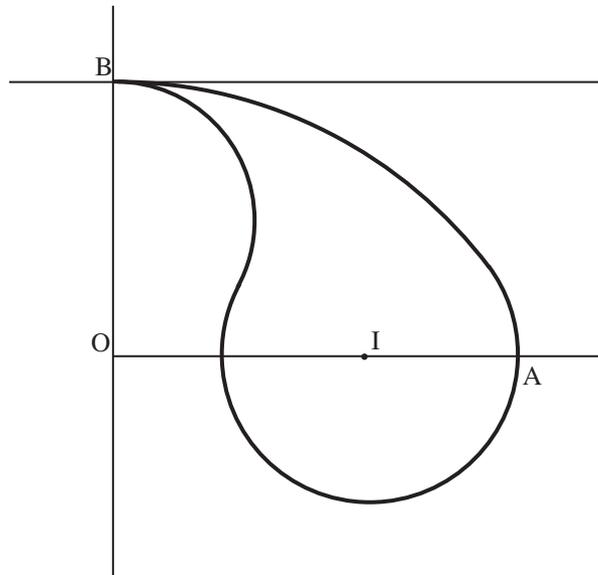


Figure 10

C – Périmètre et aire d'une anse

Périmètre.

On considère un quart d'anse (fig. 11). Soit $\alpha = \widehat{AIT}$, mesure exprimée en radians. Le petit arc a alors pour longueur αr et le grand arc $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)R$. D'où la longueur de l'arc de ce

quadrant : $\alpha r + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)R$ et le périmètre de l'anse complète :

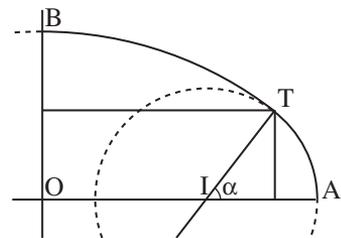


Figure 11

$$P = 4 \left[\alpha r + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) R \right].$$

Aire.

Même démarche : dans le premier quadrant l'aire d'un quart d'anse est la somme de l'aire A_1 du rectangle de diagonale TO et des aires A_2 et A_3 des régions comprises entre les arcs et les deux demi-cordes, cotés du rectangle.

$$A_2 = \frac{r^2 \alpha}{2} - \frac{r^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2},$$

$$A_3 = \frac{R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{2} - \frac{R^2}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right),$$

d'où

$$A = \frac{\pi R^2}{4} + \frac{r^2 - R^2}{2} \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) + r(a-r) \sin \alpha,$$

formule bien peu sympathique.

D – Des ovales en anses de panier un peu particuliers

En regardant à gauche et à droite j'ai trouvé trois constructions d'anses de panier particulières et qui toutes trois se veulent pratiques, esthétiques et bonnes approximations de l'ellipse d'axes $2a$ et $2b$.

a) Les amphithéâtres romains

Dans son article Bernard PARZYSZ [PAR] fait l'hypothèse que pour les amphithéâtres romains le losange de base $I'I'J'J'$ est constitué de quatre triangles égyptiens, c'est-à-dire de triangles rectangles proportionnels au triangle (3,4,5) ce qui semble assez bien correspondre à la réalité. La comparaison visuelle avec l'ellipse d'axes $2a$ et $2b$ est satisfaisante, sans plus (fig. 12). Serge MEHL [MEH] signale que la demi-anse de sommet A et de base BB' s'appelle une *voûte égyptienne*.

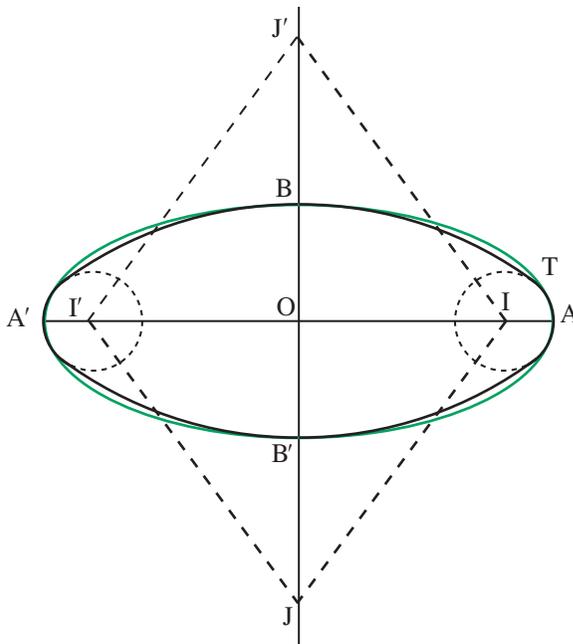


Figure 12

b) Une anse d'architecte ou ovale elliptique

Il semblerait que les architectes et autres tailleurs de pierre utilisent couramment l'anse qui vérifie $u = a/3$ c'est-à-dire qu'ils divisent le grand axe AA' en trois segments égaux. Les centres J et J' des grands cercles étant les intersections des cercles de centre I (resp. I') et passant par A (resp. A'). On obtient alors la figure 13.

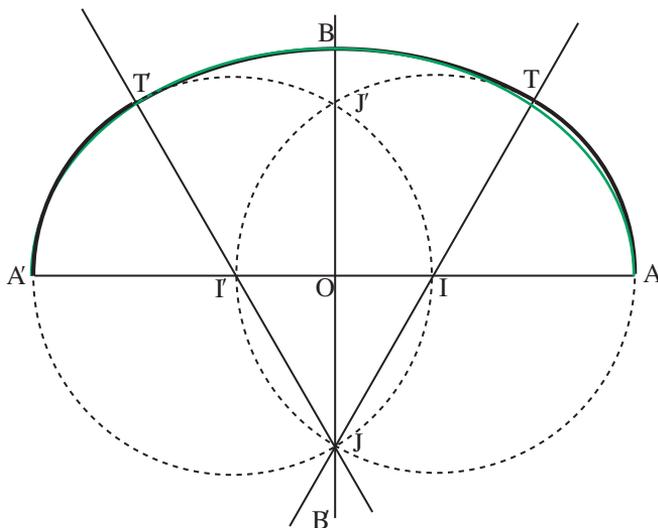


Figure 13

On remarquera sur cette figure la bonne adéquation visuelle à l'ellipse de grand axe

$$AA' = 2a \text{ et de petit axe } BB' = 2 \frac{4 - \sqrt{3}}{3} a .$$

c) L'anse de panier du menuisier de Pierre Jullien

C'est dans de vieux papiers (1996) de Pierre Jullien que j'ai découvert cette anse là. Il connaissait cette construction par son menuisier. On la retrouve avec la même référence aux menuisiers sur Internet, mais aussi dans un « *Cahier de l'apprenti tôleier, ferblantier et zingueur* » de 1917 [JU et FLA] que Bernard Le Feuvre nous a communiqué.

La construction est simple et a l'avantage de partir des sommets A et B qui sont souvent des données imposées par la réalité. On trace AB , on définit le point P du segment AB par $PB = OA - OB = a - b$. La médiatrice de $[PA]$ coupe (OA) en I et (OB) en J qui sont les deux centres cherchés (fig. 14). Soit K le pied de la médiatrice.

On peut maintenant tracer l'arc \widehat{AT} de centre I et l'arc \widehat{TB} de centre J .

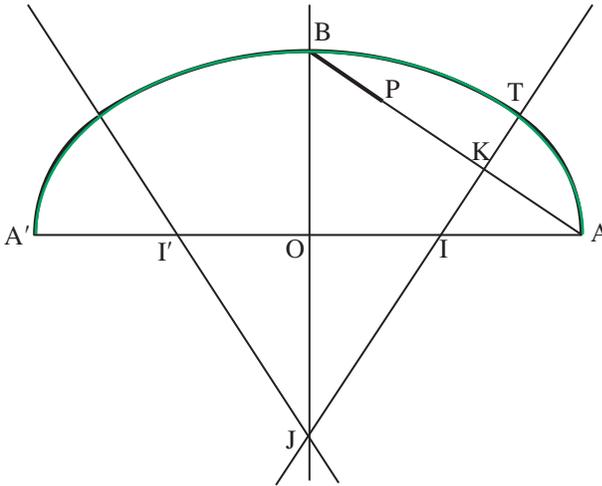


Figure 14

On constate là aussi une excellente adéquation visuelle entre cette anse de menuisier et l'ellipse de mêmes sommets.

Reste à justifier cette construction, c'est-à-dire à démontrer que $JT = JB$. Remarquons tout de suite que les triangles rectangles OJI, KAI et KJB sont tous semblables au triangle rectangle OAB dont les cotés ont pour mesure $OA = a$, $OB = b$ et $AB = c$ ($c^2 = a^2 + b^2$). Notons aussi que par hypothèse $PB = a - b$ et donc

$$AP = c - a + b, \quad PK = AK = \frac{c - a + b}{2}, \quad BK = a - b + \frac{c - a + b}{2} = \frac{a - b + c}{2}.$$

Dans le triangle rectangle KJB on peut alors écrire :

$$BJ = \frac{c}{b} BK = \frac{c(a - b + c)}{2b}.$$

Par ailleurs $JT = JI + IA$.

Dans le triangle rectangle KAI on a

$$IA = \frac{c}{a} AK = \frac{c(c - a + b)}{2a}$$

alors que dans le triangle rectangle OJI on a :

$$IJ = \frac{c}{a} OJ = \frac{c}{a} (BJ - b) = \frac{c}{a} \left[\frac{c(a - b + c)}{2b} - b \right] = \frac{c^2(a - b + c) - 2b^2c}{2ab}.$$

D'où

$$JT = IJ + IA = \frac{c^2(a - b + c) - 2b^2c}{2ab} + \frac{c(c - a + b)}{2a}$$

qui se réduit d'abord à

$$JT = \frac{c^2(a+c) - 2bc(a+b)}{2ab},$$

puis, moyennant $c^2 = a^2 + b^2$, à

$$JT = \frac{c(a-b+c)}{2b} = JB.$$

Jean- Pierre Friedelmeyer a attiré mon attention sur les *Cercles surosculateurs aux sommets de l'ellipse* pour comprendre les raisons de la bonne adéquation entre cette anse et l'ellipse.

Soit une ellipse de demi-axes OA et OB, définie par les paramètres habituels a, b, \bar{c} avec $b < a$, $\bar{c} = \sqrt{a^2 + b^2}$ (ne pas confondre ce \bar{c} avec le c utilisé dans le reste de l'article). Un résultat classique nous donne la position des centres de courbure aux sommets par les relations $OI = \frac{\bar{c}^2}{a}$ et $OJ = \frac{\bar{c}^2}{b}$, et les points I et J sont faciles à construire comme intersection de la perpendiculaire à AB, avec OA et OB. Évidemment les deux cercles ne se raccordent pas, mais ils ont respectivement un contact d'ordre 3 en A et B (fig. 15).

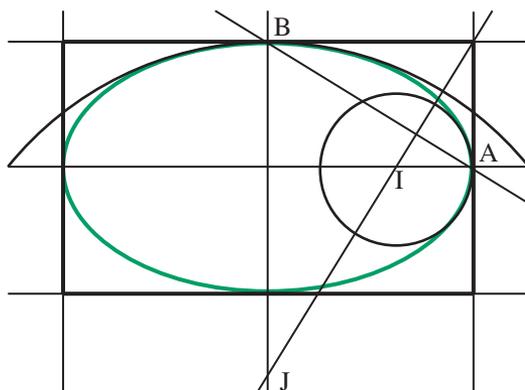


Figure 15

E – Quelques remarques en guise de conclusion

1°) Quelques auteurs citent des constructions d'anses qui au lieu d'utiliser pour une demi-anse trois arcs de cercle en utilisant cinq (fig. 16, où n'est construit que l'arc du premier quadrant avec les données $IA = OJ = JJ' = \frac{2}{5}OA$) ou sept, voire plus.

2°) Dans un récent numéro de Quadrature, François RIDEAU écrit un très intéressant article sur les anses de panier [RID]. En se servant avec adresse de l'inversion et moyennant d'acrobatiques calculs, il met en évidence quelques jolis résultats qui, pour la plupart, dépassent nettement le cadre de cet article. On y trouve aussi une intéressante bibliographie.

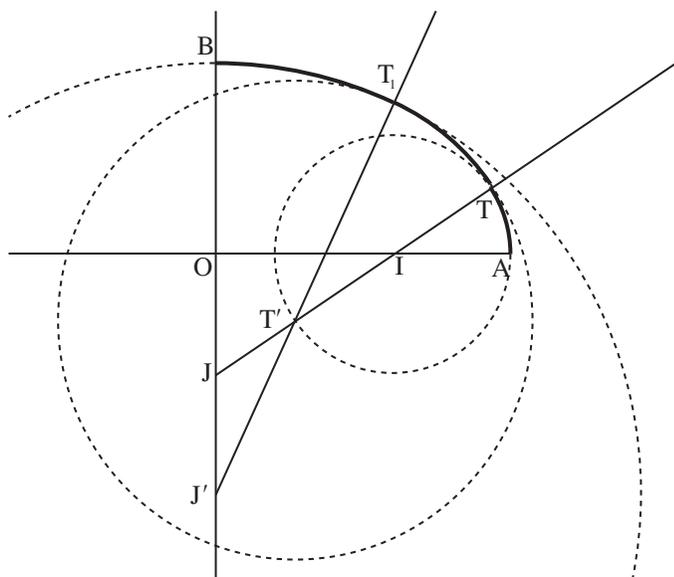


Figure 16

3°) Dans notre article nous n'avons fait qu'évoquer le problème de l'approximation d'une ellipse par une anse de panier en nous contentant d'une observation visuelle. Dans l'annexe qui suit, nous aborderons ce problème de façon un peu plus calculatoire en nous appuyant en particulier sur un papier non publié de P.-L. HENNEQUIN et B. INGRAO [PLH et BI].

Merci à Geneviève Bouvard et à Jean-Pierre Friedelmeyer pour les erreurs qu'ils m'ont signalées et les modifications qu'ils ont suggérées. Cela a grandement amélioré le texte définitif de cet article.

Bibliographie

[PAR] Bernard PARZYSZ : Des ellipses sans ellipses : les amphithéâtres romains, Bulletin de l'APMEP n° 479, pages 772-780.

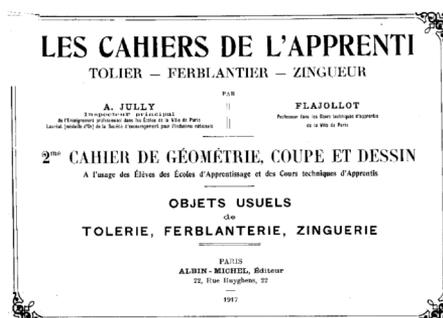
[RID] François RIDEAU : Anses de panier, Quadrature N° 69 (juin-septembre 2008) pages 12-22.

[PLH et BI] Paul-Louis HENNEQUIN et Bruno INGRAO, Approximation d'une ellipse par une anse de panier. (*texte non publié*)

[COM] J. COMMEAU : Géométrie (classe de Mathématiques élémentaires), Collection Cagnac et Thiberge, Édition MASSON, 1963. (*Le problème des cercles d'un faisceau tangent à un cercle donné y est traité in extenso, mais on trouvera aussi cela dans d'autres « classiques » de l'époque : Maillard et Millet, Lespinard et Pernet, Lebossé-Hémery, Deltheil et Caire, ...*)

[MEH] Serge MEHL. De magnifiques figures avec leurs programmes de construction sur le site www.sege.mehl.free.fr/anx/Anse57.

[JU et FLA] A. JULLY et FLAJOLLOT, Les cahiers de l'apprenti tôlier, ferblantier, zingueur, Albin Michel, 1917 (*aimablement communiqué par Bernard Le Feuvre*).



Annexe

Quelques idées pour « mesurer » la qualité de l'adéquation entre ellipse et anse de panier

On a vu que certaines des anses décrites précédemment semblaient être, d'un point de vue visuel, de bonnes approximations d'une ellipse de même sommets. Peut-on étudier cela de façon plus quantitative ? La réponse est « oui », mais il n'est pas certain que cela soit simple.

En matière d'approximation d'une courbe par une autre courbe il faut d'abord choisir un critère qui « mesure » la qualité de l'approximation. On peut, par exemple, essayer d'estimer l'aire comprise entre les deux courbes. Dans notre cas, compte tenu des éléments de symétrie cela consisterait à se situer dans le premier quadrant et à étudier l'aire de la *différence symétrique* des deux surfaces limitées par les segments OA et OB et chacun des deux quarts de courbe. Cela suppose quand même de connaître les positions respectives des deux courbes, puis de calculer, cas par cas, les aires concernées. Les calculs, sans être infaisables, sont assez taupinesques. On pourra voir cela dans [PLH et BI].

Une autre idée tout à fait classique en analyse numérique consiste à étudier

$$\Delta(x) = |f(x) - g(x)| \quad \text{sur } [0; a]$$

où f et g sont les fonctions dont les courbes représentatives sont ici un quart d'ellipse et un quart d'anse, considérées sur l'intervalle $[0; a]$. La quantité $\sup_{x \in [0; a]} \Delta(x)$ ou encore la valeur moyenne de $\Delta(x)$ sur $[0; a]$ peuvent alors être de bons indicateurs de

l'approximation. Au vu de la « sagesse » des deux courbes concernées, on pourrait avoir ici une approche discrète en remplaçant l'étude de

$$\Delta(x) = |f(x) - g(x)| \quad \text{sur } [0; a]$$

par celle de

$$\Delta(x_n) = |f(x_n) - g(x_n)| \quad \text{avec } x_0 = 0, x_1 = h, \dots, x_n = nh = a,$$

mais force est de constater que là encore les calculs sont assez lourds.

Une troisième idée consiste à prendre des chemins de traverse. L'ellipse est aussi définissable comme ensemble des points M tels que $MF + MF' = 2a$ où F et F' sont les deux foyers de l'ellipse. Notre idée consiste alors à situer le point M sur l'anse et d'étudier la quantité $MF + MF'$ en la comparant à $2a$.

Étude d'un cas numérique pour une anse de panier de menuisier et son ellipse associée.

Prenons $a = 8$ et $b = 6$ (pour les notations voir figure 14). Alors on a les données suivantes pour l'ellipse :

Les foyers de l'ellipse sur l'axe AA' sont définis par

$$OF = OF' = f = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

et l'ellipse est donc définie par

$$MF + MF' = 16.$$

Pour l'anse de menuisier : $AB = c = 10$, $BM = 2$, $r = 5$, $R = 10$, $OI = 3$, $OJ = 4$.

L'angle $\alpha = \widehat{AIT}$ est défini par $\tan \alpha = \frac{OJ}{OI} = \frac{4}{3}$, ce qui donne $\alpha \approx 0,93\text{rd} \approx 53^\circ$.

Les coordonnées de T sont (6 ; 4).

Le paramétrage du quart d'anse est alors le suivant :

Pour $0 \leq t \leq \alpha$ (petit arc \widehat{AT})

$$\begin{cases} x = 3 + 5 \cos t \\ y = 5 \sin t \end{cases} \quad t = \widehat{AIM}$$

Pour $\frac{\pi}{2} \geq t \geq \alpha$ (grand arc \widehat{TB})

$$\begin{cases} x = 10 \sin t \\ y = 10 \cos t - 4 \end{cases} \quad t = \widehat{BJM}$$

Le tableau de la page suivante donne la quantité $MF + MF'$ et la compare à 16 pour un point M qui décrit le quart d'anse formé par les arcs \widehat{AT} et \widehat{TB} .

On remarquera que la différence maximum entre $MF + MF'$ et 16 est de l'ordre de 0,1 d'où une erreur relative inférieure à 0,01.

t	cos t	sin t	x	y	MF'	MF	MF + MF'	MF + MF' - 16
0	1	0	8	0	13,29150262	2,708497378	16	0
0,05	0,99875026	0,049979169	7,993751302	0,249895846	13,28760399	2,71377889	16,0013829	0,001382878
0,1	0,995004165	0,099833417	7,975020826	0,499167083	13,27591097	2,729548997	16,00546	0,005459971
0,15	0,988771078	0,149438132	7,94385539	0,747190662	13,25643223	2,756588701	16,0120209	0,012020936
0,2	0,980066578	0,198669331	7,900332889	0,993346654	13,2291822	2,791546693	16,0207289	0,020728895
0,25	0,968912422	0,247403959	7,844562109	1,237019796	13,19418109	2,836958004	16,0311391	0,031139092
0,3	0,955336489	0,295520207	7,776682446	1,477601033	13,15145489	2,891266776	16,0427217	0,042721668
0,35	0,939372713	0,342897807	7,696863564	1,714489037	13,10103541	2,953850694	16,0548861	0,054886105
0,4	0,921060994	0,389418342	7,60530497	1,947091712	13,04296025	3,02404488	16,0670051	0,067005135
0,45	0,900447102	0,434965534	7,502235512	2,174827671	12,97727286	3,101163541	16,0784364	0,078436399
0,5	0,877582562	0,479425539	7,387912809	2,397127693	12,90402251	3,184518307	16,0885408	0,088540814
0,55	0,852524522	0,522687229	7,26262261	2,613436145	12,82326436	3,27343283	16,0966972	0,096697189
0,6	0,825335615	0,564642473	7,126678075	2,823212367	12,73505948	3,36725363	16,1023131	0,102313107
0,65	0,796083799	0,605186406	6,980418993	3,025932029	12,63947486	3,465357579	16,1048324	0,104832444
0,7	0,764842187	0,644217687	6,824210936	3,221088436	12,5365835	3,567156499	16,10374	0,103739995
0,75	0,731688869	0,68163876	6,658444344	3,4081938	12,4264644	3,672099488	16,0985639	0,098563888
0,8	0,696706709	0,717356091	6,483533547	3,586780454	12,30920269	3,779673498	16,0888762	0,088876186
0,85	0,659983146	0,751280405	6,299915729	3,756402026	12,18488984	3,889402676	16,0742923	0,074292317
0,9	0,621609968	0,78332691	6,108049841	3,916634548	12,0536228	4,000846853	16,0544697	0,054469651
0,95	0,581683089	0,813415505	5,908415447	4,067077524	11,91550605	4,113599521	16,0291056	0,029105568
α	0,6	0,8	6	4	11,97906639	4,062261505	16,0413279	0,041327899
0,6	0,825335615	0,564642473	5,646424734	4,253356149	11,73581243	4,268138732	16,0039512	0,003951162
0,55	0,852524522	0,522687229	5,226872289	4,525245221	11,45050458	4,525706728	15,9762113	-0,02378869
0,5	0,877582562	0,479425539	4,794255386	4,775825619	11,15934698	4,801641923	15,9609889	-0,0390111
0,45	0,900447102	0,434965534	4,349655341	5,004471024	10,86262662	5,092328203	15,9549548	-0,04504518
0,4	0,921060994	0,389418342	3,894183423	5,21060994	10,5606479	5,394715645	15,9553636	-0,04463646
0,35	0,939372713	0,342897807	3,428978075	5,393727128	10,25373473	5,706250084	15,9599848	-0,04001519
0,3	0,955336489	0,295520207	2,955202067	5,553364891	9,942233141	6,02479559	15,9670287	-0,03297127
0,25	0,968912422	0,247403959	2,474039593	5,689124217	9,626514439	6,348561434	15,9750759	-0,02492413
0,2	0,980066578	0,198669331	1,986693308	5,800665778	9,306979073	6,676038352	15,9830174	-0,01698258
0,15	0,988771078	0,149438132	1,494381325	5,887710779	8,984061396	7,005945216	15,9900066	-0,00999339
0,1	0,995004165	0,099833417	0,998334166	5,950041653	8,65823553	7,3371855	15,995421	-0,00457897
0,05	0,99875026	0,049979169	0,499791693	5,987502604	8,330022645	7,668812233	15,9988349	-0,00116512
0	1	0	0	6	8	8	16	0