Les problèmes de l'APMEP

François LO JACOMO a animé cette rubrique pendant douze ans. L'équipe de la rédaction du bulletin le remercie sincèrement pour le remarquable travail qu'il a fourni et l'enthousiasme sans cesse renouvelé dont il a fait preuve.

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont désormais à envoyer par courrier à

Max HOCHART
65, rue Blatin
63000 CLERMONT-FERRAND

ou par courriel à hochartmax@yahoo.fr.

Les problèmes des numéros précédents seront résolus au fil des prochains bulletins. Il est donc encore possible d'envoyer vos solutions. En attendant ...

Olympiades internationales

Les problèmes ci-dessous constituaient les épreuves des 49e olympiades internationales de mathématiques qui se sont déroulées à Madrid le 17 juillet 2008.

Problème 479-1

Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus, et soit H son orthocentre. Le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de [BC] coupe la droite (BC) en A_1 et A_2. De même, le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de [AC] coupe la droite (AC) en B_1 et B_2 et le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de [AB] coupe la droite (AB) en C_1 et C_2. Montrer que A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont cocycliques.

Problème 479-2

1. Montrer que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

   pour tous nombres réels x, y, z différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$.
2. Montrer qu'il existe une infinité de triplets de nombres rationnels x, y, z différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$, pour lesquels l'inégalité ci-dessus est une égalité.

Problème 479-3

Montrer qu'il existe une infinité d'entiers strictement positifs n tels que $n^2 + 1$ possède un diviseur premier strictement supérieur à $2n+\sqrt{n}$.

Problème 479-4

Trouver toutes les fonctions f :]0, +∞[→]0, +∞[telles que

$$\frac{f(w)^2+f(x)^2}{f\left(y^2\right)+f\left(z^2\right)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

pour tous nombres réels strictement positifs w, x, y, z vérifiant $wx = yz$.

Problème 479-5

Soit n et k des entiers strictement positifs tels que $k \geq n$ et $k - n$ est pair. On suppose données $2n$ lampes numérotées de 1 à $2n$; chacune peut être allumée ou éteinte. Au début, toutes les lampes sont éteintes. Une opération consiste à allumer une lampe éteinte ou bien à éteindre une lampe allumée. On considère des séquences constituées d'opérations successives. Soit N le nombre de séquences constituées de k opérations et aboutissant à l'état où les lampes de 1 à n sont allumées et les lampes de $n + 1$ à $2n$ sont éteintes. Soit M le nombre de séquences constituées de k opérations et aboutissant à l'état où les lampes de 1 à n sont allumées et les lampes de $n + 1$ à $2n$ sont éteintes mais où les lampes de $n + 1$ à $2n$ n'ont jamais été allumées. Déterminer le rapport N/M.

Problème 479-6

Soit ABCD un quadrilatère convexe tel que AB ≠ BC. Les cercles inscrits dans les triangles ABC et ADC sont notés respectivement Ω_1 et Ω_2. On suppose qu'il existe un cercle Ω qui est tangent à la demi-droite [BA) au-delà de A, tangent à la demi-droite [BC) au-delà de C et qui est aussi tangent aux droites (AB) et (CD). Montrer que les tangentes communes extérieures à Ω_1 et Ω_2 se coupent en un point de Ω.

Autres problèmes

Problème 479-7

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{1\leq i\leq n}\left|x_i\right| \leq \frac{1}{n^2}\sum_{1\leq i,j\leq n}\left|x_i+x_j\right|.$$

Étudier une version continue.

Problème 479-8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, G_n est la moyenne géométrique des coefficients binomiaux pour $k \in [0, \ldots, n]$, c'est-à-dire que $G_n = \sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}$. Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{G_n}\right)$.