Problèmes d'antan nº 3

1921

En feuilletant les anciens bulletins de notre association, on trouve des sujets d'exercices et de problèmes. Nous publierons dans chaque Bulletin Vert des exemples de ces exercices d'antan.

Envoyez vos propositions de solutions à frechetm.apmep@wanadoo.fr. Les meilleurs seront publiées.

Bacc. Première CD. – *Rennes, Octobre 1920* : On donne un triangle ABC, rectangle en A et dont les côtés de l'angle droit ont pour valeurs AB = c, AC = b. On prend sur AC un point D à la distance x du point A.

1. Trouver la distance DI du point D à l'hypoténuse.
2. Du point D comme centre, on décrit un cercle tangent à AB. Trouver la condition à laquelle doit satisfaire x pour que ce cercle coupe l'hypoténuse BC, ou lui soit tangent.
3. Supposant que l'on ait $b = 2c$, on prend sur l'hypoténuse un point quelconque M et l'on construit le symétrique M′ de M par rapport à AC. Calculer pour le triangle isocèle MAM′ la somme de la base MM′ et de la hauteur AH.

Solutions, Problèmes d'antan nº 1

1921

Exercice nº 3

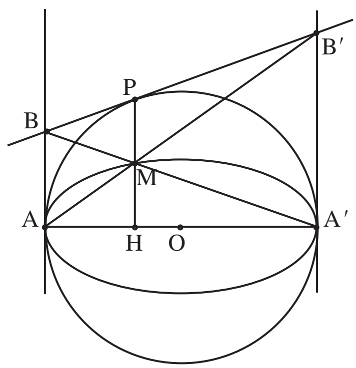
Énoncé

Soit un cercle de diamètre AA′ ; une tangente au cercle coupe en B et B′ les tangentes dont les points de contact sont A et A′ ; lieu du point de rencontre M des droites AB′ et BA′ lorsque la tangente BB′ varie.

Solution

Notations :

– ($\mathscr{C}$) : cercle de diamètre [AA′];
– P est un point de ($\mathscr{C}$) distinct de A et de A′ ;
– Les tangentes à ($\mathscr{C}$) en A et P se coupent en B ;
– Les tangentes à ($\mathscr{C}$) en A′ et P se coupent en B′ ;
– Les droites (BA′) et (AB′) se coupent en M ;
– H est le projeté de M sur la droite (AA′).



On sait que BA = BP et que B′A′ = B′P (quantités non nulles car P est distinct de A et de A′). Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{PB}{PB'} = \frac{BA}{B'A'} = \frac{BA}{AA'} \times \frac{AA'}{B'A'}.$$

Les triangles A′MH et A′BA d'une part, AMH et AB′A′ d'autre part, sont semblables, donc :

$$\begin{cases} \dfrac{BA}{AA'} = \dfrac{MH}{HA'} \\ \dfrac{AA'}{B'A'} = \dfrac{AH}{MH} \end{cases} \Rightarrow \frac{PB}{PB'} = \frac{MH}{A'H} \times \frac{AH}{MH} = \frac{AH}{A'H}.$$

De plus, P appartenant au segment [BB′] et H au segment [AA′], on applique la réciproque du théorème de THALÈS : la droite (PH) est parallèle à la droite (AB).

Or (MH), étant perpendiculaire au diamètre (AA′), est parallèle à la droite (AB), donc les points P, M, H sont alignés.

De plus, le point M se trouve sur le segment [HP].

Ainsi, en considérant les trois parallèles (AB), (PH) et (A′B′) et en utilisant le théorème de THALÈS, on a :

$$\frac{PM}{AB} = \frac{MB'}{AB'} = \frac{MA'}{BA'} = \frac{MH}{BA} \Rightarrow MP = MH.$$

Ainsi, la transformation qui échange P en M est une affinité a de direction (AB) et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

Donc le lieu des points M est une ellipse de grand axe [AA′], image du cercle ($\mathscr{C}$) par cette affinité a.

Cette solution a été envoyée par Alain CORRÉ (Moulins) et Georges LION (Wallis).

Un collègue belge, Michel HOSSELET a proposé une solution analytique. On trouvera sur le site de l'APMEP les solutions intégrales proposées par ces trois collègues. Qu'ils soient remerciés pour leur envoi.

Exercice nº 1

Énoncé

On donne deux points A et A′ sur un cercle (O), et on considère les cercles (C) et (C′) tangents au cercle (O) en A et A′ et tangents entre eux au point M.

1. Lieu de leur point de contact M. Distinguer les parties du lieu d'après la nature des contacts.
2. Lieu des centres d'homothéties des cercles (C) et (C′). Distinguer les parties du lieu d'après la nature de l'homothétie.

Solution de Georges Lion

1. Les points A et A′ sont diamétralement opposés sur le cercle (O).

Il est immédiat que le point M et l'autre centre d'homothétie de (C) et (C′) appartiennent à la droite (AA′). Plus précisément :

– Si (C) et (C′) sont tangents extérieurement entre eux et intérieurement à (O), alors $M \in]AA'[$ (centre d'homothétie négatif) et $N \notin [AA']$ (centre d'homothétie positive).
– Si, par exemple, (C) est tangent extérieurement à (O), lui-même tangent intérieurement à (C′), alors M (centre d'homothétie positive) est hors [AA′] ainsi que N, centre d'homothétie négative qui envoie A en M et M en A′.

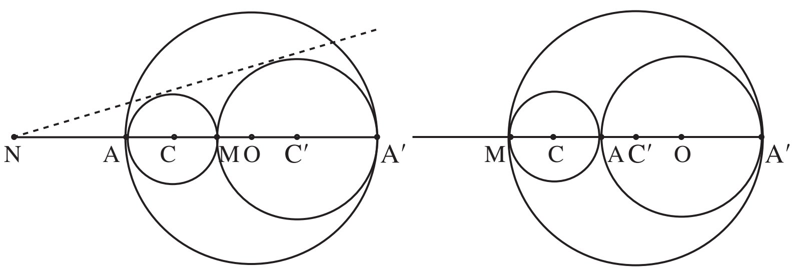
Réciproquement, la donnée sur (AA′) de M distinct de A et A′, permet de construire (C) et (C′) répondant aux conditions.

Enfin, si N est sur (AA′) hors de [AA′], la relation $\dfrac{MN}{NA} = \dfrac{NA'}{NM}$, c'est-à-dire $NA \times NA' = NM^2$ détermine deux positions possibles pour M, à savoir $M_1 \in [AA']$ et (C_1) et (C'_1) sont tangents extérieurement en M_1 et M_2 de l'autre côté de N et (C2) et (C'_2) tangents intérieurement en M_2.

Le rapport $\dfrac{\overline{NM_1}}{\overline{NA}} = \dfrac{\overline{NA'}}{\overline{NM_1}}$ est positif (respectivement négatif pour M_2). N est donc centre de l'homothétie positive de (C_1) sur (C'_1) (resp. négative de (C_2) sur (C'_2)).

En résumé,

– le lieu de M est]AA′[(avec des cercles tangents extérieurement) « *union* » (AA′) − [AA′] (avec des cercles tangents intérieurement).
– le lieu de N est (AA′) − [AA′] et chaque point N est à la fois centre d'homothétie positive pour deux cercles tangents extérieurement et négative pour deux cercles tangents intérieurement.



2. Les points A et A′ ne sont pas diamétralement opposés sur (O).

On considère (ΩA) la tangente commune à (O) et à (C).
On considère (ΩA′) la tangente commune à (O) et à (C′).
Soit Ω leur point d'intersection, qui existe puisque A et A′ ne sont pas diamétralement opposés.

Soit (Ω) le cercle de centre Ω passant par A et A′, qui existe puisque $\Omega A = \Omega A'$ (propriétés des tangentes à un cercle).

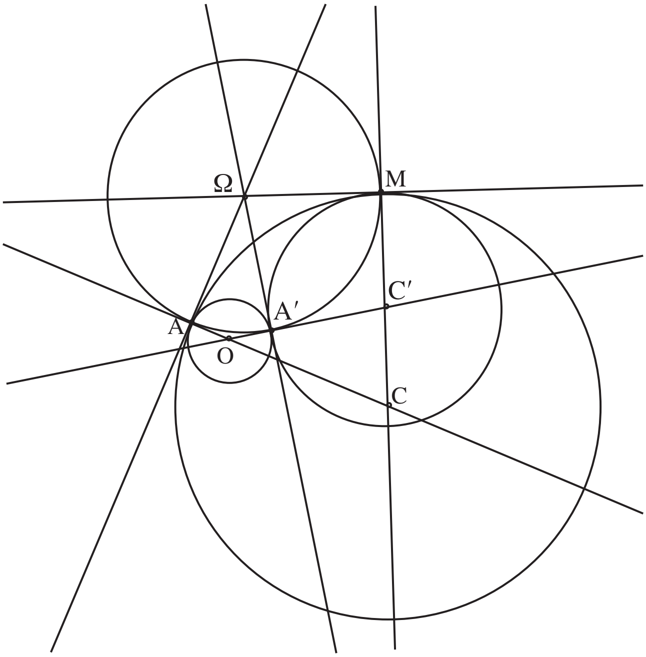
Rappel : *On appelle axe radical de deux cercles, l'ensemble des points ayant même puissance par rapport aux deux cercles. On démontre que c'est une droite. Lorsque les deux cercles sont tangents, cette droite est leur tangente commune et dans ce cas la puissance de tout point de l'axe radical est égal au carré de la distance de ce point au point de tangence.*

(ΩA) est l'axe radical de (O) et (C). Donc : $p_{(O)}(\Omega) = p_{(C)}(\Omega) = \Omega A^2$.

(ΩA′) est l'axe radical de (O) et (C′). Donc : $p_{(O)}(\Omega) = p_{(C')}(\Omega) = \Omega A'^2$.

Donc $p_{(C)}(\Omega) = p_{(C')}(\Omega)$ et Ω appartient à l'axe radical de (C) et (C′) et $\Omega M^2 = \Omega A^2 = \Omega A'^2$.

Ainsi, M est sur le cercle (Ω).



La suite de la solution se trouve sur le site de l'APMEP.

Alain Corré a proposé une autre solution qui est disponible, elle aussi, sur le site de l'APMEP.