Pourquoi tant de TROCS …
et si peu de TRONZ ?

Richard Choulet(*)

Réponse :

Parce que l'équation diophantienne à laquelle on est conduit dans la recherche des uns et des autres, « dégénère » pour ce qui concerne le second cas !

Introduction

Voilà du sans détours et sans ambages bref du brutal comme dirait LINO dans …

Je ne suis pas tombé dedans quand j'étais petit mais il n'y a pas très longtemps : en juillet 2007 pour être précis. Dans quoi au juste ? Dans les nombres figurés. Et assez rapidement il fut amusant de chercher ceux qui peuvent être simultanément un autre. Je m'aperçois, mais je m'en doutais un peu, qu'on sait déjà plein de choses sur l'intimité de ces êtres ; il reste tout au plus quelques miettes à picorer (voir [3]). Picorons donc.

1. Quelques généralités

1.1. Les nombres figurés et les Grecs.

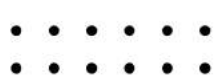
Pour Pythagore, « *les choses sont constituées par les nombres* ». Cette conception arithmosophique, ou plutôt, selon le néologisme d'Armand Delatte, *arithmologique*, s'avère inséparable de spéculations géométriques, harmoniques, physiques et cosmologiques, à leur tour liées à des préoccupations morales, politiques et religieuses[(1)].

Ce qui nous intéresse ici est l'aspect mathématique de cette *arithmologie*.

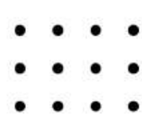
Les pythagoriciens ont une représentation géométrique des nombres. Un nombre est représenté par une figure composée de points. À une figure correspond un nombre, mais un nombre peut se représenter à l'aide de plusieurs figures.

1.1.1. Nombres rectangulaires

Tout nombre *non premier* se représente sous forme de rectangle. Par exemple 12 a deux représentations :



$12 = 2 \times 6$



$12 = 3 \times 4$

(*) Lycée Augustin Fresnel CAEN. richardchoulet@yahoo.fr

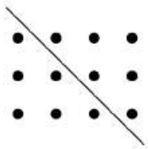
(1) Jean-François MATTEÏ, *Pythagore et les pythagoriciens*, Que sais-je, n° 2 732.

1.1.2. Nombres triangulaires

Si l'on additionne dans l'ordre les nombres, on obtient les nombres triangulaires :

$T_1 = 1$ $T_2 = 1+2 = 3$ $T_3 = 1+2+3 = 6$

Une construction simple permet de trouver une formule donnant ces nombres triangulaires. Pour cela, il suffit de prendre un triangle rectangle à la place du triangle équilatéral :



$2 \times (1+2+3) = 3 \times (3+1)$

Plus généralement, si on note T_n le n-ième nombre triangulaire, n est le nombre de points par côté du triangle formé et l'on a la relation de récurrence :

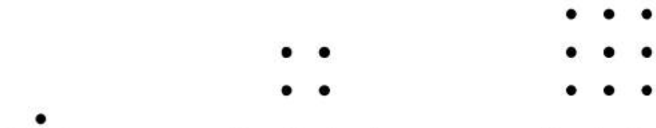
$$T_{n+1} = T_n + (n+1) \text{ avec } T_1 = 1.$$

Et, « par intégration » (voir en annexe l'explication de ce terme incongru ici) :

$$T_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1.1.3. Nombres carrés

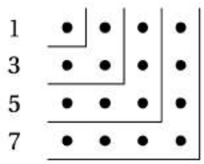
Ces nombres ont une représentation carrée. Nous avons conservé cette appellation.



$C_1 = 1$ $C_2 = 2 \times 2 = 4$ $C_3 = 3 \times 3 = 9$

On remarque ainsi, très facilement, qu'un carré est la somme de nombres impairs consécutifs. La suite de ces nombres vérifie donc la relation de récurrence :

$$C_{n+1} = C_n + (2n+1) \text{ avec } C_1 = 1.$$



$1+3+5+7 = 4 \times 4 = 16$

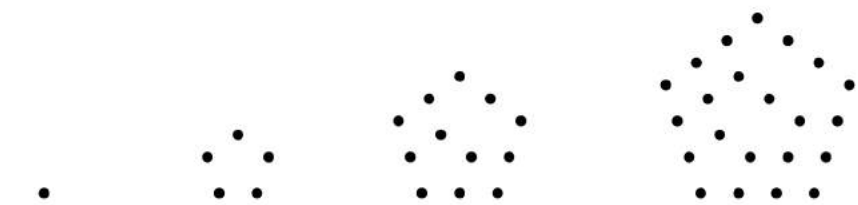
Pour ces nombres carrés : on borde le carré de l'étape n par une équerre comprenant $n + 1 + n = 2n + 1$ points (un *gnomon*) pour former le nouveau carré de l'étape $n + 1$, et cela donne, ce qui n'est pas une surprise

$$C_n = 1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

pour le n-ième nombre carré.

1.1.4. Nombres pentagonaux

Voici les premiers :



$P_1 = 1$ $P_2 = 5$ $P_3 = 12$ $P_4 = 22$

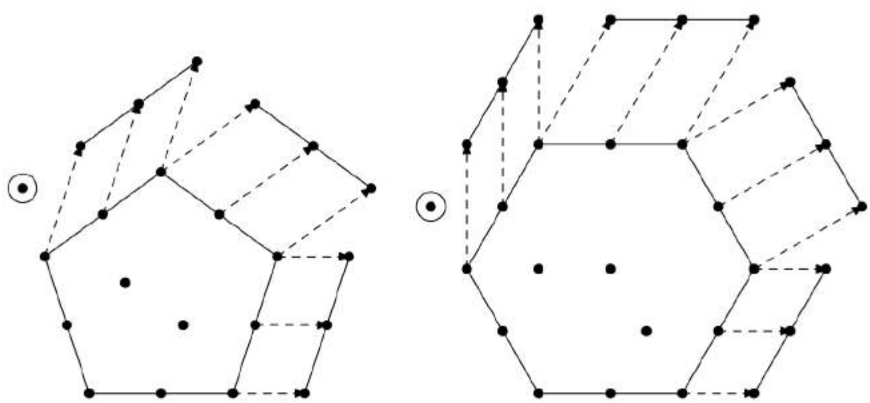
Les nombres pentagonaux se définissent à l'aide de la récurrence :

$P_{n+1} = P_n + 3n + 1$ avec $P_1 = 1$ et n le nombre de points sur chaque côté.

En effet, comme le montre la figure suivante, pour passer de P_n à P_{n+1}, on borde le pentagone de côté n par un « gnomon » à $3 = 5 - 2$ branches. Ce gnomon contient $n + n + n + 1 = 3n + 1$ points.

De la même manière, les nombres hexagonaux se définissent par :

$H_{n+1} = H_n + 4n + 1$ avec $H_1 = 1$ et n le nombre de points sur chaque côté.



$G_5(4) = P_4 = P_3 + \underbrace{3+3+3}_{5-2} + 1$ $G_6(4) = H_4 = H_3 + \underbrace{3+3+3+3}_{6-2} + 1$

1.1.5. Généralisation de la récurrence

Plus généralement les nombres k-gonaux sont définis par $G_k(1) = 1$ et la récurrence

$$G_k(n + 1) = G_k(n) + (k - 2)n + 1.$$

1.1.6. Détermination de $G_k(n)$

$$\begin{array}{rcl}
G_k(n)-G_k(n-1) & = & (k-2)(n-1)+1 \\
G_k(n-1)-G_k(n-2) & = & (k-2)(n-2)+1 \\
\vdots & = & \vdots \\
G_k(2)-G_k(1) & = & (k-2)\times 1+1 \\
\hline
G_k(n)-G_k(1) & = & (k-2)((n-1)+(n-2)+\cdots+1)+n-1 \\
 & = & (k-2)(n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1)-(k-2)n+n-1) \\
G_k(n)-1 & = & (k-2)\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)-(k-3)n-1
\end{array}$$

Ainsi :

$$G_k(n)=(k-2)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-(k-3)n.$$

1.1.7. Ma collec

À partir de pentagonal et carré je forme carpen en ordonnant d'abord 4 < 5 et en coupant ; par ailleurs le « i » de tri disparaît devant « e » et « o », et le « h » de hex ou de hep ne sera pas en général exprimé. On devrait parler de trex pour triangulaire et hexagonal mais en fait trex = hex. Pour les cas usuels cela devrait coller. Enfin pas de « s » après « x » et « z ».

Dans le cas où le vocabulaire n'existe pas on prend la notation de G_k pour parler de nombres polygonaux à k côtés.

Finalement un **troc** est un nombre triangulaire et octogonal tandis qu'un **tronz** est un nombre triangulaire et hendégonal (oui j'ai appris le mot, difficile à caser en teboî, mais il existe ; veut dire 11-gonal ici).

Notons ce résultat extraordinaire :

Tout nombre hexagonal est un triangulaire qui s'ignore !

En effet :

$$H_n=G_6(n)=4\frac{n(n+1)}{2}-3n=2n(n+1)-3n=n(2n-1)=\frac{(2n-1)2n}{2}$$
$$=(3-2)\frac{(2n-1)2n}{2}-(3-3)(2n-1)=G_3(2n-1)=T_{2n-1}.$$

Les nombres hexagonaux sont donc exactement les nombres triangulaires d'indice impair. *Étonnant ? Non ?*

2. Présentation de l'équation k–gonal = l–gonal

La transformation de l'équation est la même dans tous les cas. Donc je la fais une fois pour toutes avec k et l ; je reviendrai ensuite aux valeurs numériques de base et ouvrirai la porte, sans y mettre les doigts, à la généralité.

Notre question de base est : pour k et l donnés supérieurs à 1, quels sont les n et r qui vérifient :

$$(k-2)\frac{n(n+1)}{2}-(k-3)n=(l-2)\frac{r(r+1)}{2}-(l-3)r\ ?$$

Cette relation, après mise sous forme canonique et sauf erreur, — le lecteur est invité à mouiller sa chemise ou au moins à vérifier le calcul — est équivalente à :

$$(l-2)[2(k-2)n-(k-4)]^2=(k-2)[2(l-2)r-(l-4)]^2 \\ -(k-2)(l-4)^2+(l-2)(k-4)^2.$$

En posant $X = 2(k-2)n-(k-4)$ et $Y = 2(l-2)r-(l-4)$ on se ramène à :

$$(l-2)X^2=(k-2)Y^2+(k-l)[kl-2(l+k)]$$

avec la circonstance jubilatoire que l'on a déjà $X = k$ et $Y = l$ pour solution qui donne alors $n = r = 1$ tandis que $X = k-4$ et $Y = l-4$ donneront $n = r = 0$. Tout a l'air de se tenir !

3. À la recherche des TROCS, (k = 3 et l = 8)

On cherche à résoudre l'équation diophantienne :

$$r(r+1)=6p^2-4p \tag{1}$$

qu'on réécrit comme on l'a dit sous la forme équivalente

$$X^2=6Y^2-15 \tag{2}$$

avec $X = 3(2r+1)$ et $Y = 6p-2$.

3.1. Étude de cette équation diophantienne

Elle a pour solution évidente $X = 3$ et $Y = 2$.

Pour $z=x+y\sqrt{6}$, où x et y sont des entiers relatifs, posons $\overline{z}=x-y\sqrt{6}$ et $N(z)=z\overline{z}=x^2-6y^2$.

Nous remarquons que $N\left(5+2\sqrt{6}\right)=1$.

La fonction $z\to\overline{z}$ est multiplicative, c'est-à-dire que $f(z\times z')=f(z)\times f(z')$.
Ainsi, la fonction N l'est aussi.
Si, donc, on pose :

$$z_n=x_n+y_n\sqrt{6}=\left(3+2\sqrt{6}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)^n,$$

on voit aussitôt que $N(z_n) = -15$.
On a ainsi fabriqué une suite de solutions de (2).
Moralité : ce n'est pas les trocs qui manquent !

3.2. Plus généralement

Cette équation (2) est apparentée aux équations de Pell-Fermat (voir par exemple [1] et [2]) et, en travaillant dans $\mathbb{Q}\left(\sqrt{6}\right)$ où l'on utilise l'unité $5+2\sqrt{6}$, on démontre que dans $\mathbb{N}^2$, les solutions de (2) sont tous les couples $(X_n\ ;\ Y_n)$ tels que :

- (X_n) est la suite de premières valeurs : 3, 9, 39, 93, 387, 921, … qui satisfait la relation de récurrence d'ordre deux : $u_{n+2} = 10u_{n+1} - u_n$ pour chacune des sous-suites des termes de rangs pairs et celle des termes de rangs impairs.
- (Y_n) est la suite de premières valeurs : 2, 4, 16, 38, 158, 376, … qui satisfait la relation de récurrence d'ordre deux : $v_{n+2} = 10v_{n+1} - v_n$ pour chacune des sous-suites des termes de rangs pairs et celle des termes de rangs impairs.

Le retour à (1) donne les solutions $(r_n\ ;\ p_n)$ avec :

- (r_n), suite de premières valeurs : 0, 1, 6, 153, 638, 15 041, 62 566, …, répertoriée A046182 dans [3], qui satisfait la récurrence : $r_{n+2} = 98r_{n+1} - r_n + 48$ ou encore $r_{n+1} = 49r_n + 24 + 10\sqrt{24r_n^2 + 24r_n + 16}$ sur chaque bissection modulo 2.
- (p_n), suite de premières valeurs : 0, 1, 63, 261, 6 141, 25 543, …, répertoriée A046181 dans [3], qui satisfait la récurrence : $p_{n+2} = 98p_{n+1} - p_n - 32$ ou encore $p_{n+1} = 49p_n - 16 + 10\sqrt{24p_n^2 - 16p_n + 1}$ sur chaque bissection modulo 2.

En raccrochant les wagons, les trocs sont les termes de la suite (N_n) qui :

- commence par : 0, 1, 21, 11 781, 203 841, …
- est répertoriée A046183 chez Sloane ([3]) et sauf erreur,
- vérifie la relation de récurrence sur les entiers pairs et sur les entiers impairs :
$$N_{n+2} = 9\,602\ N_{n+1} - N_n + 2\,200$$
- vérifie la relation de récurrence sur les entiers pairs et sur les entiers impairs :
$$N_{n+1} = 4\,801\,N_n + 1100 + 980\sqrt{24\,N_n^2 + 11\,N_n + 1}$$
- a pour fonction génératrice f telle que :
$$f(z) = \frac{z + 21\,z^2 + 2\,178\,z^3 + 2\,178\,z^4 + 21\,z^5 + z^6}{\left(1 - z^2\right)\left(1 - 4\,602\,z^2 + z^4\right)},$$
qu'on ne simplifiera pas par $1 + z$ pour garder son côté symétrique.

4. Sur la piste des TRONZ, ($k = 3$ et $l = 11$)

Le résultat est fabuleux ! Si l'on convient que prendre 0 n'a pas d'intérêt (il n'y a rien) et qu'avec 1, on fait tout nombre figuré (on n'a pas vraiment une « figure ») : **des TRONZ il n'y en a pas**.

En effet l'équation similaire à ce qui précède est :
$$(6r + 3)^2 = (18p - 7)^2 - 40 \qquad (1)$$
qui mène à
$$X^2 - Y^2 = -40 \Leftrightarrow Y^2 - X^2 = 40, \qquad (2)$$
en ayant posé $X = 6r + 3$ et $Y = 18p - 7$.

On a, en effet : $Y^2 - X^2 = (Y - X)(Y + X) = 40$ avec X et Y deux entiers naturels impairs. $X + Y$ et $Y - X$ sont donc deux entiers positifs pairs si $p > 1$ et on a donc $Y > X$ et $Y - X < Y + X$.

Or, $40 = 1 \times 40 = 2 \times 20 = 4 \times 10 = 8 \times 5$ dans $\mathbb{N}$.

Ainsi :

$$\begin{cases} Y - X = 2 \\ Y + X = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 9 \\ Y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 6r + 3 = 9 \\ Y = 18p - 7 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ p = 1 \end{cases}$$

Nous avons éliminé ce cas.

$$\begin{cases} Y - X = 4 \\ Y + X = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ Y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 6r + 3 = 3 \\ Y = 18p - 7 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ p = 7/9 \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Bien sûr il y a plusieurs solutions dans $\mathbb{Z}^2$ (sauf erreur : 8) mais le retour aux entiers r et p ne conduit qu'à (0 ; 0) (tronz 0) et (1 ; 1) (tronz 1), ce qui est assez frustrant mais c'est ainsi.

5. Annexe

1. Expliquons l'emploi du mot **intégration** (en écrivant sommation on ne se compromettait pas !).
   Essentiellement il y a deux idées : la première est que
   $$\sum_{p=0}^{n} \binom{p}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$
   La seconde est : en posant $\delta u_n = u_n - u_{n-1}$, on définit une sorte de dérivée de (u_n) pour laquelle la sommation dite « intégration » donne $\int \delta u_n = u_n + \mathrm{C}$. Ceci est intéressant pour tout polynôme en n que l'on somme car tout n^p est une combinaison linéaire de coefficients du binôme de type $\binom{n}{k}$, k de 0 à p.
   Prenons l'exemple des nombres octogonaux. On a vu $\mathrm{O}_n = \mathrm{O}_{n-1} + 6n + 1$ écrit comme $\delta \mathrm{O}_n = 6\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}$.
   En intégrant $\mathrm{O}_n = 6\binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \mathrm{C} = 3n^2 - 2n$ car $\mathrm{C} = 0$ pour $n = 0$.
   Pour les 11-gonaux, on a $\mathrm{G}_{11}(n) = \mathrm{G}_{11}(n-1) + 9n + 1$ d'où
   $$\delta \mathrm{G}_n = 9\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}.$$
   Il en résulte $\mathrm{G}_{11}(n) = 9\binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \mathrm{C} = \dfrac{9n^2 - 7n}{2}$ car $\mathrm{C} = 0$ pour $n = 0$.
2. *Remarque numérique* Lorsqu'on dispose d'un logiciel de calcul formel, on fait résoudre directement l'équation du second degré par les formules usuelles, avec le test de sortie : le résultat obtenu est-il entier ? En limitant aux bornes raisonnables du calculateur et sans états d'âme, les valeurs sortent inexorablement. Voici les premières valeurs telles que les livre le programme écrit avec MAPLE® :

Pour les tronz, l'équation donnant r à l'aide de m est : $r^2 + r - 9m^2 + 7m = 0$,

d'où $n = \dfrac{-1+\sqrt{36m^2-28m+1}}{2}$. On obtient :

a:=proc(m) if type(sqrt(36*m^2-28*m+1)/2-1/2,integer)=true then m*(9*m-7)/2 else fi end:
seq(a(m),m=0..100000);

0, 1

De même pour les trocs avec $r^2 + r - 6m^2 + 4m = 0$, on obtient :
a:=proc(m) if type(sqrt(24*m^2-16*m+1)/2-1/2,integer)=true then m*(3*m-2) else fi end: seq(a(m),m=0..100000);

0, 1, 21, 11781, 203841, 113123361, 1957283461

6. Bibliographie

[1] Richard CHOULET, Soyons carrés ! *Mathématique et Pédagogie*, **163** (2005), 37-47.

[2] Daniel DUVERNEY, *Théorie des nombres*, Dunod, Paris, 1998.

[3] Familièrement appelé Sloane dans le texte http ://research.att.com/˜njas/sequences

Je remercie vivement les relecteurs pour leurs remarques judicieuses dont j'ai essayé de tenir compte et Michel FRÉCHET pour la mise en forme agrémentée de figures et de rappels historiques qui valent de longs discours.