Chameaux et moindres carrés

Pierre Carriquiry(*)

I. Rappel du problème

Un chamelier veut partager son troupeau de p chameaux entre ses k enfants en fixant les proportions f_1, f_2, …, f_k attribuées à chaque enfant. On pose $\mathrm{F} = \sum_{i=1}^{k} f_i$. Si $\mathrm{F} \neq 1$, Henri Bareil a montré dans le bulletin 472 que les solutions où l'enfant i reçoit $f_i q$ chameaux, q étant l'effectif d'un nouveau troupeau vérifiant $\mathrm{F}q = p$, sont équivalentes au partage du troupeau initial proportionnellement aux nombres f_1, f_2, …, f_k. De plus, en interprétant les séries

$$\sum_{j=0}^{+\infty} f_i p(1-\mathrm{F})^j = \frac{f_i p}{\mathrm{F}} \quad (\text{si } \mathrm{F} < 1)$$

et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j f_i p(\mathrm{F}-1)^j = \frac{f_i p}{\mathrm{F}} \quad (\text{si } 1 < \mathrm{F} < 2),$$

il a trouvé une autre méthode qui donne le même résultat.
Je voudrais signaler une méthode des moindres carrés qui donne aussi le même résultat et des méthodes des moindres carrés qui permettent d'obtenir des solutions entières.

II. Méthode des moindres carrés

Soient x_1, x_2, …, x_k les nombres de chameaux (pas forcément entiers) attribués aux k enfants. On veut choisir x_1, x_2, …, x_k tels que $\sum_{i=1}^{k} x_i = p$ (la totalité du troupeau est distribuée) et que les écarts entre x_i et $f_i p$ soient les plus faibles possible. Plus précisément on cherche x_1, x_2, …, x_k tels que $\sum_{i=1}^{k} x_i = p$ et que $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{f_i}(x_i - f_i p)^2$ soit minimum, ce qui revient à minimiser la moyenne des carrés des écarts entre x_i et $f_i p$, pondérée par les coefficients $\frac{1}{f_i}$. Pourquoi choisir ces coefficients ? Parce que si on prend d'autres coefficients (en particulier tous les coefficients égaux à 1) on obtient une autre solution, mais il doit y avoir une explication plus subtile que je laisse au lecteur le soin de trouver.
Le problème peut se résoudre en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

(*) pierre.carriquiry@orange.fr

La solution, si elle existe, annule les dérivées partielles de la fonction L définie par :

$$\mathrm{L}(x_1, x_2, \ldots, x_k, \lambda) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{f_i}(x_i - f_i p)^2 + \lambda\left(\sum_{i=1}^{k} x_i - p\right).$$

En résolvant le système $\left\{\frac{2}{f_i}(x_i - f_i p) + \lambda = 0,\, i = 1, 2, \ldots, k\,;\, \sum_{i=1}^{k} x_i = p\right\}$, on trouve $x_i = \frac{f_i p}{\mathrm{F}}$ et on peut montrer qu'il s'agit bien d'un minimum en utilisant la convexité de la fonction L.

Ainsi, si on revient au problème-source où $p = 17$, $f_1 = \frac{1}{2}$, $f_2 = \frac{1}{3}$ et $f_3 = \frac{1}{9}$, le minimum de

$$2\left(x_1 - \frac{17}{2}\right)^2 + 3\left(x_2 - \frac{17}{3}\right)^2 + 9\left(x_3 - \frac{17}{9}\right)^2$$

sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ est obtenu pour $x_1 = 9$, $x_2 = 6$, $x_3 = 2$.
Bien entendu on n'obtient pas toujours des nombres entiers ; on peut alors penser à chercher des solutions entières en utilisant des méthodes des moindres carrés.

III. Recherche de solutions entières

a) Énoncé du problème

On pose $f_i p = a_i$. On suppose $\sum_{i=1}^{k} f_i = \mathrm{F} < 1$. (Si $\mathrm{F} > 1$, on est amené à résoudre des problèmes du type : partager un troupeau de 17 chameaux entre 3 enfants en donnant la moitié au premier, la moitié au deuxième et le quart au troisième ce qui peut troubler).

On cherche des entiers naturels x_1, x_2, …, x_k tels que $\sum_{i=1}^{k} x_i = p$ et que $\sum_{i=1}^{k} (x_i - a_i)^2$ soit minimum.

b) Étude du cas $k = 2$

1. *Interprétation géométrique*
Soit A le point de coordonnées (a_1,a_2) et M un point de coordonnées (x_1,x_2) dans un repère orthonormal. $\sum_{i=1}^{2} (x_i - a_i)^2 = \mathrm{AM}^2$. Minimiser AM^2 sous les contraintes indiquées revient à trouver un point de la droite (D_p) d'équation $x_1 + x_2 = p$, à coordonnées entières, le plus proche possible du point A. On peut résoudre graphiquement le problème en traçant la droite d'équation $x_1 + x_2 = p$ sur un quadrillage, mais on peut aussi obtenir une solution par un calcul pouvant être fait en Première et généralisable à $k = 3$ en Terminale et à $k > 3$ plus tard.

2. *Recherche du point* H *de* (D_p) *le plus proche du point* A
Tous les élèves de Première savent que H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (D_p). Soient h_1, h_2 les coordonnées de H.

Le vecteur $\vec{u} = (1,1)$ est orthogonal à (D_p) et colinéaire à $\overrightarrow{AH}$. Il existe donc un réel c tel que $\overrightarrow{AH} = c\vec{u}$. Utilisons le produit scalaire $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = c\left\|\vec{u}\right\|^2 = 2c$. D'autre part $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = h_1 - a_1 + h_2 - a_2 = p - a_1 - a_2$. On en déduit $c = \frac{p}{2} - \frac{a_1 + a_2}{2}$, puis

$$h_1 = \frac{p + a_1 - a_2}{2} \; ; \; h_2 = \frac{p + a_2 - a_1}{2}.$$

3. *Recherche d'un point de* (D_p) *à coordonnées entières le plus proche possible de* H
Si les coordonnées de H sont des entiers naturels, le problème est résolu. Si h_1 n'est pas entier, h_2 ne l'est pas non plus car $h_1 + h_2 = p$ est entier. On cherche donc deux entiers naturels x_1 et x_2 tels que $x_1 + x_2 = p$ et que $HM^2 = (x_1 - h_1)^2 + (x_2 - h_2)^2$ soit minimum. Or, $x_2 - h_2 = p - x_1 - (p - h_1)$. Doù $HM^2 = 2(x_1 - h_1)^2$ est minimum lorsque x_1 est un arrondi de h_1 à l'entier le plus proche.(si la partie fractionnaire de h_1 est égale à 0,5, il y a deux solutions). Soit M le point obtenu en arrondissant à l'entier supérieur une coordonnée de H ayant la plus grande (au sens large) partie fractionnaire et en arrondissant l'autre à l'entier inférieur. M est un point à coordonnées entières de (D_p) le plus proche possible du point H.

4. *Recherche d'un point de* (D_p) *à coordonnées entières le plus proche possible du point* A
Montrons que le point M défini dans le paragraphe précédent répond à la question, c'est-à-dire que si Q est un autre point à coordonnées entières de (D_p), $AM^2 \leq AQ^2$.
D'après le théorème de Pythagore, $AQ^2 = AH^2 + HQ^2$ et $AM^2 = AH^2 + HM^2$. Or, d'après ce qui précède, $HM^2 \leq HQ^2$. D'où $AM^2 \leq AQ^2$.

5. *Exemple*
Partager 11 chameaux entre 2 enfants, en donnant la moitié à l'aîné et le tiers au cadet.
La méthode précédente donne :

$$a_1 = \frac{11}{2} \; ; a_2 = \frac{11}{3} \; : h_1 = \frac{11}{2} + \frac{11}{12} = \frac{77}{12} \approx 6,4 \; ; h_2 = \frac{55}{12} \approx 4,6 .$$

On donne alors 6 chameaux à l'aîné et 5 au cadet.

La méthode qui consiste à partager le troupeau proportionnellement à $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ attribue $\frac{33}{5} = 6,6$ à l'aîné et $\frac{22}{5} = 4,4$ au cadet soit en arrondissant à l'entier le plus proche 7 chameaux à l'aîné et 4 au cadet.
Enfin la solution magique qui consiste à emprunter un chameau à Ibrahim, attribue

$\frac{12}{2}=6$ chameaux à l'aîné et $\frac{12}{3}=4$ chameaux au cadet. On rend le chameau emprunté à Ibrahim, mais il reste un chameau non attribué. On peut le donner à Ibrahim en rémunération de son prêt et calculer le taux d'intérêt correspondant. Bien qu'on n'ait besoin du chameau que pendant quelques secondes, on va considérer qu'il a été prêté pendant une journée, ce qui fait un taux journalier de 100%. Selon les directives européennes, le taux annuel équivalent doit être calculé en utilisant la méthode des intérêts composés. Le nombre de chameaux d'Ibrahim va doubler tous les jours et à la fin de l'année il aura 2^{365} chameaux soit plus de 10^{109} chameaux. Le nombre de chameaux sera nettement supérieur au nombre de grains de sable de tous les déserts et certains physiciens estiment qu'il sera supérieur au nombre de particules de l'univers. Le taux peut donc sembler tout à fait invraisemblable, mais certaines banques françaises font beaucoup mieux en prélevant un « forfait minimum » de 5 euros pour tout découvert. Si le découvert a été de un euro pendant une journée, le taux journalier est de 500% et je laisse les lecteurs qui ne craignent pas le vertige calculer le taux annuel équivalent.

c) Étude du cas $k = 3$

1. *Interprétation géométrique*

Minimiser $\sum_{i=1}^{3}(x_i-a_i)^2$ sous les contraintes $\sum_{i=1}^{3}x_i=p$ et $x_i \in \mathbb{N}$, revient à trouver un point M à coordonnées entières du plan (P_p) d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = p$, le plus proche possible du point $A = (a_1,a_2,a_3)$.

2. *Recherche du point* H *du plan* (P_p) *qui minimise la distance du point* A *à un point de* (P_p)

H est l'intersection du plan (P_p) et de la droite de vecteur directeur $\vec{u}=(1,1,1)$ passant par A. Il existe donc un réel c tel que $\overrightarrow{AH}=c\vec{u}$ .Utilisons le produit scalaire $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=c\|\vec{u}\|^2=3c$. D'autre part $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=p-(a_1+a_2+a_3)$. On en déduit $c=\frac{p}{3}-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}a_i$. Les coordonnées de H sont donc $h_i=a_i+\frac{1}{3}\left(\frac{p}{3}-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}a_i\right)$.

3. *Recherche d'un point du plan* (P_p) *à coordonnées entières le plus proche possible du point* H

Si les coordonnées de H sont des entiers naturels, on prend le point H. Sinon, on note $E(h_i)$ la partie entière de h_i et $r = 3 - (E(h_1) + E(h_2) + E(h_3))$. On arrondit à l'entier supérieur les r coordonnées de H ayant les r plus grandes parties fractionnaires (s'il y a des valeurs égales on choisit au hasard) et à l'entier inférieur les $k - r$ autres. On obtient ainsi un point M à coordonnées entières du plan (P_p) et on peut montrer que ce point réalise le minimum cherché (voir démonstration plus loin dans le cas général).

4. *Recherche d'un point du plan* (P_p) *à coordonnées entières le plus proche possible du point A*

On va montrer que le point M défini au paragraphe précédent répond à la question. Soit Q un autre point à coordonnées entières du plan (P_p) ; d'après le théorème de Pythagore, $AQ^2 = AH^2 + HQ^2$ et $AM^2 = AH^2 + HM^2$. Or, $HM^2 \leq HQ^2$. D'où $AM^2 \leq AQ^2$.

5. *Exemple*

Si on applique cette méthode au problème-source où $p = 17$, $a_1 = \dfrac{17}{2}$; $a_2 = \dfrac{17}{3}$, $a_3 = \dfrac{17}{9}$, on trouve : $h_1 = 8{,}8$; $h_2 = 5{,}98$; $h_3 = 2{,}2$. D'où la solution $x_1 = 9$, $x_2 = 6$, $x_3 = 2$.

d) Cas général

1. *Interprétation géométrique*

Minimiser $\sum_{i=1}^{k}(x_i - a_i)^2$ sous les contraintes $\sum_{i=1}^{k} x_i = p$ et $x_i \in \mathbb{N}$, revient à trouver un point M à coordonnées entières de l'hyperplan (H_p) d'équation $\sum_{i=1}^{k} x_i = p$, qui minimise la distance du point $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ à un point à coordonnées entières de (H_p).

2. *Recherche du point* H *de l'hyperplan* (H_p) *qui minimise la distance du point* A *à un point de* (H_p)

H est l'intersection de (H_p) avec la droite de vecteur directeur $\vec{u} = (1, 1, \ldots, 1)$ passant par A. Les calculs sont analogues à ceux du cas $k = 3$ et on trouve que les coordonnées de H sont : $h_i = a_i + \dfrac{1}{k}\left(p - \sum_{i=1}^{k} a_i\right)$. Le partage correspondant à ces valeurs revient à répartir uniformément l'écart entre le nombre de chameaux du troupeau initial et le nombre de chameaux attribués aux enfants suivant les instructions du chamelier. (tout ça pour ça!).

3. *Recherche d'un point* M *à coordonnées entières de l'hyperplan* (H_p) *tel que la distance du point* H *à un point à coordonnées entières de* (H_p) *soit minimale*

Soit E l'ensemble des points de l'hyperplan (H_p) obtenus en arrondissant les coordonnées de H à l'entier supérieur ou inférieur. Plus précisément, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ est un élément de E si $\sum_{i=1}^{k} n_i = p$ et si $n_i = E(h_i)$ ou $n_i = E(h_i) + 1$. On va d'abord chercher un point M de E le plus proche possible du point H, puis montrer que ce point réalise le minimum cherché.

Si les coordonnées de H ne sont pas toutes entières, on a : $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}(h_i) < p$. Soit

$r = p - \sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}(h_i)$.

Tout point N de E est obtenu en choisissant r indices parmi k pour lesquels $n_i = \mathrm{E}(h_i) + 1$ et on aura $n_i = \mathrm{E}(h_i)$ pour les $k - r$ autres indices. Soit I_1 l'ensemble des indices pour lesquels $n_i = \mathrm{E}(h_i) + 1$ et I_2 l'ensemble des indices pour lesquels $n_i = \mathrm{E}(h_i)$. On note $d_i = h_i - \mathrm{E}(h_i)$ la partie fractionnaire de h_i. On a :

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{HN}}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} (n_i - h_i)^2 = \sum_{i \in \mathrm{I}_1} (1 - d_i)^2 + \sum_{i \in \mathrm{I}_2} d_i^2 .$$

Cette somme sera minimale si on choisit pour I_1 les indices des r coordonnées de H ayant les r plus grandes parties fractionnaires, ce qui revient à choisir pour I_2 les $(k - r)$ indices des coordonnées de H ayant les $(k - r)$ plus petites parties fractionnaires (si on a le choix entre des valeurs égales, on choisit au hasard).

Soit M = $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ le point correspondant obtenu en arrondissant à l'entier supérieur les r coordonnées de H ayant les r plus grandes parties fractionnaires et à l'entier inférieur les $k - r$ autres.

On a donc $\left\|\overrightarrow{\mathrm{HN}}\right\|^2 \geq \left\|\overrightarrow{\mathrm{HM}}\right\|^2$ pour tout point N de E. Il reste à montrer que $\left\|\overrightarrow{\mathrm{HN}}\right\|^2 \geq \left\|\overrightarrow{\mathrm{HM}}\right\|^2$ pour tout point N à coordonnées entières de l'hyperplan (H_p).

Soit N = $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ un point à coordonnées entières de (H_p). Si $\mathrm{N} \notin \mathrm{E}$, il existe un indice i tel que $n_i < \mathrm{E}(h_i)$ ou $n_i > \mathrm{E}(h_i) + 1$.

• Si $n_i < \mathrm{E}(h_i)$, il existe un autre indice j tel que $n_j > m_j$; sinon on aurait $\sum_{i=1}^{k} n_i < \sum_{i=1}^{k} m_i = p$. Soit Q = $(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ tel que $q_i = n_i + 1$, $q_j = n_j - 1$, les autres coordonnées de Q étant égales à celles de N.

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{\mathrm{HN}}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{\mathrm{HQ}}\right\|^2 &= (n_i - h_i)^2 + (n_j - h_j)^2 - (n_i + 1 - h_i)^2 - (n_j - 1 - h_j)^2 \\ &= 2(h_i - n_i) - 1 + 2(n_j - h_j) - 1 = 2(h_i - n_i - 1 + n_j - h_j)\end{aligned}$$

Or, $n_i \leq \mathrm{E}(h_i) - 1 \leq h_i - 1$, d'où $h_i - n_i - 1 \geq 0$. D'autre part, $n_j \geq m_j + 1$ et $m_j = \mathrm{E}(h_j)$ ou $m_j = \mathrm{E}(h_j) + 1$. Dans les deux cas, $n_j \geq \mathrm{E}(h_j) + 1$ d'où $n_j - h_j \geq 0$ et on en déduit : $h_i - n_i - 1 + n_j - h_j \geq 0$, d'où $\left\|\overrightarrow{\mathrm{HN}}\right\|^2 \geq \left\|\overrightarrow{\mathrm{HQ}}\right\|^2$.

• Si $n_i > \mathrm{E}(h_i) + 1$, il existe un indice j tel que $n_j < m_j$. Soit Q = $(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ tel que $q_i = n_i - 1$, $q_j = n_j + 1$, les autres coordonnées de Q étant égales à celles de N.

$$\left\|\overrightarrow{HN}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{HQ}\right\|^2=\left(n_i-h_i\right)^2+\left(n_j-h_j\right)^2-\left(n_i-1-h_i\right)^2-\left(n_j+1-h_j\right)^2$$
$$=2\left(n_i-h_i\right)-1-2\left(n_j-h_j\right)-1=2\left(n_i-h_i-1+h_j-n_j\right).$$

Or, $n_i > \mathrm{E}(h_i) + 1$, donc $n_i - h_i - 1 \geq 0$; D'autre part, $n_j \leq m_j - 1$ et $m_j = \mathrm{E}(h_j)$ ou $m_j = \mathrm{E}(h_j) + 1$. Dans les deux cas, $n_j \leq h_j$, d'où $n_i - h_i - 1 + h_j - n_j \geq 0$, d'où $\left\|\overrightarrow{HN}\right\|^2 \geq \left\|\overrightarrow{HQ}\right\|^2$.

On a donc établi que pour tout point N à coordonnées entières de (H_p) tel que la i-ème coordonnée n_i n'appartient pas à $[\mathrm{E}(h_i)\ ;\ \mathrm{E}(h_i) + 1]$, on peut trouver un point Q à coordonnées entières de (H_p) tel que la i-ème coordonnée q_i soit strictement plus proche de l'intervalle $[\mathrm{E}(h_i)\ ;\ \mathrm{E}(h_i) + 1]$ et que Q soit plus proche (au sens large) de H que N. On remarque aussi que si une coordonnée de N, n_j appartient à $[\mathrm{E}(h_j)\ ;\ \mathrm{E}(h_j) + 1]$, alors $q_j \in [\mathrm{E}(h_j)\ ;\ \mathrm{E}(h_j) + 1]$. Si $q_i \notin [\mathrm{E}(h_i)\ ;\ \mathrm{E}(h_i) + 1]$, on applique le même procédé à partir du point Q et ainsi de suite jusqu'à obtenir un point dont la i-ème coordonnée soit dans l'intervalle $[\mathrm{E}(h_i)\ ;\ \mathrm{E}(h_i) + 1]$. Si ce point n'appartient pas à E, on recommence à partir d'une autre coordonnée $n_{i'}$ qui n'est pas dans $[\mathrm{E}(h_{i'})\ ;\ \mathrm{E}(h_{i'}) + 1]$. Comme $0 \leq n_i \leq p$, on obtiendra en un nombre fini d'étapes un point S de E tel que $\left\|\overrightarrow{HN}\right\|^2 \geq \left\|\overrightarrow{HS}\right\|^2$. Or $\left\|\overrightarrow{HS}\right\|^2 \geq \left\|\overrightarrow{HM}\right\|^2$, d'où $\left\|\overrightarrow{HN}\right\|^2 \geq \left\|\overrightarrow{HM}\right\|^2$.

4. *Recherche d'un point de* (H_p) *à coordonnées entières le plus proche possible du point* A

Soit Q un point à coordonnées entières de (H_p). Les vecteurs $\overrightarrow{HQ}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux et on montre alors de la même manière que dans le cas $k = 3$ que $\left\|\overrightarrow{HQ}\right\|^2 \geq \left\|\overrightarrow{HM}\right\|^2$.

5. *Conclusion*

Finalement, pour partager un troupeau de p chameaux entre k enfants en fixant les proportions théoriques $f_1, f_2, \ldots, f_k$ attribuées à chaque enfant lorsque $\mathrm{F}=\sum_{i=1}^{k} f_i < 1$, on calcule les valeurs théoriques $h_i = f_i p + \dfrac{p-p\mathrm{F}}{k}$. Si ces k valeurs ne sont pas des entiers, on arrondit à l'entier supérieur les $r = p - \sum_{i=1}^{k}\mathrm{E}(h_i)$ valeurs théoriques ayant les r plus grandes parties fractionnaires et à l'entier inférieur les $k - r$ autres. La solution $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ ainsi obtenue vérifie : $\sum_{i=1}^{k}\left(f_i p - m_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{k}\left(f_i p - x_i\right)^2$ pour tout k-uplet d'entiers naturels $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ tels que $\sum_{i=1}^{k} x_i = p$.

III. Dénombrement de solutions et dénombrements de problèmes

a) Dénombrements de solutions

Le problème de minimisation précédent peut être résolu sans aucune considération théorique en calculant les valeurs de $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} (x - a_i)^2$ pour tous les k-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ tels que $\sum_{i=1}^{k} x_i = p$. Combien y en a-t-il ? On sait que le nombre de solutions de l'équation $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = p$ est C_{p+k-1}^{k-1} dans $\mathbb{N}^k$ et C_{p-1}^{k-1} dans $(\mathbb{N}^*)^k$.
Par exemple, il y a $C_{19}^{2} = 171$ manières de partager un troupeau de 17 chameaux entre 3 enfants en comptant les cas où certains enfants ne reçoivent rien (hypothèse qu'on a faite dans le paragraphe précédent) et $C_{16}^{2} = 120$ partages si chaque enfant reçoit au moins un chameau (dans ce cas les résultats du II ne sont plus valables et je laisse le lecteur reprendre le problème).
Après le partage, le troupeau initial est scindé en k troupeaux et on peut calculer le nombre de manières d'effectuer un tel partage qui est le nombre de partitions de p en k termes. À ma connaissance, il n'existe pas de formule générale. Pour $p = 17$ et $k = 3$, on trouve qu'il y a 24 manières de partager un troupeau de 17 chameaux en 3 troupeaux comprenant chacun au moins un chameau.

b) Dénombrements de problèmes

Les résultats précédents permettent de donner un minorant du nombre de problèmes à solution magique. Soit $q = p + d$ le nombre de chameaux du troupeau obtenu en empruntant d chameaux. On dira qu'une solution est magique si tous les nombres $f_i q$ sont entiers et si $\sum_{i=1}^{k} f_i q = p$. En choisissant k entiers positifs $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tels que $\sum_{i=1}^{k} n_i = p$, et en prenant $f_i = \dfrac{n_i}{q}$, on obtient un problème à solution magique. Il y a donc au moins C_{p-1}^{k-1} problèmes à solution magique pour p, k et q fixés et au moins 2^{p-1} pour p et q fixés. Ainsi avec un troupeau de 17 chameaux à partager entre 3 enfants, on peut poser au moins 120 problèmes dans lesquels une solution magique apparaîtra en empruntant un chameau et au moins $2^{16} = 65\,536$ problèmes en faisant varier le nombre d'enfants de 1 à17.

Si on considère qu'une solution telle que $\sum_{i=1}^{k} f_i q < p$ est aussi magique, il y a au moins C_p^k problèmes à solution magique pour p, k et q fixés et au moins $2^p - 1$ pour p et q fixés.

Ainsi avec 17 chameaux à partager entre 3 enfants, on peut poser au moins $C_{17}^3 = 680$ problèmes où une solution magique apparaîtra en empruntant un chameau, mais la totalité du troupeau ne sera pas toujours distribuée, et au moins $2^{17} - 1 = 131\,071$ problèmes en faisant varier le nombre d'enfants de 1 à 17.