Des ellipses … sans ellipses : les amphithéâtres romains.

Bernard Parzysz(*)

Les Romains ont hérité les spectacles de gladiateurs des Étrusques, lesquels avaient coutume de donner des jeux pour honorer leurs défunts. À Rome, les premiers combats, qui remontent au 3e siècle avant notre ère, se déroulaient à l'intérieur de structures en bois démontables. Celles-ci cédèrent progressivement la place à des amphithéâtres en dur (brique et/ou pierre), et les « jeux du cirque » devinrent si populaires que, jusqu'à la fin du 3e siècle de notre ère(1), les Romains construisirent partout où ils s'installaient, de l'Espagne au Moyen-Orient, de nombreux monuments(2), qui devinrent en fait le signe le plus ostentatoire de la romanité.

À l'origine, l'amphithéâtre était théoriquement circulaire, puisqu'il résultait de la réunion de deux théâtres semi-circulaires (le préfixe grec *amphi* ($\alpha\mu\varphi\iota$) signifie « autour », « des deux côtés »). Mais il évolua rapidement vers une forme « ovale »(3), comportant deux parties principales(4) : l'arène proprement dite, où se déroulaient les spectacles, et la *cavea*, ensemble des gradins entourant l'arène.

1. Ellipses ou non ?

On peut se poser la question de la nature théorique des courbes qui déterminent arène et *cavea*. Plus précisément, s'agit-il d'ellipses ? Une question essentielle est celle des rangées de gradins, dont il est souhaitable qu'elles aient la même largeur sur l'ensemble du pourtour. Ce qui implique en particulier que la « distance » entre la courbe délimitant l'arène et celle délimitant la *cavea* soit constante. Or, des ellipses homothétiques (fig. 1) ne satisfont pas cette condition.

En effet, en notant a (resp. b) le demi grand (resp. petit) axe de l'une de ces ellipses, les distances AA′ et BB′ sont dans le rapport a/b, rapport qui n'est égal à 1 que dans le cas trivial où il s'agit de cercles. Si l'on veut avoir AA′ = BB′, il faut donc renoncer à avoir des ellipses homothétiques.

(*) Didirem (univ. Paris-7).

(1) Les combats de gladiateurs furent finalement interdits en 404 par l'empereur Honorius.

(2) Plus de 200 ont pu être localisés.

(3) Une particularité gauloise consistait à ne construire des gradins que sur une partie du pourtour de l'arène.

(4) En faisant abstraction des coulisses, qui comportaient les locaux destinés aux gladiateurs et les cages des animaux.

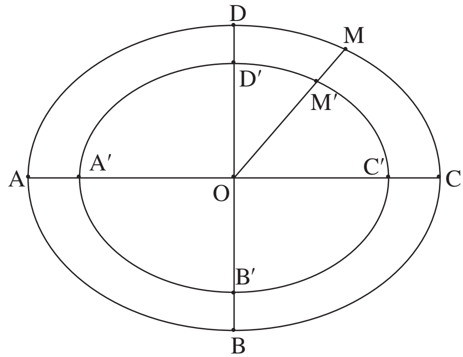


fig. 1

Donnons-nous alors une ellipse ($\mathcal{E}$) de sommets A, B, C, D et fixons le sommet A′ de l'ellipse ($\mathcal{E}'$) de mêmes axes. Si l'on veut satisfaire la condition, les trois autres sommets de ($\mathcal{E}'$) seront déterminés par la condition AA′ = BB′ = CC′ = DD′ (fig. 2).

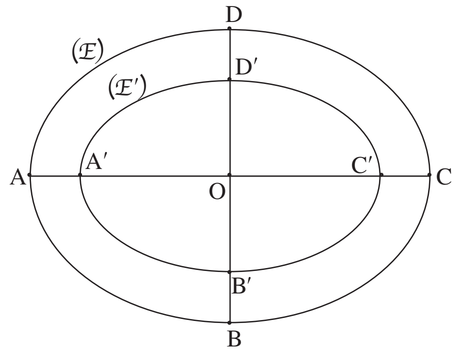


fig. 2

On peut alors constater que, d'un point de vue pratique, cette solution paraît acceptable. La question est alors celle de la construction d'une ellipse dont les sommets sont donnés. Ce problème peut se résoudre grâce à une affinité (fig. 3) : on trace le cercle de diamètre [B′D′] et on le transforme par l'affinité orthogonale d'axe [B′D′] et de rapport OA′/OB′.

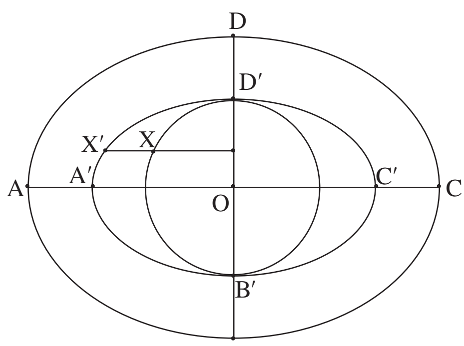


fig. 3

Mais il s'agit là d'une solution théorique, dont la réalisation pratique risque de se révéler fastidieuse. On est en effet contraint de tracer l'ellipse point par point, faute de disposer des foyers qui permettraient le tracé au cordeau par la méthode dite « du jardinier ». Une autre méthode mécanique classique, dite « de la bande de papier »(5), permet elle aussi un tracé continu de l'ellipse et possède l'avantage de ne pas nécessiter la connaissance de la position des foyers … mais elle ne sera inventée qu'au 17e siècle(6).

2. Une solution ingénieuse

J.-C. Golvin [Golvin 2008], architecte et archéologue, indique qu'en réalité les courbes délimitant l'arène et la cavea ne sont pas des ellipses, et qu'il s'agit de courbes fermées, certes proches de l'ellipse mais obtenues par raccordement d'arcs de cercle(7) selon la procédure suivante :

1° Selon deux axes perpendiculaires en O, on trace un losange ABCD (fig. 4) constitué de la réunion de quatre « triangles égyptiens » (3-4-5)(8) AOB, BOC, COD et DOA.

2° On choisit un point X sur [OA), puis on trace l'arc de cercle de centre A passant par X compris entre [BA) et [DA), qui coupe respectivement ces demi-droites en H et G. De même, on trace l'arc de cercle de centre B passant par H et compris entre [BA) et [BC) (fig. 5).

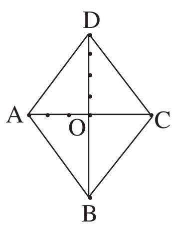


fig. 4

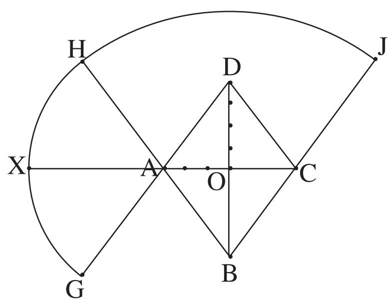


fig. 5

[Remarquons que les deux cercles ont même tangente au point de raccordement H, puisque par construction leurs centres A et B sont alignés avec H].

(5) Elle consiste à considérer trois points fixes A, B, M sur une même droite (la « bande de papier ») et à faire se déplacer A sur une droite d et B sur une droite d' perpendiculaire à d. Le lieu du point M est alors une ellipse.
(6) Par Philippe de la Hire (1640-1718).
(7) Il s'agit en fait du tracé d'un arceau en « anse de panier », symétrisé.
(8) Le triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5 est dit « égyptien », mais en fait on le trouve déjà mentionné sur des tablettes babyloniennes. Il figure toutefois dans le papyrus Rhind, à l'occasion du calcul de la pente d'une pyramide (la pyramide de Khephren est d'ailleurs conforme à ce modèle). On considère également que les architectes égyptiens utilisaient ce triangle pour tracer les angles droits : une corde divisée en 12 parties égales par des nœuds et nouée aux deux bouts (corde à 13 nœuds) permettait en effet de matérialiser un triangle « égyptien » (3 + 4 + 5 = 12) ; cette technique a perduré pendant tout le Moyen-Âge.

Il ne reste plus alors qu'à réaliser les tracés symétriques par rapport à O pour compléter le tracé de l'ovale $(\mathcal{V})$ (fig. 6).

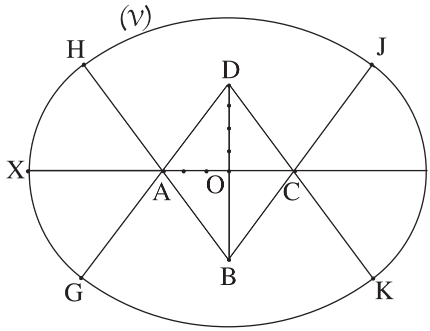


fig. 6

Si l'on compare l'ovale obtenu avec l'ellipse $(\mathcal{E})$ admettant les mêmes sommets, on peut constater qu'ils sont très proches (sur la fig. 7, l'ellipse est en vert).

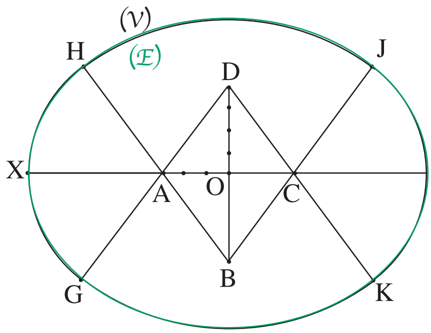


fig. 7

Pour tracer un autre ovale $(\mathcal{V}')$, il suffit de choisir un autre point, X′, sur [OA) et de recommencer la même construction (fig. 8).

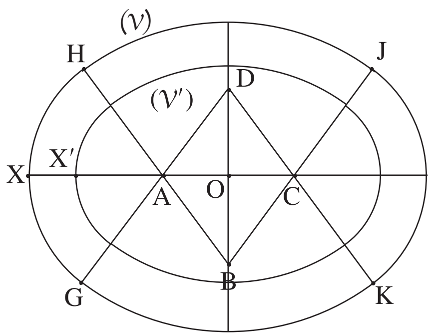


fig. 8

Soit maintenant un point quelconque M de $(\mathcal{V})$, distinct des quatre points de raccordement G, H, J, K. Il appartient à un (et un seul) des quatre arcs de cercle constituant l'ovale, et il lui correspond canoniquement un point unique M′, situé sur l'arc de $(\mathcal{V}')$ construit sur le même centre. Comme, par construction, les rayons des deux arcs diffèrent de XX′, la distance MM′ est constante. Et il en va bien entendu de même pour les points de raccordement. Le même procédé permet donc de tracer, *à partir du seul losange initial*, non seulement la courbe de l'arène et celle de la *cavea*, mais aussi toutes celles qui correspondent aux rangées de gradins (fig. 9).

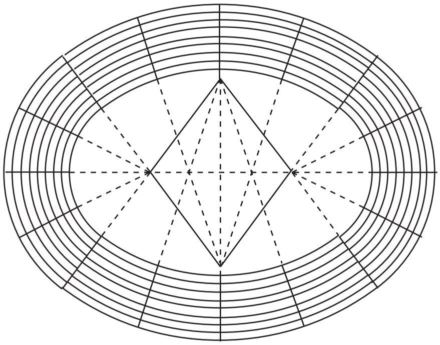


fig. 9 (schéma)

Cette procédure permet ainsi un tracé continu (par morceaux) des courbes. En outre, en tout point d'un gradin quelconque, la normale passe par l'un des quatre points A, B, C ou D. Il en résulte que, sans presque tourner la tête, on pourra voir une bonne partie de l'arène, et particulièrement le centre.
Enfin – et ce n'est pas son moindre avantage – la procédure décrite ci-dessus ne fait appel qu'aux instruments usuels de l'époque, c'est-à-dire la *groma*(9), pour déterminer les axes de l'édifice (voir Annexe), et un long cordeau (d'une centaine de mètres), pour tracer les arcs de cercle.

3. De la théorie aux réalisations

Malgré le passage des siècles, il subsiste heureusement quelques amphithéâtres romains pour lesquels on a pu déterminer les dimensions des axes. En voici une petite liste (tableau 1), qui est bien sûr loin d'être exhaustive(10).

Notations :
$2a$ (resp. $2b$) : longueur du grand (resp. petit) axe de la *cavea*,
$2a'$ (resp. $2b'$) : longueur du grand (resp. petit) axe de l'arène.
Les longueurs de ces axes sont exprimées en mètres et arrondies à l'unité.

(9) Son nom dériverait, *via* l'étrusque, du grec *gnomon* ($\gamma\nu o\mu\omega\nu$).
(10) N'ont été retenus que les amphithéâtres pour lesquels j'ai pu trouver à la fois des dimensions fiables à la fois pour la *cavea* et l'arène. Notons au passage que, pour diverses raisons qu'on peut imaginer, ces dimensions sont susceptibles de varier quelque peu selon les sources. Ainsi, pour la *cavea* de Fréjus on trouve 114 m × 82 m et 113 m × 85 m. La précision du mètre s'avère donc quelque peu illusoire.

Site[11]	$2a$	$2b$	$2a'$	$2b'$	$a - a'$	$b - b'$
Rome (Italie)	188	156	86	54	51	51
Capoue (Italie)	167	137	80	50	43,5	43,5
Italica (Espagne)	157	134	75	50	41	42
El Djem (Tunisie)	148	122	65	39	41,5	41,5
Pouzzoles (Italie)	147	118	72	42	37,5	38
Nîmes (France)	133	101	69	38	32	31,5
Bordeaux (France)	132	111	70	47	31	32
Carthage (Tunisie)	120	93	65	37	27,5	28
Fréjus (France)	113	85	68	39	22,5	23
Tours (France)	112	94	68	50	22	22
Lyon (France)	105	80	68	42	18,5	19
Avenches (Suisse)	99	86	52	38	23,5	24
Martigny (Suisse)	76	64	46	35	15	14,5

Tableau 1

Le tableau 1 indique également (cf. fig. 10) les distances XX′ (= $a - b$) et YY′ (= $a' - b'$).

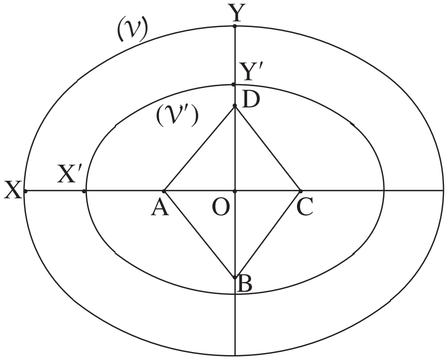


fig. 10

D'après le tableau 1, on peut voir que l'écart absolu $|(a - a') - (b - b')|$ n'excède jamais le mètre ; ce qui, compte tenu des approximations faites sur les mesures et des imprécisions inhérentes à la réalisation des tracés, s'avère tout à fait compatible avec l'hypothèse de J.-C. Golvin, qui a pour conséquence que les distances $a - a'$ et $b - b'$ sont théoriquement égales.

Les dimensions du losange initial pourraient être obtenues à partir d'un plan de l'amphithéâtre, puisque – toujours selon J.-C. Golvin – il suffirait de déterminer les points vers lesquels convergent les passages séparant les travées (cf. fig. 9).

Nous pouvons néanmoins nous en faire une idée en acceptant l'hypothèse que le losange est bien constitué de quatre triangles égyptiens. En notant u le module ayant servi à construire ces triangles, leurs côtés ont pour longueurs $3u$, $4u$ et $5u$.

(11) Certains de ces amphithéâtres (nommément ceux de Carthage, Tours, Lyon et Avenches), ont été agrandis dans une deuxième phase de construction. Nous ne prenons ici en compte que l'état initial.

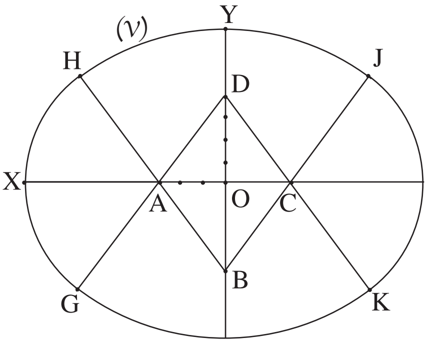


fig. 11

D'après la procédure de construction (fig. 11), et en posant AX = d, on a :
OX = OA + AX, soit $a = d + 3u$,
OY = BY − OB et BY = BH = BA + AH, soit $b = (d + 5u) - 4u = d + u$.
Il en résulte $u = (a - b)/2$.
Le tableau 2 indique les valeurs de u obtenues, d'une part pour la *cavea* ($u_C = (a - b)/2$) et d'autre part pour l'arène (($u_A = (a' - b')/2$), ainsi que la moyenne u de ces deux valeurs.

Site	u_C	u_A	u
Rome (Italie)	8	8	8
Capoue (Italie)	7,5	7,5	7,5
Italica (Espagne)	5,8	6,3	6
El Djem (Tunisie)	6,5	6,5	6,5
Pouzzoles (Italie)	7,3	7,5	7,4
Nîmes (France)	8	7,8	7,9
Bordeaux (France)	5,3	5,8	5,5
Carthage (Tunisie)	6,8	7	6,9
Fréjus (France)	7	7,3	7,1
Tours (France)	4,5	4,5	4,5
Lyon (France)	6,3	6,5	6,4
Avenches (Suisse)	3,3	3,5	3,4
Martigny (Suisse)	3	2,8	2,9

Tableau 2

Ce tableau montre que, malgré les réserves faites plus haut, on obtient des valeurs proches pour le module de l'arène et celui de la *cavea*. En outre, mis à part les deux monuments suisses qui présentent un module particulièrement faible(12), on peut constater que le module se situe *grosso modo* entre 4,5 m et 8 m (soit entre 15 et 27 pieds romains(13)), en fonction de la taille de l'édifice projeté.
En outre, le quotient du demi grand axe de la *cavea* (resp. de l'arène) par le module, soit a/u (resp. a'/u) nous fournit une idée du rapport de leur taille à celle du losange de base. Le tableau 3 fait apparaître que, pour la cavea, ce rapport est de l'ordre de 10

(12) À peu près moitié des autres.
(13) Le pied romain (pes) valait 296 mm.

et que pour l'arène il est à peu près moitié moindre.

Site	a/u	a'/u
Rome (Italie)	11,8	5,4
Capoue (Italie)	11,1	5,3
Italica (Espagne)	13,1	6,3
El Djem (Tunisie)	11,4	5
Pouzzoles (Italie)	10	4,9
Nîmes (France)	8,4	4,4
Bordeaux (France)	12	6,4
Carthage (Tunisie)	8,7	4,7
Fréjus (France)	7,9	4,8
Tours (France)	12,4	7,6
Lyon (France)	8,2	5,3
Avenches (Suisse)	14,7	7,7
Martigny (Suisse)	13,2	8

Tableau 3

Ceci nous permet finalement de construire le schéma théorique de la fig. 12, obtenu pour $a = 10u$ et $a' = 5u$(14).

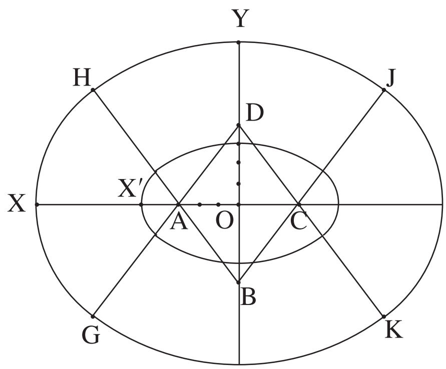


fig. 12

En conclusion, et bien que les Romains aient eu connaissance des travaux des Grecs sur les coniques (notamment ceux d'Apollonius), ce n'est pas l'ellipse qu'ils ont utilisée pour la construction de leurs amphithéâtres, mais une méthode finalement plus astucieuse et très bien adaptée à la finalité de ces monuments (arène et gradins), méthode permettant de tracer de façon continue, à partir d'une base unique, une famille de courbes ovales obtenues par raccordement d'arcs de cercles, qui sont pratiquement indiscernables d'ellipses et qui en outre sont parallèles et équidistantes. Comme le note J.-C. Golvin : « *Grâce à ce tracé et avec les moyens les plus simples, on pouvait implanter avec précision tous les murs de cet édifice complexe*. »(15). Et, même si les architectes romains n'étaient apparemment considérés par leurs contemporains que comme de simples artisans (c'est ainsi qu'ils ne sont jamais cités dans les documents épigraphiques retrouvés dans les monuments), on ne peut s'empêcher d'admirer leur

(14) Ceci correspond, à peu de chose près, au cas de l'amphithéâtre de Pouzzoles.
(15) [Golvin 2008], p. 97.

inventivité et la qualité de leurs réalisations. N'y a-t-il pas là de quoi montrer à nos élèves que nos ancêtres n'avaient rien à nous envier sur ce point ?

Références

Dilke, O.A.W. (1995). *Les arpenteurs de la Rome antique* (Trad. J. Gaudrey). Éd. APDCA, Sophia Antipolis.

Golvin, J.-C. (2008). L'architecture romaine et ses créateurs, in *Rome*. Le Point (hors-série) pp. 92-101.

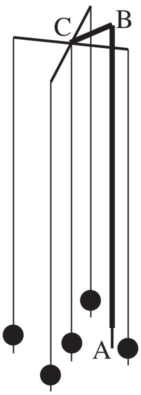
Leclant, J. (dir.) (2005). *Dictionnaire de l'Antiquité*. Éd. PUF, Paris.

Morvillez, E. & Guillou, J.-M. (1999). *Rome et son empire*. Éd. Casterman, Tournai.

Annexe
La groma

Peut-être n'est-il pas inutile de dire ici un mot rapide de la *groma*, auxiliaire incontournable des arpenteurs romains.

Elle consiste (*voir ci-contre*) en une croix à branches perpendiculaires et de même longueur, fixée horizontalement sur une potence (ABC) de 1, 5 à 2 m de haut dont l'extrémité pointue A est destinée à être fichée dans le sol. La croix peut pivoter librement autour du point de fixation. À chaque extrémité de la croix et en son centre sont suspendus des fils à plomb venant affleurer le sol.



Le principe de fonctionnement est le suivant : une fois la *groma* plantée (si possible en un lieu bien dégagé), l'arpenteur oriente la croix de façon que l'une de ses branches ait la direction voulue. Un assistant, muni d'un lot de piquets, part dans cette direction. Parvenu à une certaine distance (de l'ordre d'une centaine de mètres), et sur les indications de l'arpenteur qui le guide en visant à l'aide des trois fils suspendus à la branche choisie, l'assistant plante un piquet aligné avec cette branche, puis il se déplace en se rapprochant de l'arpenteur.

La même procédure est alors réitérée plusieurs fois, et on dispose finalement d'un alignement de piquets dans la direction voulue. L'arpenteur rejoint alors le premier piquet planté par son assistant, plante la *groma* à cet emplacement, puis oriente une branche de la croix selon l'alignement déjà réalisé. L'opération peut ensuite se poursuivre *ad libitum*.

La *groma*, démontable donc facile à transporter, avait essentiellement deux usages. Elle permettait de déterminer :

- des alignements, comme on vient de le voir ;
- de déterminer des directions perpendiculaires, en recommençant l'opération définie précédemment avec l'autre branche de la croix (celle-ci ayant été préalablement fixée).

La *groma* était utilisée à la fois par les employés du cadastre (partage et bornage des terres), les ingénieurs militaires (construction des routes) et les architectes (planification des villes[16] et des bâtiments).

(16) L'implantation d'une ville romaine s'effectuait sur la base du tracé des axes, perpendiculaires, des deux voies principales, le *cardo maximus* et le *decumanus*.