Exercices de ci, de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire. Par ailleurs, les exercices de géométrie prennent une part importante de la rubrique ; il serait souhaitable qu'il y ait plus de propositions d'exercices d'algèbre et d'analyse.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer à :

Serge Parpay
22 rue Alphonse Rougier
79000 NIORT
ou par Mél à : jeanfromentin@orange.fr

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique en joignant, si vous le pouvez, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent dégérées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 478-1 (Pierre Duchet et Jean Moreau de Saint-Martin – Paris)
Soit (Δ) une droite et O un point extérieur à la droite. On considère un nombre indéterminé de points A_i de (Δ) tels que les cercles inscrits dans les triangles OA_iA_{i+1} aient tous même rayon r. Démontrer que, quel que soit k, les cercles inscrits dans les triangles OA_iA_{i+k} ont tous même rayon r_k.

Michel Hébraud (Toulouse) nous avait signalé cet exercice, donné dans la rubrique « Les problèmes de l'APMEP » du Bulletin Vert nº 456 (janvier-février 2005) et dont la solution n'est pas parue dans les bulletins qui ont suivi. Avec l'accord de Pierre Duchet, nous le redonnons ici.

Exercice 478-2 (Georges Lion – Wallis)
Trouver le lieu géométrique des centres des triangles équilatéraux inscrits dans un carré.

Exercice 478-3 Exercices pour amateur (**Édouard Lucas** – Théorie des nombres [tome 1] – Nouvelle édition : Blanchard 1961)
1) On partage la suite des nombres impairs en groupes contenant respectivement 1, 2, 3, …, n termes. Trouver la somme des p termes du groupe de rang p. (Nicomède de Gérase [environ 100 ans av. J.C.])
2) On partage la suite des nombres impairs en groupes contenant respectivement 1,

2, 3, 4, … termes. Démontrer que la somme des termes renfermés dans les n premiers groupes de rang impair est égal à n^4.
3) Démontrer que la somme des n^2 entiers qui suivent les n premiers est le double des n premiers cubes.

Solutions

Exercice 475-1 (C.D. Olds. Continued fractions (1963))

1) Décomposer 433 en une somme de deux carrés.
2) Soit deux détachements de soldats, chacun de ces détachements formant un carré de b rangs de b soldats. Montrez qu'il est impossible de former avec les deux carrés un unique carré de soldats.
Montrer que, si un soldat est ajouté ou enlevé à l'un des deux carrés, il est parfois possible que les deux détachements soient regroupés en un seul carré de soldats.

Solution de Robert Bourdon (Tourgeville)

1) Les carrés des nombres entiers terminés par k $(0 \le k \le 9)$ sont terminés par : 0, 1, 4, 5, 6, 9.
Pour qu'une somme de deux carrés se termine par 3, il n'y a qu'un groupement possible : 4 + 9.
Les deux nombres se terminent donc par 2 ou 8 pour l'un et par 3 ou 7 pour l'autre.

En outre, $\sqrt{433}$ a une partie entière inférieure ou égale à 20. Donc, puisque $x^2 + y^2 = 433$, x ou y est strictement inférieur à 20 et l'un des deux nombres possède deux chiffres.
Prenons $x = 18$; $x^2 = 324$, $y^2 = 105$; $x = 18$ ne convient pas.
Prenons $x = 17$; $x^2 = 289$, $y^2 = 144$; $y = 12$.
D'où la solution $x = 17$ et $y = 12$, solution unique puisqu'on n'a que deux essais possibles (17 ou 18).
Remarque : cette solution est du niveau d'une section S.

2) Chaque détachement comporte b^2 soldats. Deux carrés comportent $2b^2$ soldats. Si on veut la mettre en carré, chaque rang devra comporter $b\sqrt{2}$ soldats ; incongru ! il faudrait en couper !
* Mais si on ajoute ou enlève un soldat à l'un des carrés, il faudrait que l'on puisse avoir, pour former un carré de c soldats, $2b^2 + 1 = c^2$, soit

$$c^2 - 2b^2 = 1 \qquad (1),$$

ou $2b^2 - 1 = c^2$, soit

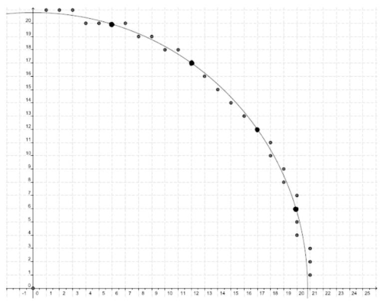
$$c^2 - 2b^2 = -1 \qquad (2),$$

avec b et c entiers naturels.
On est amené à chercher les solutions $(c\ ;\ b)$ des deux équations. L'équation (1) est une équation de Pell-Fermat dont la plus petite solution positive est (3 ; 2). Les autres solutions seront données par $c + b\sqrt{2} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n$ pour n entier.

Par exemple, pour $n = 2$, on retrouve la solution (17 ; 12) obtenue au 1).
L'équation (2) est une équation de Pell-Fermat dont la plus petite solution positive est (1 ; 1). Les autres solutions sont données par $c + b\sqrt{2} = \left(1 + 1\sqrt{2}\right)^n$ pour $n = 1$, 3, 5, … Par exemple, pour $n = 3$ on obtient (3 ; 2) ; pour $n = 5$ on obtient (41 ; 29).
* *NDLR : Cette rédaction est un condensé de la solution de R. Bourdon.*

Solutions de M. Ayanou (Cayenne), Jean-Claude Carréga (Lyon), Marie-Laure Chaillou (Épinay/Orge), Pierre Renfer (Ostwald), Odile Simon (La Prénessaye).
Une **solution** très détaillée de **Alain Corre (Moulins)** dont nous extrayons l'idée pour trouver une solution à la partie 1).

On peut aussi s'aider du fait que $x^2 + y^2 = 433$ est l'équation d'un cercle de centre O(0 ; 0) et de rayon $\sqrt{433}$. Les solutions cherchées dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont les points à coordonnées entières sur la partie du cercle située dans le premier quadrant.
On vérifie que les points de coordonnées (7 ; 20) et (20 ; 7) n'appartiennent pas au cercle, alors que les points de coordonnées (7 ; 12) et (12 ; 7) lui appartiennent.



Quant à la partie 2), Alain Corre fait la remarque suivante :
« *Un problème qui revient à une équation de Pell-Fermat est le suivant : Un détachement de soldats peut former soit un triangle, soit un carré. Combien comporte-t-il de soldats ? (une version plus pacifiste ferait intervenir des oies sauvages).*
Ce problème revient au problème mathématique : quels sont les nombres figurés à la fois triangulaires et carrés ? »

Exercice 475-2 (Olympiades suédoises 1961 - 1968. [Document S.M.F.])
Soient x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$), des nombres réels tels que $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ et $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$.
Soit $z_1, z_2, \dots, z_n$ une permutation arbitraire des nombres $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Démontrer l'inégalité $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - z_i\right)^2$.

Solution de Jean-Claude Carréga (Lyon)

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - z_i\right)^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} z_i^2$$

$$\Leftrightarrow -2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq -2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

On est donc ramené à démontrer que si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ est une permutation des nombres $y_1, y_2, \ldots, y_n$, alors $\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Démontrons cela par récurrence sur n.

Si $n = 1$, on a $z_1 = y_1$, d'où $x_1 z_1 = x_1 y_1$.

Soit $n \geq 2$, supposons la propriété à l'ordre $n-1$ et considérons une permutation $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Il existe k, $1 \leq k \leq n$, tel que $z_k = y_n$. Considérons alors la permutation $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n$ obtenue à partir de $z_1, z_2, \ldots, z_n$ en permutant z_k et z_n. On a donc, pour $i \neq k$ et $i \neq n$, $z'_i = z_i$ et $z'_k = z_n$, $z'_n = z_k = y_n$.

On a alors $\sum_{i=1}^{n} x_i (z_i - z'_i) = x_k (z_k - z'_k) + x_n (z_n - z'_n) == (x_k - x_n)(z_k - z'_k)$.

Puisque $x_k \geq x_n$ et $z_k = y_n \leq z'_k$, on a $\sum_{i=1}^{n} x_i (z_i - z'_i) \leq 0$, soit

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i z'_i \tag{1}$$

D'autre part, $z'_1, z'_2, \ldots, z'_{n-1}$ est une permutation de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, donc par l'hypothèse de récurrence on a $\sum_{i=1}^{n-1} x_i z'_i \leq \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i$ et puisque $z'_n = y_n$, on a aussi

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{2}$$

Compte tenu des inégalités (1) et (2), on a bien $\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Solution « physique » donnée dans les Cahiers du groupe du Clain (nº 8 – 1978)

On peut supposer tous les nombres (x_i) et (y_i) positifs car une même translation ne modifie pas les deux membres de l'inégalité proposée.Considérons les (y_i) comme des intensités de forces verticales appliquées respectivement aux points d'abscisse (x_i) alignés sur une tige horizontale. La résultante de ces forces a pour intensité $\sum_{i=1}^{n} y_i$ qui ne change pas quand on permute les forces en (z_i). Le moment résultant par rapport à O est alors $\sum_{i=1}^{n} x_i z_i$. Il est maximum quand on applique la plus grande force au point le plus éloigné de O et ainsi de suite (par additivité des moments) pour les suivantes.

On a donc $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i y_{n-i+1}$ (ordre inverse), ou

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_{n-i+1})^2 .$$

Solutions de M. Ayanou (Cayenne), Alain Corre (Moulins), Mathilde Lahaye-Hitier (Helsingborg- Suède), Georges Lion (Wallis), Éric Oswald (Borgo), Pierre Renfer (Ostwald).

Textes signalés par Michel Hébraud (Toulouse) :
– « Inequalities » Hardy-Littlewood-Polya (Cambridge University Press),
– « Olympiades de mathématiques » de Terik Soulami.

Exercice 475-3 (Miguel Amengual Covas - Mallorca)

Sean P, Q, R, S los respectives puntos medios de los lados [AB], [BC], [CD], [DA] de un cuadrilátero ABCD convexo.
Sea O el punto de intersección de (PR) y (QS).
Si OA = OC y OB = OD, demostrar que ABCD es un paralelogramo.

Solution de Pierre Renfer (Ostwald)

Comme $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{PQ} = 2 \cdot \overrightarrow{SR}$, le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.
Le point O est donc l'isobarycentre des points P, Q, R, S ainsi que des points A, B, C, D.
Le point O est aussi le milieu de U et V, U et V désignant les milieux des diagonales [AC] et [BD].
Si les points U et V étaient distincts, la droite passant par O, U et V serait médiatrice à la fois de [AC] et de [BD], ce qui est absurde.
Donc U et V coïncident et le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Solution de Georges Lion (Wallis)
Por Al-Kashi habemos :

$$4\mathrm{OP}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 + 2\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} \cos \widehat{\mathrm{AOB}},$$

y

$$4\mathrm{OR}^2 = \mathrm{OC}^2 + \mathrm{OD}^2 + 2\mathrm{OC} \cdot \mathrm{OD} \cos \widehat{\mathrm{COD}}.$$

Conocemos OP = OR (clasico), pues $\widehat{\mathrm{AOB}} = \widehat{\mathrm{COD}}$.

Lo mismo va para $\widehat{\mathrm{AOD}} = \widehat{\mathrm{BOC}}$.

Entonces $\widehat{\mathrm{AOC}} = \widehat{\mathrm{AOB}} + \widehat{\mathrm{BOC}} = \frac{1}{2}\left(\widehat{\mathrm{AOB}} + \widehat{\mathrm{BOC}} + \widehat{\mathrm{COD}} + \widehat{\mathrm{DOA}}\right) = 180°$.

Los puntos A, O, C estan alineados, O es el punto medio de [AC] y lo mismo va para O medio punto de [BD]. q.e.d..
Hasta luego.

Suite page 639

Beaucoup de réponses à ce problème :

- Géométrie « classique » : **Miguel Amengual Covas (Mallorca), Odile Simon (La Prénessaye), Robert Bourdon (Tourgeville)**,
- Utilisation de symétrie ou constructions annexes : **Alain Corre (Moulins), Raymond Raynaud (Digne), Jean-Claude Carréga (Lyon), Jean Lefort (Wintzenheim)**,
- Utilisation de relations métriques dans le triangle : **Éric Oswald (Borgo)**,
- Utilisation d'un repère orthonormé : **Jean Gounon (Chardonnay)**.