

Introduction problématisée aux probabilités conditionnelles en classe de Terminale S

Alain Parmentelat(*)

1. Introduction

Le document de travail est un extrait d'une chronique de Ian Stewart intitulée « Visions mathématiques », parue dans le n° 167 (septembre 1991) de *Pour la Science*.

L'activité présentée concerne la classe de Terminale S.

Thème du programme de Terminale S : conditionnement et indépendance.

Pré-requis : langage des événements (programme de Première S), fluctuation d'échantillonnage (programme de Seconde) et fourchette de sondage (thème de Seconde).

Travail préalable : lecture par chaque élève, à la maison, du document énoncé (texte en annexe 1).

2. Vers une modélisation

(Modélisation = description mathématique de l'expérience aléatoire).

Ce travail est réalisé en classe en introduction du chapitre de probabilités. Sur ma demande, les élèves indiquent par écrit les différentes étapes de l'expérience aléatoire. La durée de cette recherche n'excède pas cinq minutes. Elle est suivie d'une synthèse, les étapes 2 et 3 pouvant soulever quelques questions.

L'expérience aléatoire se déroule en trois temps. Le respect de la chronologie est essentiel.

Étape 1 : Persée choisit une caverne.

Hypothèse de modélisation : les différents contenus des cavernes sont équiprobables : la probabilité de trouver Andromède (succès) est de $1/3$.

Étape 2 : La pie donne une information.

La pie promet d'aider Persée, mais elle n'est pas autorisée à révéler la caverne où est Andromède (heureusement pour le problème !). Il est clair qu'elle ne dira pas si Persée a fait un bon ou mauvais choix. Le texte ne donne qu'un exemple, mais il apparaît assez clairement que l'information de la pie consiste à indiquer une caverne non choisie par Persée contenant une gorgone.

Ainsi, si Persée a indiqué une mauvaise caverne, le choix de la pie est imposé.

Si Persée a indiqué la bonne caverne, la pie peut (et doit) choisir entre les deux

(*) Lycée H. Friant. Poligny (39).

cavernes restantes.

Comment décide-t-elle ? au hasard, avec ou sans stratégie bien définie ? Le texte ne précise rien sur ce point.

Étape 3 : L'information donnée à l'étape 2 limite le deuxième choix de Persée à deux cavernes. Il peut donc maintenir son choix ou le modifier.

(Poser le problème ainsi signifie bien qu'on tient compte de l'étape 1, poser le problème sous la forme du choix entre les deux cavernes restantes reviendrait à éliminer l'étape 1. Ce n'est donc pas un choix de caverne, mais un choix de stratégie).

Question : La probabilité de succès de Persée en cas de modification de son choix est elle $1/2$ ou $2/3$?

Sondage préalable (effectué après cet essai de modélisation) réalisé sur 4 ans avec 98 élèves : 52% répondent $1/2$, 31% répondent $2/3$, les autres, soit 17%, s'abstiennent de répondre.

3. Une première expérimentation

Cette expérimentation se fait en classe après la modélisation précédente. Cela permet de faire « vivre » le modèle, et de vérifier que l'ensemble des élèves a compris l'énoncé du problème et assimilé les trois étapes décrites précédemment.

Après cette description, les élèves réalisent l'expérience aléatoire par binôme :

L'élève 1 place Andromède (note la caverne où elle se trouve).

L'élève 2 joue le rôle de Persée et choisit une caverne.

L'élève 1 joue le rôle de la pie et indique une caverne où se trouve une gorgone.

L'élève 2 modifie son choix (on impose la modification du choix initial).

L'élève 1 lui signifie alors son succès ou son échec.

4. Premier bilan

Le nombre de binômes où l'expérience se conclut par un succès de Persée est maintenant connu.

Nous permet-il de faire une conjecture sur la probabilité cherchée ?

Il y a unanimité dans la classe pour constater qu'un nombre d'expériences inférieur à 15 est insuffisant.

Un plus grand nombre d'expériences étant souhaitable, il est projeté de simuler l'expérience aléatoire.

Travail donné aux élèves : réaliser à la maison une simulation au tableur.

5. Simulation

Cette simulation a été construite durant l'atelier avec les collègues et est présentée en annexe 2.

Le tableur nous permet de simuler l'expérience 1000 fois.

Les fonctions ALEA, ENT et SI sont indispensables.

Les fonctions NB.SI et MOD pourront être utilisées.

6. Conjecture.

La fréquence de succès varie avec les séries de 1000 expériences. On retrouve la fluctuation d'échantillonnage (programme de Seconde).

Quel lien (lien probabiliste) y a-t-il entre cette fréquence observée f et la probabilité cherchée p ?

Dans un des thèmes de Seconde, on voit le résultat suivant :

p est dans l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ avec un taux de certitude 0,95. $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est la précision au niveau de confiance 0,95.

Remarque : ce résultat sur la fourchette est en toute rigueur valable pour une loi normale alors que le nombre de succès de Persée suit dans notre cas une loi binomiale de paramètres 1000 et p . Cependant, cette approximation sera justifiée par le grand nombre d'expériences réalisées (voir par exemple B. Parzys : *Loi binomiale, courbe en cloche et tableur*. Bulletin de l'APMEP n° 473).

L'application de ce résultat à plusieurs séries de 1000 expériences nous donne des fourchettes de sondage qui incluent la valeur 2/3 et excluent la valeur 1/2.

Conjecture : la probabilité de succès sachant qu'il a modifié son choix est 2/3.

Ainsi, il semble que la probabilité que Persée trouve Andromède soit passée de 1/3 en début d'expérience à 2/3, après que la pie lui a donné une information et qu'il a modifié son choix en conséquence.

Les élèves acceptent en général sans réticence le verdict de l'ordinateur, y compris ceux pour qui la probabilité cherchée valait a priori 1/2. Mais beaucoup se contenteraient de cette expérience et considéreraient le problème comme résolu. Il est donc nécessaire d'insister sur le fait que cette simulation ne prouve pas. La conjecture, obtenue statistiquement, est entachée d'un risque.

7. Résolution du problème

Cette résolution a lieu à l'issue du cours sur les probabilités conditionnelles.

En travail à la maison, les élèves sont invités à dresser un arbre pondéré relatif à cette expérience et à calculer la probabilité de succès dans le cas où Persée modifie systématiquement son choix initial.

Une bonne proportion d'élèves trouve alors la probabilité de succès égale à 2/3. Ils raisonnent systématiquement sur les trois cavernes, notées A, G1 et G2 avec A pour Andromède par exemple et dans le cas où le premier choix de Persée était bon, donnent deux choix équiprobables pour l'information délivrée par la pie.

En classe, nous allons un petit peu plus loin afin de donner la meilleure stratégie pour Persée.

Nous notons m la probabilité que Persée modifie son choix initial et raisonnons en terme de stratégie.

L'arbre pondéré ci-contre présente les diverses stratégies de Persée. L'événement « succès » est noté S.

$$p(S) = (1/3) \times (1 - m) + 2/3 m$$

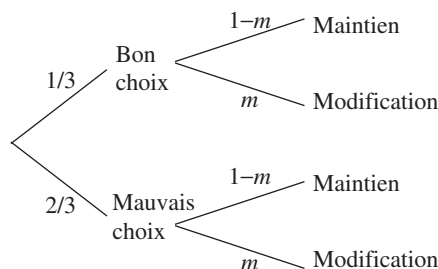
$$p(S) = (1 + m)/3$$

La probabilité de succès est donc comprise entre $1/3$ et $2/3$

Elle est minimale et vaut $1/3$ lorsque $m = 0$ (Persée maintient son choix initial).

Elle est maximale et vaut $2/3$ lorsque $m = 1$ (Persée modifie son choix initial).

Elle vaut $1/2$ lorsque $m = 1/2$ (Persée choisit au hasard entre les deux cavernes restantes).



(Nous prouvons ainsi que la meilleure stratégie pour Persée est la modification systématique de son choix initial.)

8. Conclusion

La difficulté de ce petit problème vient de la présence de probabilités conditionnelles.

Deux considérations méritent d'être retenues :

* L'intuition peut être mauvaise conseillère face à un problème faisant intervenir des probabilités conditionnelles.

L'information donnée par la pie dépend du premier choix de Persée.

Le deuxième choix de Persée dépend, bien évidemment, de l'information donnée par la pie, donc dépend du premier choix de ce même Persée.

* La modélisation mathématique est incontournable : il s'agit de décrire de manière précise et satisfaisante l'expérience aléatoire qui est en jeu (le protocole expérimental). L'outil informatique nous a permis de conjecturer le résultat et de l'estimer en statistiques, en exploitant des résultats vus en classe de Seconde. Bien entendu, établir une simulation conforme à l'expérience suppose une bonne description et un bon modèle de cette expérience. En fait, simuler, c'est faire fonctionner un modèle, le modèle choisi.

Postulat : le modèle choisi est fiable et s'accorde bien avec la réalité. Dans notre cas, ce modèle repose sur le fait que les différents contenus des cavernes sont équiprobables (il n'y avait aucune raison qu'il en soit autrement). Finalement, c'est ce modèle que l'on valide, pas forcément la réalité. Ce modèle a été validé par des données expérimentales.

Notre conjecture a été validée par la suite grâce à la modélisation précédente et à l'utilisation de la théorie des probabilités (probabilités conditionnelles).

Ce type de résolution de problème (conjecturer par simulation un résultat non évident, puis valider la conjecture) sera intéressant à aborder durant l'épreuve expérimentale en Terminale S.

Cela sous-entend une bonne connaissance du tableur en Terminale. Un bon usage des fonctions ALEA, ENT, SI est indispensable. Les fonctions MOD, NB.SI pourront

également être avoir leur utilité.

**Annexe 1 : extrait de l'article de Ian Stewart
Persée, Piegase et Andromède.**

Piegase, mégalovolante, l'énorme pie voleuse, se posa en douceur sur le bras de Persée, fils de Zeus et Danaé. Le malheureux roi de Tirynthe recherchait la belle Andromède.

« Bizarre, dit-il à Piegase, je pensais la trouver enchaînée à un rocher. »

– Je gage qu'elle l'est, dans une de ces trois cavernes, dit Piegase.

– Horreur, s'exclama Persée, les entrées sont complètement obstruées par des rochers !

– Attachez le ceinturon magique d'Hippolyte à ma queue, d'un côté, et à un rocher, de l'autre, et Sésame cherra, affirma Piegase.

– D'accord, dit le héros. Commençons par la première caverne.

– Attention, vous oubliez quelque chose, grommela la pie.

– Quoi encore, pie rogue !

– Andromède est dans une caverne, mais dans chacune des deux autres, il y a une gorgone : dans l'une Méduse et dans l'autre Sthéno, sa sœur jumelle, qui ont toutes les deux le pouvoir de vous changer en pierre d'un simple regard.

– J'ai mon fidèle bouclier d'or, pour renvoyer tout regard pétrifiant à la gorgone, répliqua Persée.

– Trop rouillé pour être efficace ! Heureusement, nous les pies géantes, nous avons des pouvoirs cachés que nous a conférés la déesse Déméter. Ainsi, je sais dans quelle caverne est Andromède !

– Merveilleux ! Dites le moi !

– C'est impossible, nous avons juré le secret et, si je vous le révèle, la déesse Déméter m'enterrinera [mettre en terrine] dans une amphore à 20 m sous terre.

– Allez, je vous donne ma bague si vous me le dites !

Piegase était tentée. Oh, le pouvoir démesuré des industries du luxe, pensa-t-elle, mais elle eut le courage de refuser.

– Malgré tout, je peux vous aider

– Comment ?

– D'abord, je peux vous dire que la probabilité qu'Andromède soit dans une caverne quelconque est $1/3$. À présent, vous pouvez choisir une caverne et nous verrons alors ce que je peux vous révéler sans risque.

– Bon, je choisis ... que ... Andromède est dans la caverne du milieu.

– Excellent, dit la pie. Je puis, à présent vous dire qu'il y a une gorgone dans la caverne de gauche.

– En quoi cela m'aide-t-il ?

– Je pense que cette information pourrait vous inciter à changer d'avis.

– Pourquoi donc ? Il y a nécessairement une gorgone dans au moins une des cavernes que je n'ai pas choisies. En quoi me serait-il plus utile de choisir la caverne de droite

si vous me dites seulement qu'il y a une gorgone dans la caverne de gauche ? Ce que je veux savoir, c'est dans quelle caverne est Andromède !

– Ainsi, vous maintenez votre choix ?

– Et pourquoi pas ? Tout ce que vous avez fait est de restreindre les possibilités. Je sais maintenant qu'Andromède est soit dans la caverne du milieu, soit dans celle de droite. Les probabilités sont les mêmes, c'est du 50-50 ! Il n'y a aucun avantage à changer !

– Faites comme vous voulez, seulement ...

– Seulement quoi, cria Persée exaspéré en se dirigeant vers la caverne centrale.

– Seulement, la probabilité qu'Andromède soit dans la caverne du milieu est bien $1/3$ n'est-ce pas ?

– C'est ce que vous m'avez dit.

– Bien. De sorte que la probabilité d'être dans l'erreur est le double de la probabilité d'être dans le vrai. La probabilité que vous ayez raison est $1/3$ et celle que vous ayez tort est $2/3$. D'accord ?

– Bien sûr !

– Nous savons que vous avez deux fois plus de chances d'avoir tort que d'avoir raison. Si vous changez pour l'autre caverne, vous aurez alors deux fois plus souvent raison que tort ! En d'autres termes, la probabilité de localiser Andromède est de $2/3$ si vous changez et de $1/3$ si vous ne changez pas .

– Ô, pie perfide, vous savez combien les héros ont peu de goût pour les mathématiques. Comment puis-je savoir si votre raisonnement est correct ? Et puis non ! Les chances doivent être égales. Vous avez éliminé une caverne, il m'en reste deux parmi les quelles je dois choisir. Chacune est également probable !

– Bon, faites comme bon vous semble.

Persée attacha la pie au rocher du milieu avec la ceinture magique, le roc roula libérant l'ouverture et

Annexe 2 : simulation à l'aide du tableur

Les cavernes seront représentées par les entiers 1, 2, 3. Dans cette simulation, nous nous plaçons dans le cas où Persée modifie systématiquement son premier choix après l'information de la pie.

Cellule A2 : choix de la caverne où est Andromède (un entier au hasard parmi 1, 2 et 3).

Cellule B2 : premier choix de Persée. Nous choisissons un entier au hasard parmi 1, 2 et 3.

(Notons que nous ne savons rien de la stratégie de Persée : il choisit peut-être au hasard, mais il peut aussi choisir systématiquement la caverne 1, ou choisir au hasard entre la 1 et la 2 sans jamais prendre la 3 ou ...).

Cellule C2 : information de la pie.

Si $A2 \neq B2$, la pie indique le numéro de la caverne restante qui peut être écrit $6/(A2*B2)$.

Si $A2 = B2$, la pie indique une autre caverne parmi les deux non choisies par Persée. Elle peut le faire au hasard ou selon une stratégie connue d'elle seule, l'énoncé ne le précise pas (est-ce important ?).

$1 + \text{MOD}(A2 + \text{ENT}(2 * \text{ALEA}()); 3)$ est une expression qui convient pour un choix aléatoire entre les deux cavernes restantes.

$\text{SI}(A2=1, 2, (\text{SI}(A2=2, 3, 1)))$ est une expression qui convient pour un choix issu d'une stratégie de la pie.

Cellule D2 : le nouveau choix de Persée est l'entier parmi 1, 2 et 3 qui n'est ni en B2, ni en C2, soit $6/(B2 * C2)$.

Cellule E2 : Résultat de l'expérience. Ce sera « succès » si $A2 = D2$, échec sinon.

Cellule G2 : Après avoir copié les formules pour atteindre les 1000 expériences, nous y mettrons la fréquence de succès. Il suffit par exemple de recenser le nombre de « succès » dans la colonne E (avec NB.SI) et de le diviser par 1000.

La touche F9 (calcul sur ordre) permet de réinitialiser les formules et de faire d'autres simulations.

Note 1 : Ce problème, également connu sous le nom de « problème de la chèvre », est issu d'un jeu télévisé qui fut naguère populaire aux USA. Il a été traité dans la revue Repère IREM n° 13 d'octobre 1993 par Michel Henry et Henri Lombardi. Dans cet article intitulé « *Paradoxes et lois de probabilité* », les cavernes étaient remplacées par trois portes derrière laquelle se trouvaient deux chèvres et une voiture.

Note 2 : Une simulation du même problème nommée « trois-portes », signée Jacky Dudit, a été publiée dans le document d'accompagnement du programme de Terminale S de 2002.