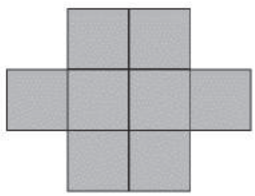
Travailler avec du matériel, gain ou perte de temps ?

Daniela Medici, Francesca Ricci,
Maria Gabriella Rinaldi(*)

Le présent article est une synthèse des deux ateliers que nous avons animés sur le thème « Travailler avec du matériel, gain ou perte de temps ? » lors des Journées Nationales de l'APMEP de Besançon en octobre 2007.
De nombreux enseignants ont pris maintenant l'habitude d'utiliser des problèmes dans leurs pratique didactique pour introduire des concepts ou pour les consolider.
En phase de résolution de ces problèmes, leurs élèves recourent souvent et spontanément à des schémas, des tableaux, des dessins et, lorsque la situation le permet, ils découpent, collent ou manipulent. Ceci se produit surtout à l'école primaire car, au fur à mesure que l'on s'élève dans les degrés de la scolarité, le recours spontané à la construction de matériel, permettant une action concrète, diminue. Nous nous sommes demandés si la manipulation et l'usage de matériel peuvent faciliter la tâche de résolution d'un problème et, par conséquent, la construction des savoirs mathématiques qui y sont liés.
Au cours des deux ateliers nous avons proposé six problèmes que les élèves peuvent résoudre en s'aidant de matériel conçu pour faciliter leur tâche de résolution. Ces problèmes ont été choisis parmi ceux du Rallye mathématique transalpin (RMT) et font partie de 20 propositions d'activité consistant à résoudre un problème avec un matériel à disposition présentées et analysées dans le volume « Ateliers de résolution de problèmes avec matériel » par F. Jaquet (2007).
La première période des ateliers a été consacrée à la résolution pratique de quelques problèmes et à une discussion sur les apports du matériel à cette résolution. Dans la deuxième période nous avons travaillé en particulier sur la manière d'intégrer certaines des ces activités dans un parcours didactique.
Nous reproduisons ici les énoncés des six problèmes proposés, avec la description du matériel correspondant et les plans de jeu en réduction (les fiches d'origine sont en format A4 sur lesquels les élèves posent ou déplacent les pièces).

Les problèmes

1. Grille de nombres



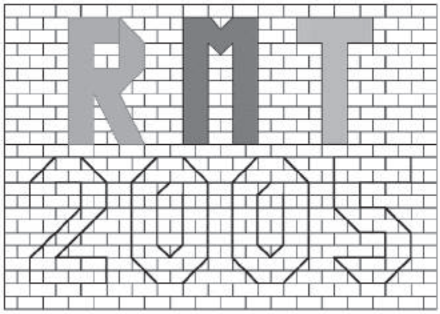
Placez les huit nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sur cette grille, de telle sorte que deux nombres consécutifs (qui se suivent) soient dans des cases qui ne se touchent pas, ni par un côté, ni par un sommet.

Y a-t-il plusieurs solutions ?

(*) Universités de Parma et de Siena (Italie)

Matériel
Huit carrés de bois portant les nombres de 1 à 8

2. rmt 2005

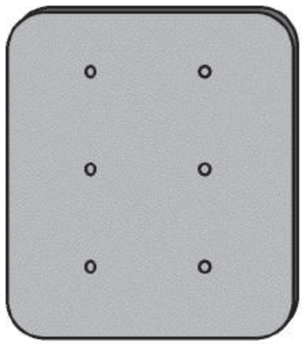


Sur le mur de l'école, on a peint l'intérieur des lettres R, M et T pour la prochaine finale du Rallye Mathématique Transalpin. Il reste encore à peindre l'intérieur des quatre chiffres de 2005.
Sophie va peindre, le « 2 » et le premier « 0 ». Marc peindra l'autre « 0 » et le « 5 ».

Qui utilisera le plus de peinture ?

Matériel
80 « briques » 20 rectangles, 20 carrés, 20 triangles et 20 trapèzes rectangles

3. Clous et élastiques



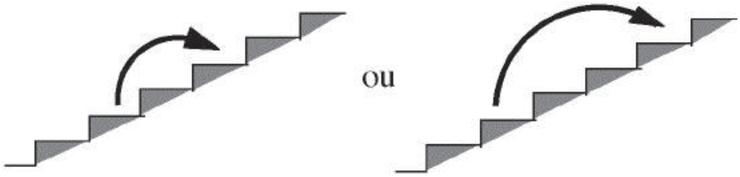
Hélène et Mario ont planté six clous sur une planche comme le montre la figure.
Les deux enfants essayent de former des triangles en tendant à chaque fois un élastique sur trois clous.
Mario réussit à former 9 triangles.
Quand Hélène essaie, elle obtient 14 triangles.

Et vous, combien de triangles réussirez-vous à former ?

Matériel
3 planchette de bois avec six clous, élastiques de couleurs différentes

4. Les sauts de Félix

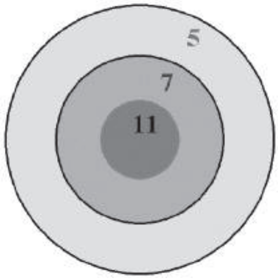
Pour garder sa forme physique, le chat Félix saute jusqu'en haut d'un escalier qui a 11 marches.
À chaque saut, il monte 2 marches ou 3 marches à la fois :



Avec quelles séries de sauts Félix peut-il atteindre la 11e marche ?

Matériel
Escalier de bois, pions de couleurs différentes à placer pour représenter les séries de sauts.

5. La cible

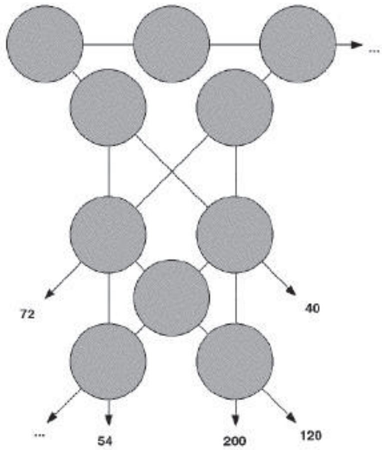


Guillaume a atteint la cible avec toutes ses fléchettes, il compte ses points : 34 !
Jeanne joue et dit : « j'ai aussi 34 points, mais j'ai deux fléchettes de moins que toi ».

Combien ont-ils chacun de fléchettes dans la cible ? et dans quelles zones ?

Matériel
14 pions de deux couleurs pour représenter les flèches de Guillaume et de Jeanne.

6. Produits en ligne



Disposez les dix nombres de 1 à 10 dans les cercles de cette figure, de telle manière que le produit de trois nombres alignés soit le nombre indiqué en fin de ligne.

Calculez les deux produits manquants.
Combien y a-t-il de manières de disposer ces dix nombres ?

Matériel
10 jetons en bois, numérotés de 1 à 10.

Analyse didactique

La possibilité de manipuler des objets modifie le rapport de l'élève au problème, rend la recherche de la solution plus plaisante et plus rapide, fait passer les tâches de notation dans un second temps, facilite les essais et libère l'esprit de l'erreur à éviter à tout prix.
Le matériel permet un gain de temps considérable dans les essais et offre une représentation concrète : l'élève se lance volontiers dans une manipulation pour résoudre un problème, cherche, tente de surmonter ou de contourner quelques obstacles et arrive ainsi à une solution.
Mais, à un moment donné, une transposition s'impose : de la manipulation du matériel à la résolution au niveau mathématique. Les objets concrets, (jetons, pièces, …) doivent devenir des êtres mathématiques (nombres, figures géométriques, …) en relation. Ce passage se fait progressivement et se manifeste bien souvent par l'abandon du matériel au profit des opérations mathématiques.
En plus, si l'on veut intégrer ce type de résolution dans une progression didactique, il y a tout un travail à développer, où le maître a un rôle essentiel à jouer : relance en cas d'obstacle trop important, validation, évaluation, généralisation, institutionnalisation, pour s'assurer que l'activité participe à la construction d'une connaissance mathématique.

Nous développons ici les considérations qui précèdent à propos d'un exemple : le problème « **Produits en ligne** » .

Contenus mathématiques

Une description, même succincte, des notions mathématiques en jeu est nécessaire pour savoir dans quel thème l'activité peut s'insérer et quelles notions mathématiques il permettra de mettre en œuvre. Pour notre exemple des « produits en ligne », on se contentera des deux lignes suivantes, extraites de la brochure d'accompagnement, qui seront reprises dans la rubrique ultérieure des « développement mathématiques ».

- Multiplication : décomposition d'un nombre en facteurs premiers
- Logique et raisonnement : conjonction et négation de critères

Tâche de l'élève

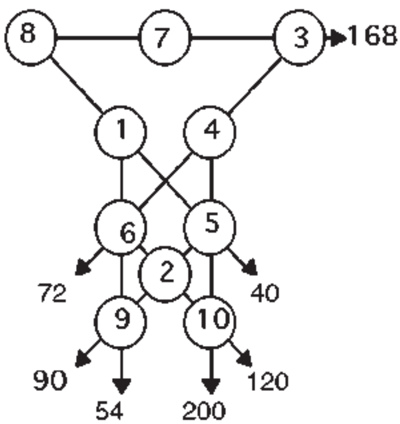
- Lecture de l'énoncé : compréhension de « produit » et prise en considération des contraintes pour chaque alignement. Le matériel représente une aide considérable dans cette première phase d'appropriation : les jetons se disposent naturellement dans les disques du plan de jeu. La contrainte de l'énoncé « les dix nombres de 1 à 10 » est prise en charge par le matériel et évite les oublis ou les répétitions d'un même nombre.
- Travailler par essais pour s'approprier les règles et constater qu'il faut organiser les recherches en tenant compte des différentes contraintes qui s'exercent sur chaque emplacement des nombres. C'est dans cette première phase d'essais que l'usage du matériel est le plus efficace. Il gagne du temps en permettant de se passer du crayon et, surtout, de la gomme.
- Pour chacun des nombres, dresser l'inventaire des emplacements possibles et constater que les choix sont limités pour certains nombres comme le 9, le 5, le 10, le 7 en particulier.
- Placer l'un de ces nombres sur un emplacement possible (par exemple le 9 sur un des alignements « 54 » ou « 72 ») et, par essais successifs, chercher à placer les autres nombres. Puis lorsqu'une disposition est trouvée, se demander s'il y en a d'autres et entreprendre d'autres essais. En observant les élèves (ou adultes) dans cette phase de résolution, on remarque que certains jetons restent sur des emplacements fixes et que d'autres sont échangés plus fréquemment. On gagne certainement du temps par rapport à des traces écrites, mais on voit apparaître ici les premières limites dans l'usage du matériel : il ne conserve pas la mémoire des essais ! Il sera donc nécessaire de transposer progressivement les raisonnements sur les objets mathématiques.
- Pour éviter les tentatives longues et inutiles, analyser de manière plus approfondie la décomposition des nombres en facteurs premiers : $10 = 2 \times 5$; $9 = 3 \times 3$; $8 = 2 \times 2 \times 2$; … ainsi que celle des produits à obtenir : $200 = 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2$; $120 = 5 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$; $72 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$; $54 = 3 \times 3 \times 3 \times 2$; $40 = 5 \times 2 \times 2 \times 2$.
  On constate alors que le 7 est obligatoirement sur la ligne du haut, au milieu. Il n'y a alors plus que deux emplacements pour le 9 : en bas de la colonne du 54 ou

en haut à droite (sur le première ligne). Si le 9 était dans cette dernière position, il faudrait que le 6 et le 3 soient dans la colonne du 54 (pour les deux facteurs « 3 » de ce nombre) mais pas dans l'alignement du 72 (dont les deux facteurs « 3 » seraient déjà pris par le 9), ni dans l'alignement du 40 (qui n'admet pas de facteur « 3 »). Il ne serait donc pas possible de placer le 6 et le 3 dans la colonne du 54 et, par conséquent, l'emplacement du 9 est déterminé de manière unique, en bas de la colonne du 54.

Un raisonnement analogue sur les deux facteurs « 5 » qui composent 120 permet de dire que 5 et 10 occupent obligatoirement les deux emplacements inférieurs de la colonne du 200. L'emplacement du 4 est alors déterminé de manière univoque : à l'intersection des alignements du 200 et du 72 (car $5 \times 10 \times 4 = 200$). Le 10 ne peut alors plus se situer sur la ligne du 40 car pour compléter l'égalité $10 \times \ldots \times \ldots = 40$, le 4 n'est plus disponible et le 2 n'est utilisable qu'une seule fois.

Les nombres 7, 9 4, 5 et 10 étant placés, les choix des emplacements des autres nombres se déterminent aisément, de manière aussi univoque.

Il n'y a donc qu'une solution au problème :



Développements mathématiques

L'activité « Produits en ligne » fait intervenir la décomposition multiplicative des nombres naturels (on aborde là des propriétés essentielles de la multiplication, exprimées par les mathématiciens au travers du « théorème fondamental de l'arithmétique », qui dit que tout nombre naturel non premier et supérieur à 1 peut s'écrire d'une seule manière sous la forme d'un produit de nombres premiers).

Comme le montre l'analyse de la tâche ci-dessus, l'expression des nombres en produit de facteurs premiers (qu'on ne peut plus décomposer) est un instrument efficace, indispensable pour toute l'arithmétique : multiples, diviseurs, communs multiples et diviseurs communs, fractions, …

Cette décomposition en facteurs permet ici de trouver les emplacements des nombres par déductions logiques plutôt que par essais successifs et éliminations. Elle permet en outre de s’assurer que toutes les solutions ont été trouvées ou de l’unicité de la solution comme dans ce cas.

Remarques d’ordre didactique

Il y a de nombreuses manières d’exploiter ce problème en classe, qui dépendent du niveau scolaire, et des intentions didactiques de l’enseignant qui le propose à ses élèves.

Si l’on se contente de la première solution apparue, l’activité est « auto-validante » car il suffit de vérifier si les produits des nombres placés correspondent à ceux qui sont indiqués sur le schéma. Il s’agit alors d’une exploitation minimale de l’activité qui ne mobilise pas des connaissances mathématiques allant au-delà de la table de multiplication. Le matériel aura été utile pour l’appropriation du problème pour les premiers essais, et pour organiser les recherches en fixant certains facteurs sur le schéma.

Si l’enseignant veut utiliser le problème comme une étape d’un parcours didactique sur la décomposition en facteurs ou sur nombres premiers, pour les derniers niveaux du collège par exemple, il devra reprendre un rôle plus actif après avoir laissé les élèves chercher la solution. Il devra en particulier les rendre attentifs à la question « combien y a-t-il de manières de disposer ces dix nombres ? » et s’engager avec eux dans la justification de l’unicité de la solution. Le matériel ne sera évidemment plus utile à ce moment. Il aura rempli sa fonction de motivation et de facilitation avec gain du temps dans les premières phases d’une recherche mathématique.

Bibliographie

Jaquet, F : (2007), *Ateliers de résolution de problèmes avec matériel*, ARMT (Association Rallye Mathématique Transalpin).