Le temps des mathématiques dans le temps de la classe

Xavier Gauchard

La lecture de travaux d'historiens des mathématiques permet entre autres de voir comment la perception d'une notion a pu évoluer au cours des siècles. Un plaisir de l'enseignement est ensuite d'entendre les élèves reprendre les questions et les erreurs de leurs aînés (du moins celles que l'on imagine).
L'atelier présentait trois activités construites à partir de travaux d'historiens des sciences et de textes mathématiques.

Activité 1 : Introduction géométrique du nombre i

Un compte-rendu de l'atelier présentant cette activité se trouve dans l'article de Plot numéro 18, pages 18 à 26 avec un lien pour télécharger des fichiers Geoplan qu'un collègue a nettement améliorés sur son site :

http://perso.orange.fr/debart/seconde/droite_reelle.html

Nous[(1)] répondions alors à une question : comment introduire à partir de considérations géométriques le vocabulaire, sans imposer arbitrairement le nombre i comme vérifiant $i^2 = -1$? Depuis, la réflexion s'est davantage tournée vers les représentations des élèves en lien avec cette longue absence dans l'histoire d'image pour les expressions imaginaires, absence que l'on retrouve chez les élèves. Dans un article de Petit x, H. Rossel et M. Schneider[(2)] reprennent la remarque de Guillaume, élève de deuxième année post-bac, pour illustrer cette incompréhension : « *Quand vous rencontrerez un nombre dont le carré est négatif, vous m'appellerez… J'aimerais bien voir à quoi ça ressemble !* ».
Elles y décèlent un obstacle épistémologique, reprenant ce qu'écrivait Leibniz au XVII^e siècle :
« *Ces notions imaginaires ont ceci d'admirables que dans le calcul, elles n'enveloppent rien d'absurde ou de contradictoire et que cependant elles ne peuvent être présentées dans la nature des choses* ».

Le travail proposé aux élèves est construit sur le travail d'Argand[(3)] qui écrit : « *deux quantités d'une espèce susceptible de fournir des valeurs négatives étant comparées entre elles, l'idée de leur rapport est complexe. Elle comprend l'idée de rapport numérique dépendant de leurs grandeurs respectives considérées absolument et l'idée du rapport des directions ou sens auxquels elles appartiennent, rapport qui en est l'idée*

(*) gauchard.xavier@neuf.fr

(1) Groupe lycées de l'IREM de Basse Normandie, Xavier Gauchard et Muriel Alliot.

(2) Petit x n° 63, année 2003, pages 53 à 71. Ces nombres que l'on dit « imaginaires ».

(3) Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.

ou l'opposition ». Il réduit alors à deux cas qu'il note $+1 : +1 :: -1 : -1$ et $+1 : -1 :: -1 : +1$, puis pose la question de la recherche selon son protocole de la moyenne géométrique et en particulier de « *la quantité x qui satisfait à la proportion* $+1 : +x :: +x : -1$ ».
Sa réponse est : « *qu'on parviendrait à ce but si l'on pouvait trouver un genre de grandeurs auquel pût s'allier l'idée de direction, de manière que, étant adoptées deux directions opposées, l'une pour les valeurs positives, l'autre pour les valeurs négatives, il en existât une troisième telle, que la direction positive fût à celle dont il s'agit comme celle-ci est à la direction négative* ».

Questionnaire posé aux élèves

En octobre 2007, quinze jours après avoir terminé l'introduction des nombres complexes, à partir de cette activité, voici ce que les élèves répondent à quatre questions reprises de l'article de H. Rossel et M. Schneider.

Question 1 : Qu'avez-vous appris dans le chapitre relatif aux nombres complexes ?
« $i^2 = -1$ », « Il existe un nombre carré qui est négatif », « Il y a des nombres imaginaires », « Qu'un carré pouvait être négatif », « Un nombre complexe est composé d'une partie réelle et d'une partie imaginaire », « Un nombre complexe est composé d'un module et d'un argument », « Représentation du plan complexe », « Les coordonnées polaires et cartésiennes sont en relation différemment que par la trigonométrie ».

Question 2 : Ce chapitre vous a-t-il étonnés ?
« Oui », « Oui, j'en ai rêvé la nuit », « Non, car je redouble ma TS », « Oui, car on nous a toujours appris qu'un carré est toujours positif », « Oui, nous savons donner une image à l'imaginaire ».

Question 3 : Si vous deviez expliquer à un non initié ce qu'est un nombre complexe, que lui diriez-vous ?
« Je peux te dire grossièrement qu'il est composé d'une partie réelle et d'une partie imaginaire », « Un nombre complexe est un nombre qui est associé à un point M. Le module est la distance au pôle, arg(z) est l'angle polaire. Ses coordonnées cartésiennes sont composées d'un nombre réel et un imaginaire », « Un nombre complexe est un nombre en dehors de la droite des réels, ainsi, c'est un imaginaire, d'où i^2 peut être égal à -1 », « La représentation d'un complexe est comparable à un repère où intervient la trigonométrie », « C'est un nombre imaginaire au delà du réel », « C'est un nombre qui n'existe pas mais qu'on peut utiliser dans différents calculs », « Que c'est compliqué, qu'il faut s'imaginer un axe avec une droite réelle et une droite imaginaire », « Ce sont des nombres réels et imaginaires que l'on peut situer dans le plan ».

Question 4 : Phrase d'élève : « je ne comprends pas comment le carré d'un nombre peut être négatif ». Si vous étiez le professeur, que répondriez-vous à cet élève ?
« Ce n'est pas un nombre réel, mais un imaginaire, donc les propriétés sont différentes », « On ne te demande pas de comprendre, mais d'admettre cette solution

car ce n'est pas un nombre réel mais imaginaire », « C'est comme admettre que 2 + 2 = 4, il faut l'admettre pour avancer. Les maths, ce n'est pas la réalité, on peut dire ce qu'on veut à la base, du moment qu'on s'y tient et que ça finit par être cohérent ! », « Un nombre négatif multiplié par ce nombre négatif est positif », « Moi non plus je ne comprends pas, mais je l'applique et ça fonctionne très bien », « Ce nombre est différent. Si l'on écrivait tous les nombres réels sur une droite, ce nombre serait en dehors de cette droite »

Commentaire : Dans le langage courant, « imaginaire » s'oppose à « réel » et l'activité permet aux élèves d'y associer une droite des réels et « au delà des réels », l'axe des imaginaires où tout est possible, même d'avoir un carré négatif. Les élèves jouent aussi sur l'opposition « complexe/simple ». Avant les journées de Clermont, le même questionnaire avait été posé aux élèves et l'un d'eux avait eu cette réponse à la question 3 : « C'est un nombre réel auquel on ajoute une partie imaginaire, ce qui donne un nouveau nombre plus compliqué, donc complexe ».

Activité 2 : Introduction des probabilités en première

L'exercice proposé aux élèves

C'est la version de Luca Pacioli(4) du problème des partis :
« …Une brigade joue à la paume : il faut 60 pour gagner, chaque coup vaut 10. L'enjeu est de 10 ducats. Un incident survient qui force les soldats à interrompre la partie commencée, alors que le premier camp a gagné 50 et le second 20. ». On demande quelle part de l'enjeu revient à chaque camp…

Cela nécessite d'abord une lecture explicative :
Parti : (de l'ancien français, partir : partager) :

> n.m. Vx petit groupe de soldats chargés d'une reconnaissance, d'un coup de main, …
> adj. Héraldique (relatif aux blasons, aux armoiries). Écu parti : divisé verticalement en deux parties égales.

Paume : (du latin, palma) : jeu de balle qui se joue avec une raquette en terrain ouvert (longue paume) ou en terrain clos (courte paume).
Ducat : (de l'italien *ducato*) : Monnaie d'or à l'effigie d'un duc, monnaie d'or des doges de Venise.
Enjeu : Somme d'argent, objet que l'on risque dans une partie de jeu et qui revient au gagnant ($\neq$ mise ?).

Récit de classe

En classe, chaque élève a dix minutes pour proposer une répartition des 10 ducats. Voici le type de réponses régulièrement obtenues (4 fois en Première S, 2 fois en Terminale S, 1 fois en Première STG) :

(4) Summa de arithmetica, geometrica, proportionii et proportionalita.

7,14/2,86	Ils ont gagné 70 coups à deux. On répartit proportionnellement les 10 ducats.
7/3	J'en donne 5 au premier camp et 2 à l'autre. Il en reste 3 à distribuer. Comme le premier camp gagne, il en a 2 et l'autre camp en a 1.
7,5/2,5	Il faut 60 coups pour gagner. On en donne 50/60 au premier camp et 20/60 au deuxième camp. Mais on donne 7/6 de 10 ducats, cela fait trop, on retire les 1/6 de 10 ducats à égalité entre les deux. De 10 ducats, cela fait 7,5 ducats.
8/2	Il reste une partie au premier camp pour gagner et quatre au second camp. On retranche à l'enjeu 1/5 de 10 ducats au premier camp et 4/5 de dix ducats au second camp.

Lors de l'atelier, les professeurs ont joué le jeu et proposé les solutions qu'ils imaginaient des élèves. Et l'on a retrouvé, dans l'atelier comme dans la classe, Pacioli, Tartaglia, Cardan et Pascal. L'exploitation de ces différentes solutions conduit à « décrire ce qui se peut se passer, puis le modéliser » : on donne un exemple d'expérience aléatoire, on revoit les simulations, on prépare la définition de la probabilité d'un événement et l'énoncé de la loi faible des grands nombres, on sensibilise à des problèmes de dénombrement, on a un exemple pour illustrer l'espérance de gain, …

Lors de l'atelier, un collègue a précisé que le jeu de paume n'est pas un jeu de hasard et que l'hypothèse que chaque équipe a la même « chance » de gagner était sans doute moins valable que de choisir la loi $\left(\frac{5}{7},\frac{2}{7}\right)$. Cette remarque n'est en général pas évoquée par les élèves, mais elle est à lier avec la nécessité de définir le modèle implicite comme cela a été fait sur les simulations en seconde. On peut aussi utiliser la version plus classique de l'échange épistolaire entre Pascal et Fermat.

Histoire succincte du problème

Ce problème, dont Pascal dit qu'il lui a été posé par le Chevalier de Méré qui ne savait pas le résoudre, a été posé et étudié à la fin du XV^{e} siècle par Luca Paccioli (1494) puis au XVI^{e} par Tartaglia (1556). Le premier propose de partager les mises proportionnellement aux coups déjà gagnés :

$$20\times\frac{50}{70} \text{ pour le premier camp et } 20\times\frac{20}{70} \text{ pour le deuxième camp,}$$

et évoque, pour la rejeter le partage suivant : le premier camp a gagné 30 de plus que le deuxième camp pour un jeu où il faut 60 pour gagner :

$$10+\frac{30}{60}\times 10 \text{ pour le premier camp et } 10-\frac{30}{60}\times 10 \text{ pour le deuxième camp.}$$

La contradiction de Tartaglia (1500-1557) est basée sur cette argumentation :
« Sa règle ne me paraît ni bonne, ni belle, parce que s'il arrive qu'un parti ait 10 points et l'autre rien et qu'on procède selon sa règle, le premier devrait tirer le tout et le second rien ; ce serait tout à fait déraisonnable que, pour 10 points, il doive tirer le tout ».

Sa solution consiste à rendre la moitié de sa mise au camp qui a le plus de points.

Girolamo Cardano (1501-1576) écrit plus tard que « Si la division une fois faite, le jeu recommençait à nouveau, les parties en présence devraient miser la même somme que celle qu'elles ont reçue à condition de s'arrêter de jouer. » On attribue à Cardan de s'intéresser aux points qui manquent et non aux points marqués (les règles de partage les plus familières de l'arithmétique commerciale invitaient à ne prendre en considération que les points acquis). Ce passage, est sans doute le cœur de l'activité. Comme le dit P. Massé, le trait de génie fut de procéder en sens inverse du cours du temps..., de déterminer le présent à partir de l'avenir ». Quand on retrouve les mêmes résistances, on peut sans doute parler d'obstacle épistémologique.
La solution proposée par Cardan est la suivante : le premier camp a déjà gagne 5 coups, il lui en reste un à gagner ; le deuxième camp a gagné deux coups, il lui en reste quatre à gagner. La progression de 4 (« progresso. 4 » : 1 + 2 + 3 + 4) est 10, celle de 1 est 1 ; si l'on divise la somme totale en 11 parties, on en donnera 10 à celui qui a 50 points et 1 partie à celui qui en a 20, soit environ 9,09 ducats et 0,91 ducats.
Pascal et Fermat donneront la solution à ce problème dans leurs échanges épistolaires.

Deux textes contemporains de Pacioli retrouvés par des chercheurs de l'Université de Sienne dans des arithmétiques commerciales du XV^{e} donnent exactement la solution de Pascal pour deux puis trois joueurs. Norbert Meusnier[(5)] imagine un texte arabo-musulman à l'origine de la solution de ce problème.

Activité 3 : La moyenne en classe de première

Cette activité a été construite à partir de la lecture de l'article d'Anne Boyé et Marie-Céline Comairas « Moyenne, médiane, écart-type, quelques regards sur l'histoire pour éclairer l'enseignement des statistiques au lycée », paru dans *Repères-IREM*, n° 48, p. 27-40.

Introduction de la problématique

En 1759, Clairaut et Lalande se trompent d'un mois sur la prévision du passage au périhélie de la comète de Halley. Pourtant, avec Copernic, Kepler et Newton, l'astronomie est devenue une science étayée par une théorie mathématique. Si les données sont entachées d'erreurs, même si la théorie est bonne, le résultat ne sera pas bon. Il y a les erreurs humaines, et celles provenant des instruments de mesure. Malgré leur amélioration, des erreurs subsistent.
L'idée est alors de combiner les mesures d'un même phénomène pour réduire le plus possible l'erreur finale sur la *vraie valeur* du phénomène.

Activité en classe

Tout d'abord, lecture de l'article « Milieu » du supplément à l'Encyclopédie de Diderot, rédigé par Jean Bernoulli.

(5) Meusnier, N. (2004). Le problème des partis avant Pacioli. *Histoires de probabilités et de statistiques*, p. 3-23. Ellipses.

« Quand on fait plusieurs observations d'un même phénomène, et que les résultats ne sont pas tout à fait d'accord entre eux, on est sûr que ces observations sont toutes, ou au moins en partie peu exactes, de quelque source que l'erreur puisse provenir ; on a coutume de prendre le milieu entre tous les résultats, parce que de cette manière les différentes erreurs se répartissant également dans toutes les observations, l'erreur qui peut se trouver dans le résultat moyen devient aussi moyenne de toutes les erreurs. […] en prenant simplement le milieu arithmétique, on ne tient pas compte du plus ou moins de probabilité de l'exactitude des observations, des différents degrés d'habilité des observateurs, etc.»

On pose alors la question : Qu'est-ce que le « milieu entre tous les résultats » ?
On peut avoir à l'esprit ce que Galilée a écrit : « *les observations sont distribuées de façon symétrique autour de la vraie valeur ; c'est-à-dire, les erreurs sont distribuées de façon symétrique autour de zéro. Les petites erreurs arrivent plus fréquemment que les grandes erreurs* ». Le milieu est cette vraie valeur et Bernoulli ne donne pas de forme mathématique à cette vraie valeur qu'il distingue de la moyenne arithmétique. La recherche est alors celle d'un modèle pour la distribution des erreurs, puis estimation de la vraie valeur.
Plusieurs modèles ont été envisagés : distribution semi-circulaire, semi-elliptique, parabolique, en $e^{-k|x|}$, … pour aboutir à la loi normale.

Mais alors comment « tenir compte du plus ou moins de probabilité de l'exactitude des observations » ?
Chaque observation s'écarte plus ou moins de la vraie valeur, cet écart est l'erreur commise. Il faudrait calculer une sorte de moyenne pondérée des erreurs commises.
Le meilleur « milieu » est celui qui minimise les erreurs. Si on minimise la somme des écarts, on obtient la médiane (dans la distribution des erreurs en $e^{-k|x|}$, le « milieu » est la médiane). Et si on minimise la somme des carrés de ces mêmes écarts, on obtient la moyenne.

En classe, nous prenons un exemple, avec sept valeurs : 7,05 - 7,08 - 7,1 - 7,12 - 7,12 - 7,13 – 7,17, et posons à la classe la question : quelle est le milieu des tous ces résultats ?
La médiane est de 7,12, la moyenne est de 7,11. Mais si on suppose que ces sept valeurs sont les mesures d'une même distance astronomique, quelle est la vraie valeur de cette distance ? 7,12 ? 7,11 ? 7,1 ?, …
Il faut alors préciser les erreurs commises pour chacune des valeurs.
Si l'on considère que la vraie valeur est 7,12, la série des erreurs commises est 0,07 – 0,04 – 0,02 – 0 – 0 – 0,01 – 0,05.
Si l'on considère que la vraie valeur est 7,11, la série des erreurs commises est 0,06 – 0,03 – 0,01 – 0,01 – 0,01 – 0,02 – 0,06.
Se répartissent-elles également dans toutes les observations ?
Avec la médiane, il y a 0,07 + 0,04 + 0,02 = 0,13 d'erreur par défaut et 0,01 + 0,05 = 0,06 d'erreur par excès.
Avec la moyenne, il y a 0,06 + 0,03 + 0,01 = 0,1 d'erreur par défaut et 0,01 + 0,01 + 0,02 + 0,06 = 0,1 d'erreur par excès.

La vraie valeur n'est pas connue, cela peut être 7,1 ou 7,115… Soit x la vraie valeur. Les erreurs sont $x - 7{,}05$ quand elle est par défaut ou $7{,}17 - x$, si elle est par excès. Mais il est fastidieux de travailler avec des valeurs absolues, car cela oblige à faire un raisonnement par disjonction de cas avec ici huit cas.
La distance dans le plan se calcule avec les carrés des erreurs, ce qui est plus facile à utiliser. La somme des carrés des erreurs et la valeur qui rend cette somme minimale est …. la moyenne arithmétique (propriété qui sera démontrée en cours).

Conclusion

Ce peut être la lecture d'un extrait de ce qu'écrivait, en 1806, Legendre dans son ouvrage « Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes » :
« *De tous les principes que l'on peut proposer pour cet objet, je pense qu'il n'en est pas de plus général, de plus exact, ni d'une application plus facile que celui dont nous avons fait usage dans les recherches précédentes, et qui consiste à rendre minimum la somme des carrés des erreurs. Par ce moyen, il s'établit entre les erreurs une sorte d'équilibre qui empêchant les extrêmes de prévaloir, est très propre à faire connaître l'état du système le plus proche de la vérité.*
La règle par laquelle on prend le milieu entre les résultats de différentes observations, n'est qu'une conséquence très simple de notre méthode générale, que nous appellerons méthode des moindres carrés. »