

Usage d'un tableur dans les calculs financiers, ou comment le temps devient de l'argent...

Alain Birebent(*)

L'objectif assigné à cet atelier était de présenter une séance de travaux dirigés pour des étudiants de première année en licence Économie et Gestion dans le domaine des mathématiques financières et d'en discuter les enjeux mathématiques et didactiques. La dite séance porte sur les échéanciers⁽¹⁾ d'emprunts indivis avec un tableur comme seul instrument à la disposition des étudiants — et des participants à l'atelier — ; elle est structurée par des questions de difficultés mathématiques et instrumentales croissantes.

Les mathématiques financières

Abordées dès la scolarité secondaire essentiellement dans les sections technologiques, les mathématiques financières font l'objet d'enseignements dans toutes les filières post-baccalauréat d'économie et gestion ouvertes à tous les bacheliers. Malgré la diversité de ces filières, il existe un socle commun construit généralement dès la première année sur les notions d'emprunts et d'investissements dans deux des modélisations (intérêts simples, intérêts composés) du concept de capitalisation/actualisation du capital. Cette première année n'aborde les mathématiques financières qu'en avenir certain. La présentation des concepts et modèles des activités financières en avenir incertain (quelquefois appelées mathématiques actuarielles⁽²⁾) se fait plus tardivement quelquefois au-delà du niveau licence. Omniprésent derrière toutes les opérations financières étudiées, le concept de capitalisation/actualisation du capital rend l'évaluation de tout capital dépendante du temps et rompt radicalement avec l'évaluation nominale qui veut qu'un billet de 20 euros vaille 20 euros quel que soit le moment où on le considère. La première rencontre avec la mathématisation de ce concept est d'autant plus rude que, pour distinguer court terme et long terme, elle se fait généralement à travers deux modèles différents, celui des intérêts simples et celui des intérêts composés, qui ne manipulent pas les mêmes objets mathématiques (par exemple les suites arithmétiques pour le premier et les suites géométriques pour le second).

Un enseignement des mathématiques financières ne problématise pas seul ce concept. Mais il lui revient d'explicitier certains modèles mathématiques invoqués dans les théories ou pratiqués dans les milieux professionnels, de les faire fonctionner pour

(*) Alain.Birebent@imag.fr

(1) Les échéanciers sont souvent appelés tableaux d'amortissement.

(2) La dénomination est controversée. Ce qui l'est moins c'est l'évolution des mathématiques financières vers l'analyse du risque dans l'évaluation des actifs.

mettre en valeur leurs domaines de validité et d'efficacité. La transposition didactique sous-jacente se manifeste par des choix institutionnels à la croisée des exigences d'une formation professionnelle, d'une formation académique et d'une formation citoyenne. Parmi ces choix, celui des environnements technologiques dédiés à la pratique des calculs numériques.

Le tableur

La formulation institutionnelle de compétences informatiques que doivent posséder les étudiants de l'université s'est traduite ces dernières années par la mise en place d'enseignements d'informatique dès la première année de licence et aussi d'incitations pressantes à faire entrer les mathématiques dans le pôle dit des techniques quantitatives, mal défini mais toujours associé dans l'esprit de ses promoteurs à l'usage de ressources (matériels et logiciels) informatiques. C'est ainsi que certaines séquences dédiées à l'apprentissage d'un tableur s'appuient sur des activités mathématiques. Conçues par des enseignants d'informatique, elles portent leurs préoccupations qui ne sont pas celles de conduire l'apprentissage d'une notion mathématique. Ainsi, pour les auteurs de la séquence suivante⁽³⁾ :

Une entreprise emprunte le 31 décembre 1997 un montant $M = 100\,000$ F pour un investissement, au taux annuel $T = 7\%$, sur une durée $D = 5$ ans, selon un remboursement à annuités constantes.

- Entrez ces données et le titre dans les 4 premières lignes d'une feuille de calcul. Faites ressortir les cellules correspondant aux données modifiables par la couleur bleue. Déverrouillez ces cellules, dans le but de protéger les autres une fois le travail terminé.

Le montant A d'une annuité d'un tel emprunt se calcule de la façon suivante :

$$A = \frac{M \times T}{1 - \frac{1}{(1+T)^D}}$$

- Calculez le montant de l'annuité sur la ligne suivante. Grisez cette cellule pour la mettre en évidence.
- Associez un nom à chacune des cellules dont les valeurs seront réutilisées dans les formules, soit :
 - Date_Emprunt
 - Montant_Emprunt
 - Taux_Emprunt
 - Annuité
- Dressez le tableau d'amortissement de cet emprunt selon le modèle.
- Utilisez **toujours** les noms des cellules que vous avez définies dans les diverses formules. Quel avantage cela présente-t-il ?

N'oubliez pas que la première ligne (celle des échéances) peut se calculer en fonction de la date de l'emprunt.

- Comment modifier ce tableau pour traiter des emprunts de durées diverses, comprises entre 2 et 20 ans ?

(3) Travaux pratiques d'Informatique en Licence Économie et Gestion de l'université Grenoble 2.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Tableau d'amortissement d'un emprunt sur 5 ans, avec annuités constantes						
2		Le 31/12/1997	on emprunte sur 5 ans		100 000 F		
3			au taux annuel de		7%		
4			avec remboursement à annuités constantes.				
5							
6		Le montant d'une annuité s'élève donc à ...		24 389 F			
7							
8	Tableau d'amortissement de l'emprunt						
9	Echéance	1997	1998	1999	2000	2001	2002
10	Reste dû en capital	100 000 F	82 611 F	64 005 F	44 096 F	22 794 F	0 F
11	Intérêts		7 000 F	5 783 F	4 480 F	3 087 F	1 596 F
12	Amortissement		17 389 F	18 606 F	19 909 F	21 302 F	22 794 F
13							

Les connaissances mathématiques sont supposées installées chez les étudiants et disponibles dans la reproduction du tableau. En fait, ce qui est visé et ce que manifeste le choix des questions et l'apprêtage des cellules, c'est la bonne manière de fabriquer le tableau en tant que support de l'information mais pas celle de définir le contenu des cellules dans leur signification mathématique relativement au problème du remboursement de l'emprunt.

On retrouve ce type d'activité, dite d'initiation à l'usage d'un tableur, dans certains manuels universitaires de mathématiques. Voici, par exemple, l'une des pages d'un tel manuel⁽⁴⁾, extraite d'un chapitre consacré aux « outils de calcul » :

Un tableur est un logiciel qui permet des calculs en tableau. C'est un outil très adapté pour obtenir un tableau d'amortissement. Le plus connu est Excel de Microsoft. À titre d'exemple, voici comment créer le tableau d'amortissement d'un emprunt indivis, remboursable par annuités constantes :

- ouvrir une feuille de calculs ;
- prévoir une zone pour la saisie des informations (capital emprunté S_0 , durée n , taux i) et le calcul de l'annuité constante ;
- prévoir un tableau à n lignes où chaque ligne comporte :
 - son numéro k ,
 - la dette en début de période $S_{k-1} = S_{k-2} - M_{k-1}$,
 - l'intérêt $I_k = i S_{k-1}$,
 - l'amortissement $M_k = a - I_k$,
 - l'annuité a ,
 en programmant toutes les formules de calcul.

Pour $S_0 = 50\,000$ €, $i = 0,055$, $n = 8$, on obtient ainsi :

(4) Boissonnade M. & Fredon D., 2000, *Mathématiques Financières*, Collection Express, Éditions Dunod.

	A	B	C	D	E
1		S_0	50 000,00	a	7 893,20
2		i	0,055		
3		n	8		
4					
5	k	S_{k-1}	I_k	M_k	a
6	1	50 000,00	2 750,00	5 143,20	7 893,20
7	2	44 856,80	2 467,12	5 426,08	7 893,20
8	3	39 430,72	2 168,69	5 724,51	7 893,20
9	4	33 706,21	1 853,84	6 039,36	7 893,20
10	5	27 666,85	1 521,68	6 371,52	7 893,20
11	6	21 295,33	1 171,24	6 721,96	7 893,20
12	7	14 573,37	801,54	7 091,67	7 893,20
13	8	7 481,71	411,49	7 481,71	7 893,20

Dans la cellule E1, on a installé la formule de calcul de a :

$$(\$C\$1*\$C\$2/(1-(1+\$C\$2)^{(\$C\$3)}))$$

Cette formule a été recopiée dans les cellules E6 à E13.

$\$C\1 est une référence absolue, ce qui signifie qu'elle n'est pas modifiée lors de la copie.

Pour l'obtenir, il faut :

cliquer sur la cellule E1 ;

cliquer dans la barre de formules pour placer le point d'insertion immédiatement après la référence à modifier (C1) ;

choisir l'option Référence dans le menu Sélection.

Dans la cellule B6, on a recopié la cellule C1.

Dans la cellule B7, on a installé la formule B6-D6. Cette formule a été recopiée dans les cellules B8 à B13 et s'est adaptée automatiquement.

Dans la cellule C6, on a installé la formule $\$C\$2*B6$. Cette formule a été recopiée dans les cellules C7 à C13 et s'est adaptée automatiquement.

Dans la cellule D6, on a installé la formule $\$E\$1-C6$. Cette formule a été recopiée dans les cellules D7 à D13 et s'est adaptée automatiquement (pages 16 et 17).

On est très proche d'un mode d'emploi de constructeurs de calculatrices. Ce genre d'exposé n'est pas conçu pour construire des connaissances artefactuelles durables et transposables dans d'autres situations. L'avenir mathématique d'une telle instrumentation apparaît très limité si la technique de remplissage choisie n'est ni justifiée ni étendue par exemple à d'autres cas que celui des annuités constantes.

Pour Capponi⁽⁵⁾ qui a étudié les obstacles liés à l'édition d'une formule et des références relatives, une telle programmation sur tableur grâce à la répliation passe par un apprentissage au-delà du mimétisme :

L'appropriation des références relatives ne va pas de soi. La facilité de l'édition automatique, qui utilise la souris pour désigner les cellules intervenant dans une cellule, ne doit pas cacher les réelles difficultés rencontrées dans l'interprétation des références produites par la machine, nécessaire au contrôle des formules produites (page 229).

(5) Capponi B., 1990, *Calcul algébrique et programmation dans un tableur : le cas de Multiplan*, Thèse de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble, France. Nous lui empruntons le mot *répliation* pour désigner la copie, généralement vers le bas, des références relatives.

Tableur, calculatrice ou table ?

Les manuels universitaires actuels ne font pas tous l'effort de présenter le tableur ou la calculatrice. On rencontre encore fréquemment des manuels qui évoquent des instruments à technologie informatique mais ne portent leurs efforts que sur les tables numériques dites financières. Les tables financières n'ont d'ailleurs pas disparu partout⁽⁶⁾ et certains enseignants marquent leur attachement aux techniques liées aux tables financières. Dans les amphithéâtres, les pratiques instrumentales sont très pauvres, réduites à des ostensions publiques quand cela est matériellement possible. Les instruments sont plus évoqués qu'enseignés. Dans les salles de travaux dirigés, la calculatrice domine. La conduite instrumentée des calculs est le plus souvent minorée voire péjorée et laissée entièrement à la charge de l'étudiant. Les techniques instrumentées se présentent essentiellement comme des savoir-faire ponctuels déconnectés des éléments théoriques mathématiques dont elles se nourrissent. On ne repère dans les manuels ou les photocopiés aucune investigation sur la portée de la (ou des) technique(s) choisie(s) ni sur la concurrence possible avec d'autres techniques et d'autres instruments. Didactiquement cela rend aigu le problème du choix par l'étudiant de la technique instrumentée et celui du choix par l'enseignant du ou des instruments à mettre en avant lors de l'évaluation.

Tout cela participe, dans le domaine du calcul numérique, à rendre les techniques instrumentées instables, voire volatiles, peu productrices de contrôles mathématiques sur les résultats et au final inappropriées aux apprentissages mathématiques visés.

Écologie des savoirs et des instruments

Tables et formules participent ensemble à l'abaissement du coût du calcul numérique. Ainsi le calculateur muni d'une table inscrit la conduite du calcul dans une formule « algébrique » et celle de l'application numérique dans un cadre analytique puisque entre deux valeurs la formule est traduite implicitement par une fonction. Cette écologie ancienne et longtemps robuste dans l'enseignement mathématique a été bousculée par l'arrivée d'outils modernes de calcul. Ainsi la commande de réplication dans un tableur favorise la forme récurrente de la formule à la place de sa forme fonctionnelle et explique le recours à la récurrence bien visible dans l'extrait du manuel infra. La question didactique est alors celle de la construction, dans l'organisation mathématique, de savoirs et de techniques qui tout à la fois donnent de la force à la récurrence pour mener économiquement les calculs avec le tableur et donnent accès au concept d'actualisation visé par l'enseignement. La séance présentée à l'atelier amorce une réponse expérimentale à cette question en organisant d'abord la (re)découverte des fonctionnalités de réplication du tableur puis une rupture avec la copie de formules habituelles :

(6) L'éditeur Foucher continue à publier un mémento intitulé « *Tables financières et statistiques* » qu'il met à la disposition, dit-il, « des professionnels et futurs professionnels pour être opérationnels ».

- augmenter progressivement le coût de l'écriture des formules « explicites » habituelles pour favoriser l'usage de la réplication et relancer le travail réflexif sur le concept d'actualisation des sommes d'argent en jeu ;
- rompre avec la construction algébrique de telles formules en préférant la recherche par approximations successives.

La séance elle-même

Il n'est pas possible en quelques lignes de présenter et de justifier l'intégralité des questions posées⁽⁷⁾. Signalons cependant la dernière question car elle a fait trébucher quelques participants :

En panne d'argent vous empruntez à un ami 900 € au taux mensuel de 1 % et vous décidez avec lui que les douze remboursements mensuels seront en progression arithmétique croissante de raison 2 €. Dressez l'échéancier sur le tableur et demandez-vous si en choisissant une autre raison pour la suite des versements (toujours arithmétique) le dernier versement pourrait se monter à 90 € seulement.

En effet, même après avoir mis en place les récurrences (la mathématique) et corrélativement la réplication (l'instrumental), on est confronté à la nécessité d'une réplication du bas vers le haut. Cela fonctionne-t-il ?

(7) Birebent A., 2006, Quel environnement informatique pour une introduction aux mathématiques financières à l'université ?, *Actes du colloque EMF 2006*, à paraître.