Temps, cadrans solaires, géométrie

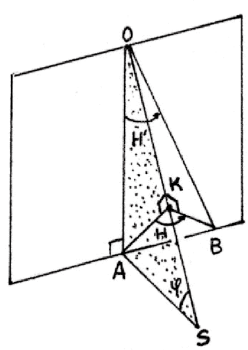
Bernard Rouxel(*)

J. E. Montucla écrit dans son Histoire des Mathématiques de 1758 :

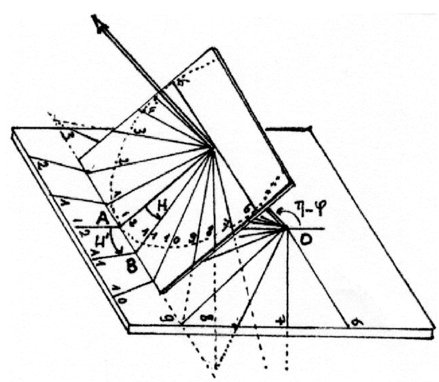
« *La Gnomonique ne consiste aux yeux du Géomètre intelligent qu'en quelques problèmes peu difficiles. Le principal et presque l'unique auquel elle se réduit, est celui-ci. Qu'on ait douze plans se coupant tous à angles égaux dans une même ligne, et que ces plans indéfiniment prolongés en rencontrent un autre dans une situation quelconque, il s'agit de déterminer les lignes dans lesquelles ils le coupent* ».

En effet, le tracé des cadrans usuels verticaux ou horizontaux ne nécessite que quelques éléments de géométrie et de trigonométrie. Les choses se compliquent un peu pour les cadrans verticaux déclinants (dont le plan n'est pas rigoureusement Ouest-Est), les calculs sont plus complexes et les méthodes géométriques plus dissuasives.
Les cadrans verticaux méridionaux (à plan rigoureusement Ouest-Est) et les cadrans horizontaux peuvent se tracer à l'aide des formules suivantes, où H′ désigne sur le cadran l'angle de la ligne de midi (verticale pour un cadran vertical, Nord-Sud pour un horizontal) avec la ligne horaire OB. H désigne l'angle horaire du soleil pour cette heure (H = 0 pour midi, 15° pour 13 h, 30° pour 14 h, …).

Cadran vertical



Cadran horizontal



$\mathrm{AB} = \mathrm{OA}\tan \mathrm{H}'$

$\mathrm{AK} = \mathrm{OA}\cos\varphi$

$\mathrm{AB} = \mathrm{AK}\tan \mathrm{H}$

d'où $\tan \mathrm{H}' = \tan \mathrm{H}\cos\varphi$

où est φ la latitude.

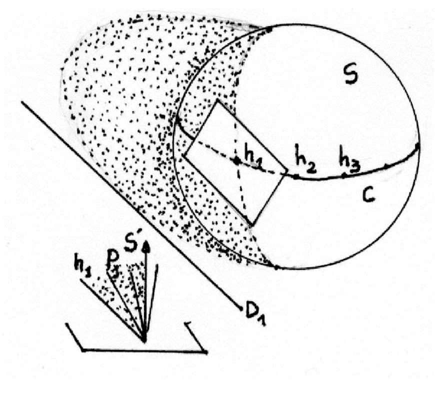
$\tan \mathrm{H}' = \tan \mathrm{H}\sin\varphi$

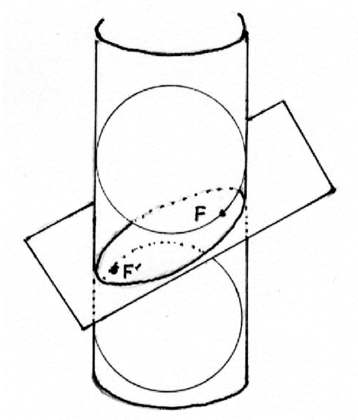
(*) IREM de Brest. msb.rouxel@wanadoo.fr

Depuis quelques années, de nombreuses sociétés gnomoniques se sont constituées, aboutissant à la création de nouveaux types de cadrans solaires à l'aide de diverses méthodes géométriques dont voici quelques exemples.

Cadrans sphériques

Soit S une sphère posée sur un plan horizontal P. Quand le soleil l'éclaire, un grand cercle apparaît limitant une zone d'ombre. Ce grand cercle varie selon le jour et l'heure. Si l'on considère un cadran auxiliaire A tracé sur le plan P, pour une heure h_1, on considère le plan P_1 défini par la ligne horaire h_1 et le style S′ de ce cadran. Il existe sur S deux points h_1 et h_1' dont les plans tangents sont parallèles à P_1. Il est aisé de voir que pour une heure donnée h_1, quel que soit le jour, les grands cercles d'ombre passent par h_1 et h_1'. Pour différentes heures h_1, h_2, h_3, les points h_1, h_2, h_3 appartiennent à un grand cercle C de S qu'il suffira de graduer pour obtenir un cadran solaire où l'heure est donnée par l'intersection des grands cercles d'ombre et de C.
Remarque 1 : on peut remplacer la sphère par un corps convexe quelconque (œuf, ellipsoïde, …).
Remarque 2 : les limites des cercles d'ombre ne sont pas très bien définies, d'où une précision médiocre. D'où l'idée d'utiliser la sphère comme gnomon et d'étudier le mouvement de l'ellipse E ombre de S sur P.





On peut montrer que :

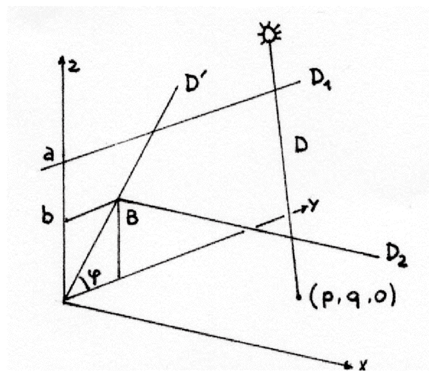
1- Pour une heure donnée h_1, E est tangente à deux droites D_1 et D_1', d'où une lecture possible de l'heure quand les lignes horaires D_i sont tracées. Il est possible d'en donner une construction géométrique à partir du tracé classique des lignes horaires de A.

2- Pendant la journée, les points de contact de E avec les lignes DL décrivent deux coniques et les ellipses demeurent tangentes à deux coniques ayant pour foyer le point de contact F de S et de P.

3- Une transformation par polaires réciproques dans P par rapport à un cercle de centre F, pour une heure donnée, transforme la famille E en un faisceau linéaire de cercles.

Cadran bifilaire (Michnik 1922)

On considère deux droites D_1 et D_2 orthogonales et parallèles au plan xOy. On considère le cas où elles sont orientées N-S et O-E. On peut alors prendre un repère tel que la droite D′, parallèle à l'axe de la terre et rencontrant D_1 et D_2, ait pour équations ($x = 0$, $y = x \tan \varphi$). D_1 aura alors pour équations ($x = 0$, $z = a$) et D_2 : ($y \tan \varphi = b$, $z = b$).



Une droite D quelconque de direction (m, n, 1) a une équation de la forme

$$(x = p + tm,\ y = q + tn,\ z = t).$$

Elle coupe le plan xOy au point ($x = p$, $y = q$, $z = 0$).

Condition d'intersection d'un rayon lumineux D avec D_1 :

$$p + ma = 0 \qquad (1)$$

Pour D et D_2 la condition est :

$$b = \tan \varphi\,(q + bn) \qquad (2)$$

Un plan horaire donné a une équation de la forme :

$$z - y \tan \varphi + kx = 0,$$

ce qui entraîne pour les rayons correspondant à une heure donnée la condition

$$km - n \tan \varphi + 1 = 0,$$

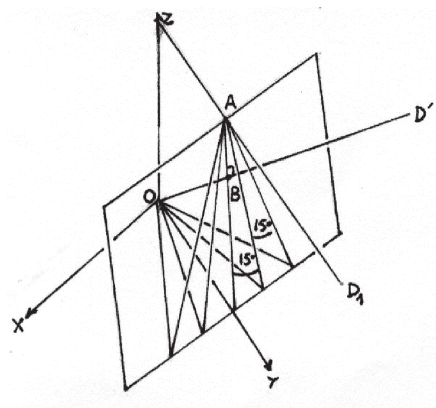
d'où, compte tenu de (1) et (2), la relation

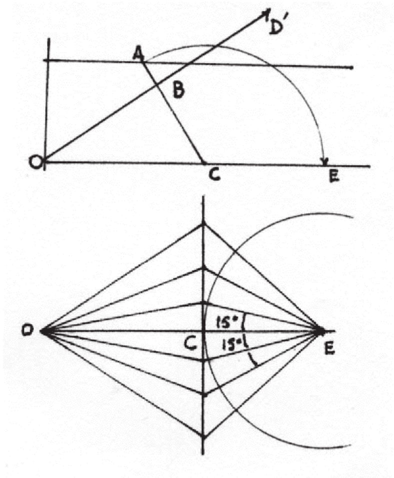
$$-\,kbp + aq \tan \varphi = 0.$$

Ceci montre que pour une heure donnée, l'intersection des ombres de D_1 et D_2 sur xOy décrit une droite passant par O. On obtient ainsi un cadran solaire à lignes horaires rectilignes.

Tracé des lignes horaires

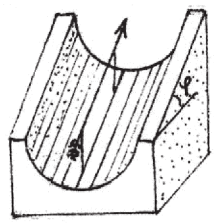
Il suffit d'obtenir un point de chaque ligne horaire. À l'équinoxe, les rayons solaires rencontrant D_1 et D_2 appartiennent à un plan orthogonal à D′ et contenant D_2. Ce plan coupe D_1 en A, les lignes horaires d'un cadran équatorial auxiliaire centré en A donnent alors sur xOy les points cherchés (voir les figures suivantes).

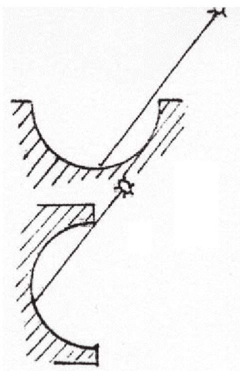


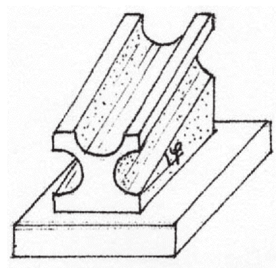


Cadrans polaires

Cadrans polaires cylindriques







On désigne par cadrans polaires des cadrans dont la table est parallèle à la ligne des pôles. Dans cette catégorie entrent aussi les cadrans cylindriques polaires constitués d'un demi-cylindre de révolution dont l'axe servant de style est parallèle à la ligne des pôles. On peut se passer de style en utilisant les bords du demi-cylindre et la relation entre angle inscrit et angle au centre. Les graduations sont régulières sur ces cadrans. Plus généralement on s'est posé le problème de l'existence de cadrans à graduations régulières constitués par deux cylindres polaires C_1 et C_2, C_1 servant de style et C_2 portant les lignes horaires.

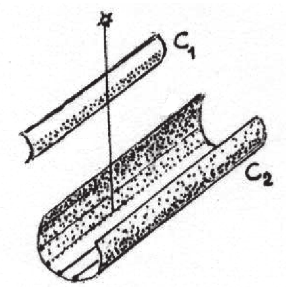
C'est en fait un problème de géométrie plane : déterminer deux courbes C_1 et C_2 telles que l'angle de la tangente en m_1 à C_1 avec une direction fixe Ox, soit proportionnel à l'abscisse curviligne de la courbe décrite par un point m_2 de la tangente en m_1 à C_1 (voir la figure, on utilise le repère de Frenet de C_1 : R est le rayon de courbure en m_1).

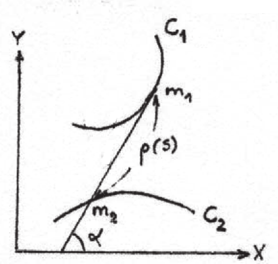
On aboutit à l'équation différentielle :

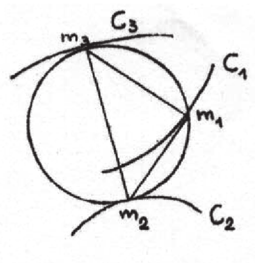
$$R^2\,(1+\rho')^2+\rho^2=k^2 \qquad \text{(E)}$$

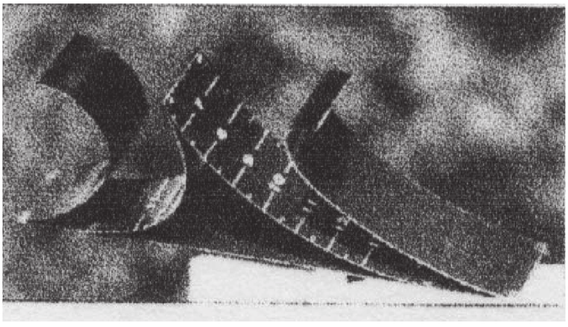
où k est une constante.
Si l'on considère le cercle C passant par m_1 et tangent à C_2 en m_2, le calcul de la longueur du diamètre m_2m_3 montre, tenant compte de (E), que C a un rayon constant.
On en déduit, appliquant des résultats de la cinématique des mouvements plan sur plan, que :

– C_1 est obtenue comme trajectoire d'un point d'un cercle C de rayon constant, qui roule sans glisser sur une courbe C_3 (arbitraire), m_2 est le deuxième point de contact de C avec son enveloppe.
– Si C_3 est une droite, C_1 est une cycloïde et C_2 est une droite.
– Si C_3 est un cercle, C_1 est une épi ou hypocycloïde et C_2 est un cercle.









Cadran construit avec deux portions de cardioïde et deux quarts de cercles.