Exercices de-ci, de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire. Par ailleurs, les exercices de géométrie prennent une part importante de la rubrique ; il serait souhaitable qu'il y ait plus de propositions d'exercices d'algèbre et d'analyse.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer à :

Serge Parpay
22 rue Alphonse Rougier
79000 NIORT
ou par Mél à : jeanfromentin@orange.fr

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique en joignant, si vous le pouvez, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent dégérées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 476-1 (Maurice Bauval – Versailles)
À propos de l'exercice 473-4.
On donne les trois distances a, b, c de l'orthocentre P aux trois sommets du triangle ABC. On suppose le triangle acutangle. Calculer les longueurs des trois côtés BC, CA et AB du triangle.

Exercice 476-2 (Frédéric de Ligt – Montguyon) – Corol'aire n° 67

On a l'identité $(n+2)n+1=(n+1)^2$; cela suggère l'idée de s'intéresser aux suites (a_n) qui vérifient $a_{n+2}a_n+1=a_{n+1}^2$. En particulier, pourriez-vous montrer, qu'à partir de $a_1 = 1$ et de $a_2 = m$ avec m entier supérieur à 1, la suite (a_n) ne produit que des entiers naturels ?

Exercice 476-3 (Louis Rivoallan – Rochefort-sur-Mer) – Corol'aire n° 59
On considère les nombres à n chiffres (en base dix) tels que leur carré se termine par les mêmes n chiffres. On accepte que, contrairement à l'usage, les chiffres « de gauche » soient égaux à 0. Il y a à l'évidence deux nombres qui répondent à la question : 0 et 1, que l'on fait précéder de $(n-1)$ zéros avec la convention précédente. Montrer que, pour tout n, il y a exactement deux autres nombres écrits avec n chiffres qui répondent à cette condition.

L'idée est venue d'un collègue de l'IUFM de La Rochelle qui a cherché à généraliser un exercice posé au concours de recrutement des professeurs des écoles.

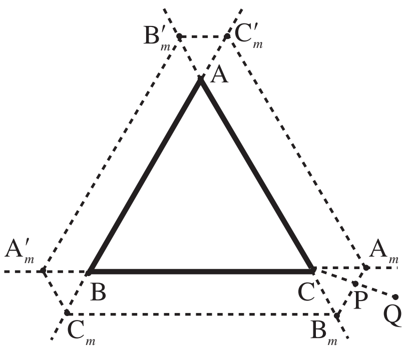
Solutions

Exercice 474-1 (Raymond Raynaud - Digne)

Étant donné un triangle équilatéral ABC de hauteur h, on désigne par $f(\mathrm{M})$ la somme des distances d'un point M du plan aux droites (AB), (BC) et (CA).
Quel est le lieu des points M tels que $f(\mathrm{M})$ soit égale à une longueur donnée l ?

Solution de Pierre Samuel (Bourg-la-Reine)

Soit ABC un triangle. Comme la distance d'un point M du plan à une droite (D) est fonction affine de M dans chacun des demi-plans découpés par (D), la somme $f(\mathrm{M})$ des distances de M aux droites (AB), (BC) et (CA) est fonction affine de M dans chacune des sept régions découpées par ces trois droites.



Si ABC est équilatéral de hauteur h, on a $f(\mathrm{A}) = f(\mathrm{B}) = f(\mathrm{C}) = h$. Par prise de barycentre, on en déduit qu'on a $f(\mathrm{M}) = h$ pour tout point M de l'intérieur ou de la périphérie du triangle.
Passons aux six autres régions. Le complémentaire du segment [AB] sur la droite (AB) se compose de deux demi-droites. Sur chacune, $f(\mathrm{M})$, affine et non bornée, est strictement croissante à partir de $f(\mathrm{A}) = f(\mathrm{B}) = h$. Donc, pour tout nombre $m > h$, il y a sur chacune un unique point C_m (C'_m) tel que $f(\mathrm{C}_m) = f(\mathrm{C}'_m) = m$. Notons B_m, B'_m (resp. A_m, A'_m) les points analogues sur (AC) (resp. (BC)).
Pour deux points P et P′ symétriques par rapport à une hauteur du triangle ABC, on a $f(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P}')$. D'après l'unicité notée ci-dessus, on en déduit que C_m et C'_m sont symétriques par rapport à la hauteur issue de C. De même A_m, B_m, A'_m et B'_m avec les autres hauteurs.
Donc les côtés de l'hexagone de sommets A_m, B_m, C_m, A'_m, B'_m, C'_m sont respectivement parallèles à ceux du triangle. De plus, les trois « petits » côtés $\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m$, $\mathrm{C}_m\mathrm{A}'_m$, $\mathrm{B}'_m\mathrm{C}'_m$ (contenus dans les secteurs angulaires) ont même longueur. De même pour les « grands » côtés $\mathrm{B}_m\mathrm{C}_m$, $\mathrm{A}'_m\mathrm{B}'_m$, $\mathrm{C}'_m\mathrm{A}_m$.
Le caractère affine de f montre qu'elle est constante de valeur m sur chacun des côtés de l'hexagone. Aucun autre point Q de l'une des six régions ne satisfait à $f(\mathrm{Q}) = m$ (par exemple, si Q est dans le secteur angulaire de sommet C, la demi-droite [CQ) rencontre $[\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m]$ en un point P et on a $f(\mathrm{Q}) \neq f(\mathrm{P}) = m$). Donc **l'ensemble des points M tels que $f(\mathrm{M}) = m$ est la réunion des six côtés de l'hexagone.**

Solution de Jean Gounon (Chardonnay)

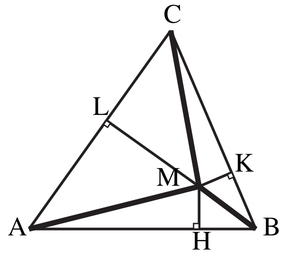
1) Notations

On désigne par :
(E_l) l'ensemble de points cherché (dépendant de l) ;
(F_1) le domaine fermé limité par le triangle ABC ;
(F_2) le complémentaire dans le plan de (F_1).

On va étudier successivement les intersections $(E_l)\cap(F_1)$ et $(E_l)\cap(F_2)$.

2) Étude de $(\mathbf{E}_l)\cap(\mathbf{F}_1)$.

Pour tout point $M\in(F_1)$, notons H, K et L, les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB), (BC) et (CA) (figure ci-contre).



D'autre part, soient $a=\dfrac{2h}{\sqrt{3}}$ la longueur du côté du triangle ABC et s, s_1, s_2, s_3 les aires respectives des triangles ABC, MAB, MBC et MCA. $s=\dfrac{ah}{2}=\dfrac{h^2}{\sqrt{3}}$;

et par ailleurs

$$s=s_1+s_2+s_3=\frac{1}{2}(AB\times MH+BC\times MK+CA\times ML)==\frac{a}{2}(MH+MK+ML)\ ;$$

donc

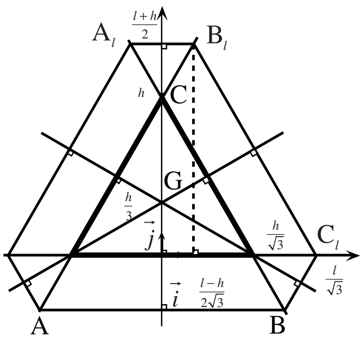
$$MH+MK+ML=\frac{2h^2}{a\sqrt{3}}=h.$$

$f(M)$ est donc égal à la constante h.

D'où la discussion : Si $l=h:(E_l)\cap(F_1)=(F_1)$,
Si $l\neq h:(E_l)\cap(F_1)=\varnothing$.

3) Étude de $(\mathbf{E}_l)\cap(\mathbf{F}_2)$.

a) $(E_l)\cap(F_2)$ étant invariant par la rotation $r_{G,\frac{2\pi}{3}}$ (G centre de gravité du triangle ABC), on réduira son étude aux deux zones (I) et (II) ainsi définies (figure ci-contre) ;
Zone (I) : intersection des deux demi-plans fermés de frontières (AC) et (BC) ne contenant pas G.
Zone (II) : intersection des deux demi-plans fermés de frontières (AB) et (AC) contenant G et du demi-plan ouvert de frontière (BC) ne contenant pas G.



On se donne le repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$ ainsi défini : O est le milieu de [AB], $\vec{i}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\mathrm{OB}}$, $\vec{j}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\mathrm{OC}}$. Dans ce repère, les coordonnées de A sont $\left(-\dfrac{h}{\sqrt{3}},0\right)$, celles de B : $\left(\dfrac{h}{\sqrt{3}},0\right)$, celles de C : $(0,h)$; l'équation de (AB) est $y = 0$, celle de (AC) est $x\sqrt{3}-y+h=0$, et celle de (BC) est $x\sqrt{3}+y-h=0$.

On a alors, pour tout point M du plan :

$$f(\mathrm{M})=|y|+\frac{\left|x\sqrt{3}-y+h\right|}{2}+\frac{\left|x\sqrt{3}+y-h\right|}{2}.$$

b) Étude dans la zone (I) :

Pour tout point M de la zone (I) : $y > h$, $x\sqrt{3}-y+h\leq 0$, $x\sqrt{3}+y-h\geq 0$. Donc :

$$f(\mathrm{M})=y+\frac{1}{2}\left(-x\sqrt{3}+y-h+x\sqrt{3}+y-h\right)=2y-h,$$

donc :

$$f(\mathrm{M})=l\Leftrightarrow 2y-h=l\Leftrightarrow y=\frac{h+l}{2}.$$

La condition $y > h$ pour un point de cette zone se traduit, pour que l'ensemble cherché soit non vide dans cette zone, par $\dfrac{h+l}{2}>h$, soit $l > h$.

Cette condition étant remplie, la partie de l'ensemble cherché située dans la zone (I) est donc le segment $[\mathrm{A}_l\mathrm{B}_l]$ parallèle à (BC), avec $\mathrm{A}_l \in$ (BC) et A_l de coordonnées $\left(x_{\mathrm{A}_l},\dfrac{h+l}{2}\right)$; donc : $x_{\mathrm{A}_l}\sqrt{3}+\dfrac{l+h}{2}-h=0$, soit $x_{\mathrm{A}_l}=\dfrac{h-l}{2\sqrt{3}}$, et donc $x_{\mathrm{B}_l}=\dfrac{l-h}{2\sqrt{3}}$.

c) Étude dans la zone (II) :

Pour tout point M de la zone (II) : $y \geq 0$, $x\sqrt{3}-y+h\geq 0$, $x\sqrt{3}+y-h\geq 0$. Donc ici :

$$f(\mathrm{M})=y+\frac{1}{2}\left(2x\sqrt{3}\right)=y+x\sqrt{3}.$$

Donc :

$$f(\mathrm{M})=l\Leftrightarrow x\sqrt{3}+y-l=0.$$

La condition $x\sqrt{3}+y-h\geq 0$ pour un point de cette zone se traduit, pour que l'ensemble cherché soit non vide dans cette zone, par : $x\sqrt{3}+y-h\geq x\sqrt{3}+y-l,$, soit de nouveau $l > h$.

Cette condition étant remplie, soit (Δ) la droite d'équation $x\sqrt{3}+y-l=0$. $B_l \in (\Delta)$ car $\frac{l-h}{2\sqrt{3}}\times\sqrt{3}+\frac{h+l}{2}-l=0$. La partie de l'ensemble cherché située dans la zone (II) est donc le segment $[B_lC_l]$ parallèle à (BC), avec $C_l \in (AB)$, dont l'abscisse x_{C_l} vérifie donc : $x_{C_l}\sqrt{3}-l=0$, soit $x_{C_l}=\frac{l}{\sqrt{3}}$.

Remarque : $A_lB_l=\frac{l-h}{\sqrt{3}}$ et

$$(B_lC_l)^2=\left(\frac{l}{\sqrt{3}}-\frac{l-h}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{l+h}{2}\right)^2=\left(\frac{l+h}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{l+h}{2}\right)^2=\frac{(l+h)^2}{3}.$$

Donc $B_lC_l=\frac{l+h}{\sqrt{3}}$. On en déduit : $B_lC_l-A_lB_l=\frac{2h}{\sqrt{3}}=a$; la différence de longueur entre les deux segments est donc la constante a (longueur du côté du triangle ABC).

4) Discussion-résumé :

1) $l<h$: $(E_l)=\varnothing$.
2) $l=h$: $(E_l)=(F_1)$ (domaine fermé limité par le triangle ABC).
3) $l>h$: (E_l) est un hexagone à côtés parallèles aux côtés du triangle ABC, les longueurs des côtés successifs prenant alternativement deux valeurs (fixes pour chaque valeur de l) dont la différence est la longueur du côté du triangle ABC.

Solutions de Robert Bourdon (Tourgeville), Jean-Claude Carréga (Lyon), Alain Corre (Moulins), Christine Fenoglio (Lyon), Georges Lion (Wallis), A Marcout (Sainte-Savine), René Manzoni (Le Havre), Jacques Ollier (Noisy-le-Sec), Christian Perroud (Habère-Lullin), Raymond Raynaud (Digne), Daniel Reisz (Auxerre) et Odile Simon (La Prenessaye).

Exercice 474-2 (Georges Lion - Wallis)

Dans son intéressant article (Bulletin Vert nº 470), Éric Barbazo cite l'étude de la fonction $\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{1}{x}}$ proposée en première partie du baccalauréat en 1911 à Lille, comme l'un des premiers exemples d'application du calcul des dérivées en conformité avec les programmes de 1902.
Comment au contraire trouver le minimum de ladite fonction sans avoir recours aux dérivées ?

Solution de l'auteur

Si l'on pose $x = t^2$ avec $t > 0$, on est conduit à chercher le minimum de la fonction $t+\dfrac{1}{t^3}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Définissant u et v réels par $3e^u = t$ et $e^v = \dfrac{1}{t^3}$, on a par convexité de l'exponentielle :

$$t+\frac{1}{t^3}=4\left(\frac{3e^u+e^v}{4}\right)\geq 4e^{\frac{3u+v}{4}}=4\left(e^{3u}e^v\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{4}{\sqrt[4]{27}}=\frac{4\sqrt[4]{3}}{3},$$

et ce minorant est atteint par la fonction étudiée pour $x=\sqrt{3}$.
Remarques :
1) Pour que cette solution soit honnête, on doit noter que la convexité de e^x peut être déduite par passage à la limite simple de celle de $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, elle-même conséquence de la croissance (immédiate) du taux d'accroissement de z^n pour $z > 0$.
2) Jean-Pierre Friedelmeyer connaît certainement une démonstration directe de l'inégalité $x^3y\leq\left[\dfrac{1}{4}(3x+y)\right]^4$ pour x et $y > 0$.

Solution de Dominique Tournès (Saint-Denis de la Réunion)

D'après l'inégalité de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique, on peut écrire :

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\geq 4\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\frac{\sqrt{x}}{3}\frac{\sqrt{x}}{3}\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{4}}=4\times 3^{-\frac{3}{4}},$$

avec égalité si et seulement si $\dfrac{\sqrt{x}}{3}=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$, c'est-à-dire $x^2 = 3$, ou encore $x=\sqrt{3}$.

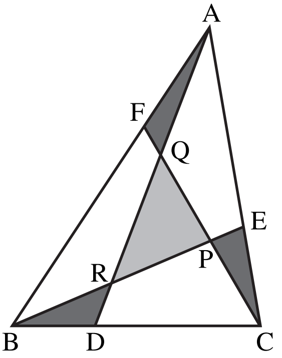
Le minimum est donc atteint pour $\sqrt{3}$ et il vaut $4\times 3^{\frac{3}{4}}$.
NDLR : on pourra utilement consulter le livre « *Initiation à la statistique* » – Louis Gerber et Paul-Louis Hennequin – APMEP 1967 p. 77 à 79, § 2-7bis : compléments f-moyenne, inégalités entre moyennes.

Solutions :
– ***Alban Da Sylva (Nouméa)***, avec un changement d'inconnue, aboutit à une fonction trigonométrique et une aire de triangle à mesurer.
– ***Marie-Laure Chaillout (Epinay/Orge), Christine Fenoglio (Lyon), René Manzoni (Le Havre) et Éric Oswald (Borgo)*** utilisent une factorisation de polynômes.

Exercice 474-3 (Alain Corre - Moulin)

Étant donné un triangle ABC, on place les points D, E et F respectivement sur les segments [BC], [CA], [AB]. Les droites (AD), (BE) et (CF) se coupent en P, Q et R. En notant x, y et z les rapports BD/BC, CE/CA et AF/AB, déterminer l'aire du triangle PQR en fonction de celle de ABC, de x, y et z.

Solution de René Manzoni (Le Havre)



On suppose que les droites (BE) et (CF) [resp. (CF) et (AD), resp. (AD) et (BE)] n'ont qu'un seul point commun P [resp. Q, resp. R].
Les cas de $y = 0$ et $z = 1$, ou de $z = 0$ et $x = 1$, ou de $x = 0$ et $y = 1$, sont exclus.
En outre, à un changement de notation près, on peut supposer que le triangle PQR est à l'intérieur du triangle DAC.
Soit S l'aire du triangle ABC et soit S′ l'aire du triangle PQR que l'on notera : S = a(ABC) et S′ = a(PQR). Il est évident que : a(DAB) = Sx, a(EBC) = Sy, a(FCA) = Sz, a(DAC) = S(1 − x), a(EAB) = S(1 − y) et a(FCB) = S(1 − z).

Alors, d'après le théorème de Ménélaüs, et si $y \neq 0$ et $z \neq 0$, on a $\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PE}}\cdot\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CA}}\cdot\dfrac{\mathrm{FA}}{\mathrm{FB}} = 1$,

d'où

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PE}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{FA}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{AB}-\mathrm{FA}}{\mathrm{FA}} = \frac{1}{y}\cdot\left(\frac{1}{z}-1\right) = \frac{1-z}{yz},$$

$$\mathrm{S}_1 = \mathrm{a(EPC)} = \frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{BE}}\cdot \mathrm{S}\cdot y = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PE}}+1}\cdot \mathrm{S}\cdot y = \frac{1}{\dfrac{1-z}{yz}+1}\cdot \mathrm{S}\cdot y = \frac{\mathrm{S}\cdot y^2 z}{1-z+yz}.$$

Si $yz = 0$, ce dernier résultat reste valable.
De la même façon, on obtient :

$$\mathrm{S}_2 = \mathrm{a(FQA)} = \frac{\mathrm{S}\cdot z^2 x}{1-x+zx},\quad \mathrm{S}_3 = \mathrm{a(DRB)} = \frac{\mathrm{S}\cdot x^2 y}{1-y+xy}.$$

Il en résulte que $\mathrm{a(RPCD)} = \mathrm{S}\cdot y - \mathrm{S}_3 - \mathrm{S}_1$, $\mathrm{a(PQAE)} = \mathrm{S}\cdot z - \mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_2$, d'où

$$\mathrm{S}' = \mathrm{S}\cdot(1-x) - \mathrm{S}_1 - (\mathrm{S}\cdot y - \mathrm{S}_3 - \mathrm{S}_1) - (\mathrm{S}\cdot z - \mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_2),$$

$$\mathrm{S}' = \mathrm{S}\cdot(1-x-y-z) + \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 + \mathrm{S}_3,$$

$$\mathrm{S}' = \mathrm{S}\frac{(-1+x+y+z-yz-zx-xy+2xyz)^2}{(1-z+yz)(1-x+zx)(1-y+xy)},$$

soit

$$S' = S\frac{\left[xyz-(1-x)(1-y)(1-z)\right]^2}{(1-z+yz)(1-x+zx)(1-y+xy)}.$$

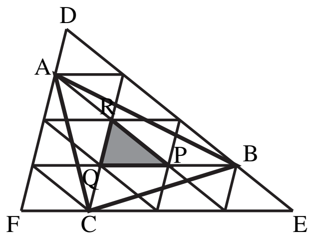
Remarques : on vérifie que $S' = S$ pour $x = y = z = 0$ ou pour $x = y = z = 1$.
On vérifie aussi que $S' = 0$ pour $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$.

Complément de l'auteur qui étudie le cas particulier $x = y = z$.

$$a(PQR) = S' = S\left(1-\frac{3x(1-x)}{x^2-x+1}\right).$$

Cas où $x = y = z = 1/2$.
Dans ce cas, D, E et F sont les milieux des côtés, les trois droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes, donc $S' = 0$.

Cas où $x = y = z = 1/3$
Les points D, E et F divisent les côtés du triangle en trois. En utilisant les formules, on obtient : $S' = S\left(1-\frac{6}{7}\right) = \frac{S}{7}$.



Une méthode astucieuse pour redécouvrir ce résultat est le puzzle de MIKUZINSKI (1943).
Dans le triangle DEF, on divise chaque côté en quatre parties égales, et, par chacun des points obtenus, on trace les parallèles à chaque côté. Les points A, B, C, P, Q et R sont placés comme indiqué sur la figure.
On obtient ainsi un recouvrement du triangle DEF par des triangles isométriques au triangle PQR. On a donc a(DEF) = 16 S′. En observant que [AB], [BC] et [CA] sont les diagonales de parallélogrammes composés de quatre triangles de base, il est facile de remarquer que

$$a(BEC) = a(CAF) = a(DAB) = 3\,S'.$$

Or

$$a(ABC) = a(DEF) - a(BEC) - a(CAF) - a(DAB).$$

On a donc

$$a(ABC) = 16\,S' - 9\,S' = 7\,S'.$$

D'où

$$a(PQR) = a(ABC)/7.$$

Solutions de Jean-Claude Carréga (Lyon), Christine Fenoglio (Lyon), Georges Lion (Wallis) et Christian Perroud (Hadère-Lullin).

Exercice 474-4

Les solutions de ***Jean-Claude Carréga (Lyon), Jean-Yves Coquan (Albi), Raymond Raynaud (Digne) et Odile Simon (La Prenessaye)*** à cet exercice sont arrivées après l'envoi de la rubrique qui est parue dans le Bulletin Vert n° 475.