Exercices de-ci, de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire. Les exercices de géométrie prennent une part importante de la rubrique ; il serait souhaitable qu'il y ait plus de propositions d'exercices d'algèbre et d'analyse.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer à :

Serge Parpay
22 rue Alphonse Rougier
79000 NIORT
ou par Mél à : jeanfromentin@orange.fr

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique en joignant, si vous le pouvez, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui passent mal d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Les solutions de Jean-Claude Carrega, Georges Lion et Nicolas Patrois à l'exercice 473-2 n'ont pu être prises en compte, étant arrivées après l'envoi de la rubrique au Bulletin Vert.

Exercices

Exercice 475-1 (C.D. Olds. Continued fractions (1963))

1) Décomposer 433 en une somme de deux carrés.
2) Soit deux détachements de soldats, chacun de ces détachements formant un carré de b rangs de b soldats. Montrez qu'il est impossible de former avec les deux carrés un unique carré de soldats.
Montrer que, si un soldat est ajouté ou enlevé à l'un des deux carrés, il est parfois possible que les deux détachements soient regroupés en un seul carré de soldats.

Exercice 475-2 (Olympiades suédoises 1961 - 1968. [Document SMF])

Soient x_i, y_i, ($i = 1, 2, \dots, n$), des nombres réels tels que $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ et $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$.
Soit $z_1, z_2, \dots, z_n$ une permutation arbitraire des nombres $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Démontrer l'inégalité $\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$.

Exercice 475-3 (Miguel Amengual Covas - Mallorca)

Sean P, Q, R, S los respectives puntos medios de los lados [AB], [BC], [CD], [DA]

de un cuadrilátero ABCD convexo.
Sea O el punto de intersección de (PR) y (QS).
Si OA = OC y OB = OD, demostrar que ABCD es un paralelogramo.

Solutions

Exercice 473-3 (Raymond Raynaud - Digne)

Soit deux triangles du plan ABC et A′B′C′.
Si les perpendiculaires menées des points A, B, C respectivement sur les droites (B′C′), (C′A′) et (A′B′) sont concourantes, en est-il de même des perpendiculaires menées respectivement des points A′, B′, C′ sur les droites (BC), (CA) et (AB) ?

Solution de Richard Beczkowsky (Châlon-sur-Saône)

Soit I le point commun aux perpendiculaires menées de A, B et C aux côtés du triangle A′B′C′. Les perpendiculaires menées de B′ et C′ aux côtés du triangle ABC se coupent en I′. Ces orthogonalités se traduisent à l'aide de produits scalaires par :

$$\left(\overrightarrow{I'A}-\overrightarrow{I'I}\right)\cdot\overrightarrow{B'C'}=0\ ;\ \left(\overrightarrow{I'B}-\overrightarrow{I'I}\right)\cdot\overrightarrow{C'A'}=0\ ;\ \left(\overrightarrow{I'C}-\overrightarrow{I'I}\right)\cdot\overrightarrow{A'B'}=0\ ;$$

$$\overrightarrow{I'B'}\cdot\left(\overrightarrow{I'A}-\overrightarrow{I'C}\right)=0\ ;\ \overrightarrow{I'C'}\cdot\left(\overrightarrow{I'B}-\overrightarrow{I'A}\right)=0\,.$$

Après addition de ces relations, il vient :

$$\overrightarrow{I'A}\cdot\left(\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{I'B'}-\overrightarrow{I'C'}\right)+\overrightarrow{I'B}\cdot\left(\overrightarrow{C'A'}+\overrightarrow{I'C'}\right)$$
$$+\overrightarrow{I'C}\cdot\left(\overrightarrow{A'B'}-\overrightarrow{I'B'}\right)-\overrightarrow{I'I}\cdot\left(\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'A'}+\overrightarrow{A'B'}\right)=0,$$

$$\overrightarrow{I'A}\cdot\vec{0}+\overrightarrow{I'B}\cdot\overrightarrow{I'A'}+\overrightarrow{I'C}\cdot\overrightarrow{A'I'}-\overrightarrow{I'I}\cdot\vec{0}=0,$$

soit

$$\overrightarrow{I'A'}\cdot\overrightarrow{CB}=0$$

qui prouve que (I′A′) est perpendiculaire à (BC).

Solution de Pierre Renfer (Ostwald)

La fonction scalaire de Leibniz $M\mapsto MA'^2-MB'^2$ a pour lignes de niveau les perpendiculaires à la droite (A′B′).
Donc si les perpendiculaires menées des points A, B et C respectivement sur les droites (B′C′), (C′A′) et (A′B′) se coupent en un point M, alors :

$$\begin{cases} MA'^2-MB'^2=CA'^2-CB'^2\\ MB'^2-MC'^2=AB'^2-AC'^2\\ MC'^2-MA'^2=BC'^2-BA'^2\end{cases}\qquad (S)$$

En additionnant, on obtient une condition nécessaire pour le concours des trois perpendiculaires :

$$AB'^2+BC'^2+CA'^2=A'B^2+B'C^2+C'A^2\qquad (C)$$

Cette condition est aussi suffisante, car si les deux premières perpendiculaires se coupent en M, les deux premières équations de (S) sont satisfaites et la condition (C) assure que la troisième l'est aussi et que le point M appartient donc à la troisième perpendiculaire.
Les deux triangles ABC et A′B′C′ sont interchangeables dans la condition (C).
Donc si les perpendiculaires menées des points A, B et C respectivement sur les droites (B′C′), (C′A′) et (A′B′) sont concourantes, il en est de même des perpendiculaires menées des points A′, B′ et C′ respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB).

Autres solutions : Jacques Chayé (Poitiers), René Manzoni (Le Havre), Raymond Raynaud (Digne).

Exercice 473-4 (Michel Lafond - Dijon)

Dans le plan, un triangle ABC a une aire de 1 344 m². Un point P du plan vérifie PA = 25 m, PB = 33 m et PC = 39 m.
Calculer les côtés du triangle ABC.

Solution de l'auteur

Cherchons l'aire maximale d'un triangle ABC pour lequel il existe un point P tel que PA = 25 m, PB = 33 m et PC = 39 m.
Ce maximum existe puisque

$$AB \leq AP + PB = 58,\ AC \leq AP + PC = 64,\ BC \leq BP + PC = 72.$$

Soit ABC un tel triangle « maximal », et supposons que P ne soit pas l'orthocentre de ABC. Dans ce cas, P n'est pas sur au moins une des hauteurs, disons celle issue de A (figure 1).

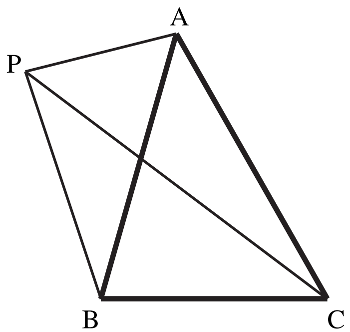

Figure 1

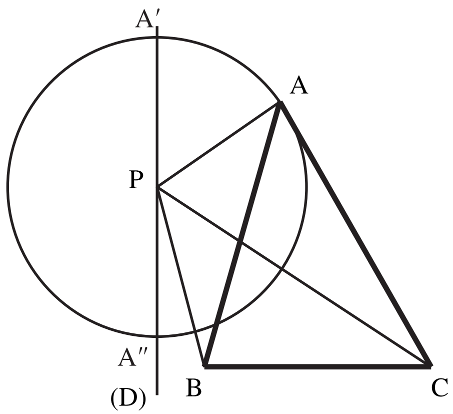

Figure 2

Mais alors, si (D) est la perpendiculaire à (BC) passant par P, A n'appartient pas à (D), donc le cercle de centre P et de rayon PA coupe (D) en deux points A′ et A″ distincts de A (figure 2).

L'un des triangles A′BC et A″BC a une aire supérieure à celle de ABC avec les mêmes distances PA = PA′ = PA″, PB, PC. D'où une contradiction.
On suppose donc que P est l'orthocentre de ABC.

Si P est à l'extérieur de ABC, (figure 3), alors le triangle A′BC, avec A′ symétrique de A par rapport à P, aurait une aire supérieure à celle de ABC avec les mêmes distances PA = PA′, PB, PC. D'où la même contradiction que précédemment.
On peut donc supposer que P orthocentre de ABC est à l'intérieur de ABC (figure 4).

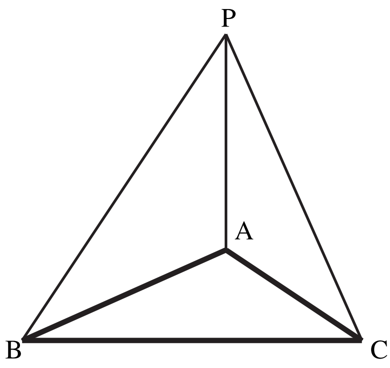

Figure 3

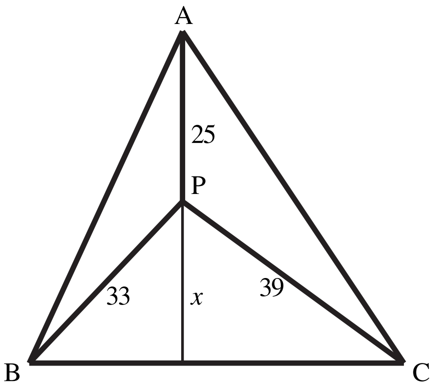

Figure 4

Posons PH = x où H est le pied de la hauteur issue de A. On a :

$$\mathrm{BH}=\sqrt{33^2-x^2}\ ,\ \ \mathrm{CH}=\sqrt{39^2-x^2}\ .$$

L'aire de ABC est égale à

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{33^2-x^2}+\sqrt{39^2-x^2}\right)(x+25).$$

On cherche le maximum de $f(x)$; on peut se contenter du domaine]0, 33[, puisque x < PB = 33.
On trouve

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{33^2-x^2}+\sqrt{39^2-x^2}\right)\left(1-\frac{x(x+25)}{\sqrt{33^2-x^2}\sqrt{39^2-x^2}}\right).$$

En utilisant la quantité conjuguée, on trouve que $f'(x)$ est du signe

$$\left(33^2-x^2\right)\left(39^2-x^2\right)-\left[x(x+25)\right]^2=-50x^3-3\,235x^2+1\,656\,369.$$

Ce polynôme se factorise en

$$(-5x+99)\left(10x^2+845x+16\,731\right).$$

Le second facteur a ses deux racines négatives. Donc, sur]0, 33[, $f'(x)$ est du signe de $-5x+99$.

Le maximum de l'aire est atteint pour $x=\dfrac{99}{5}=19,8$ avec $f'\left(\dfrac{99}{5}\right)=1\,344.$

Puisque par hypothèse aire (ABC) = 1 344, c'est qu'on est nécessairement dans le cas de la figure 4 pour laquelle on calcule :

$$\mathrm{BH}^2 = 33^2 - x^2 = 696,96,$$

$$\mathrm{CH}^2 = 39^2 - x^2 = 1\,128,96,$$

d'où

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BH}^2 + (x+25)^2 = 2\,704,$$

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{CH}^2 + (x+25)^2 = 3\,136,$$

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BH} + \mathrm{HC} = 26,4 + 33,6.$$

Les côtés de ABC mesurent donc :
AB = 52 m, AC = 56 m et BC = 60 m.

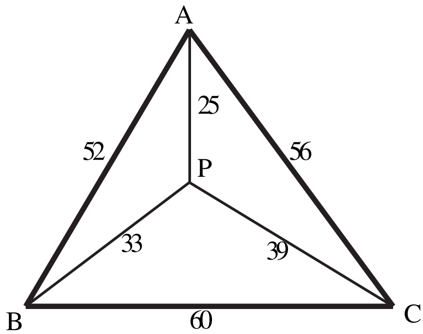

Figure 5 : le résultat

Autres solutions : Maurice Bauval (Versailles), Richard Beczkowsky (Châlons-sur-Saône), Christine Feroglio (Lyon), René Manzoni (Le Havre), Pierre Renfer (Ostwald).

Exercice 474-4 (Serge Parpay - Niort)

Petits exercices pour amateurs :

a) Trouver un entier de quatre chiffres, carré parfait, sachant que l'entier que l'on obtient en augmentant chacun des chiffres d'une unité est encore un carré parfait.

b) Trouver un entier de quatre chiffres, carré parfait, sachant que les deux chiffres de gauche sont égaux et que les deux chiffres de droite sont égaux.

Arithmétique – Maillard et Millet – Terminale C 1954

Solution de Alain Corre (Moulins)

Partie a)

Soit

$$\mathrm{N} = 1000\,a + 100\,b + 10\,c + d$$

un entier, a, b, c et d étant des chiffres compris entre 0 et 9, a étant non nul. Si on ajoute 1 à chaque chiffre, on obtient

$$\mathrm{M} = \mathrm{N} + 1\,111.$$

Si N et M sont deux carrés parfaits k^2 et k'^2, alors on a :

$$k'^2 - k^2 = 1\,111 = 11 \times 101 = 1 \times 1\,111.$$

Premier cas : $\begin{cases} k'-k=1 \\ k'+k=1111 \end{cases}$ a pour solution $k' = 556$ et $k = 555$.

$k = 555$ est impossible puisque $555^2 = 308\,025$ possède plus de quatre chiffres.

Deuxième cas : $\begin{cases} k' - k = 11 \\ k' + k = 101 \end{cases}$ a pour solution $k' = 56$ et $k = 45$.

$k^2 = 2\,025$ et $k'^2 = 3\,136$. Il existe donc une solution : N = 2 025.

Partie b)

Soit N un entier de quatre chiffres, sachant que les deux chiffres de gauche sont égaux ainsi que les deux chiffres de droite. En appelant a et b les chiffres de gauche et de droite, on a : $N = 1\,100\,a + 11\,b = 11\,(100\,a + b)$.

Pour que N soit un carré parfait, il est nécessaire que $100\,a + b$ soit de la forme $11\,k^2$.

Comme $\dfrac{100\,a+b}{11}$ est un carré parfait, en remarquant que ce nombre doit être compris entre 9 et 90, les seuls carrés qui conviennent sont : 16, 25, 36, 49, 64 et 81. D'où $100\,a + b$ doit être l'un des nombres suivants : 176, 275, 393, 539, 704, 891.

Le seul à être de la forme cherchée est 704, d'où $N = 11 \times 704 = 7\,744$ qui est la solution cherchée : **N = 7 744**.

Autres solutions : Robert Bourdon (Tourgeville), Pierre Samuel (Bourg-la-Reine).