« La malédiction des maths » en CM1/CM2

Nicole Bonnet(*) & Élisabeth Oudon(**)

Résumé : l'article propose la description et les commentaires didactiques de cinq séances mises en œuvre dans une classe de CM1/CM2. Ces séances portent sur la résolution de problèmes complexes dont les énoncés racontent une histoire en lien avec l'album *La malédiction des maths*. Cet album nous a paru riche en possibilités et notre objectif est de donner envie aux maîtres de l'utiliser en leur fournissant quelques pistes de réflexion. Quant aux élèves, ils ont pris grand plaisir à répondre aux questions parfois loufoques de l'album et sont rentrés plus facilement dans les problèmes que nous leur avons proposés.

I. Introduction

Pour une meilleure compréhension nous conseillons au lecteur de lire *La malédiction des maths* de Jon Scieszka et Lane Smith, édition Seuil Jeunesse, cependant l'article devrait se suffire à lui seul. Nous souhaitons néanmoins que le lecteur n'ait qu'une envie : exploiter dans d'autres directions cet album qui offre un grand nombre de possibilités pour le cycle 3. (Il a été pointé comme potentiellement intéressant dans la revue Grand N nº 65. Il nous a semblé que des propositions de mises en œuvre viendraient concrétiser cet aspect.)

Dans ce que nous allons décrire, l'album sert d'inducteur pour proposer des problèmes.
Notre hypothèse était la suivante : si les élèves ont eu la possibilité de consulter l'album, de le travailler dans le cadre de la maîtrise de la langue, la dévolution des problèmes se fera de manière plus contextualisée. Ils entreront mieux dans la compréhension des énoncés car ils se seront déjà approprié l'histoire et la résolution s'en trouvera facilitée. En outre, nous pensions que l'aspect mi-sérieux, mi-facétieux de l'album créerait une motivation et que les élèves habituellement en retrait lors d'une séance de mathématiques plus traditionnelle, s'impliqueraient davantage.
À partir de l'album, nous avons donc choisi quelques situations et nous avons proposé aux élèves d'en chercher une solution.

Dans la rubrique « les problèmes pour chercher », le document d'accompagnement des programmes met en évidence quatre fonctions pour la résolution de problèmes :

1. *des problèmes dont la résolution vise à la construction d'une nouvelle connaissance,*

(*) Professeur de mathématiques et formateur à l'IUFM de Dijon, IREM de Dijon, Ex membre de la COPIRELEM (Commission interIREM pour l'école élémentaire). Adresse mel : nicole.bonnet @dijon.iufm.fr.
(**) Professeur des écoles, maître formateur à l'école Petit Bernard de Dijon et ses élèves (années 2004-2005 et 2005-2006).

2. *des problèmes destinés à permettre le réinvestissement des connaissances déjà travaillées, à les exercer,*
3. *des problèmes plus complexes que les précédents dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de connaissances,*
4. *des problèmes centrés sur le développement de la capacité à chercher : en général, pour résoudre ces problèmes, les élèves ne disposent pas encore de solution experte.*

Dans ce dernier cas, nous parlons de « problèmes pour chercher » alors que dans les précédents, nous parlons de « problèmes pour apprendre », en soulignant l'aspect réducteur de ces dénominations, puisque dans tous les cas, l'élève mobilise des connaissances et se trouve placé en situation de recherche.

Les « problèmes pour chercher » sont des problèmes pour lesquels les élèves ne disposent pas d'un modèle de résolution qui aurait été enseigné auparavant. Ils permettent le développement de stratégies de recherche.
Face à une tâche de résolution de problème « ordinaire » comme les problèmes que l'on trouve dans les manuels, les élèves se contentent en général de chercher la bonne opération à utiliser avec les nombres donnés dans l'énoncé et ils attendent que le maître leur dise si leur résultat est correct. Dans ce contexte, il va être plus difficile d'adopter cette attitude car avant de proposer des opérations à effectuer, il faut construire du sens.
Dans le cas de « problèmes pour chercher », il est nécessaire d'expliquer aux élèves quelles sont leurs tâches : élaborer une solution personnelle, en laisser une trace écrite, formuler une réponse dans les termes du problème, vérifier et justifier par eux-mêmes leurs résultats, essayer d'expliquer leur méthode, établir la preuve d'une proposition.

Objectifs généraux que nous nous étions fixés pour les élèves

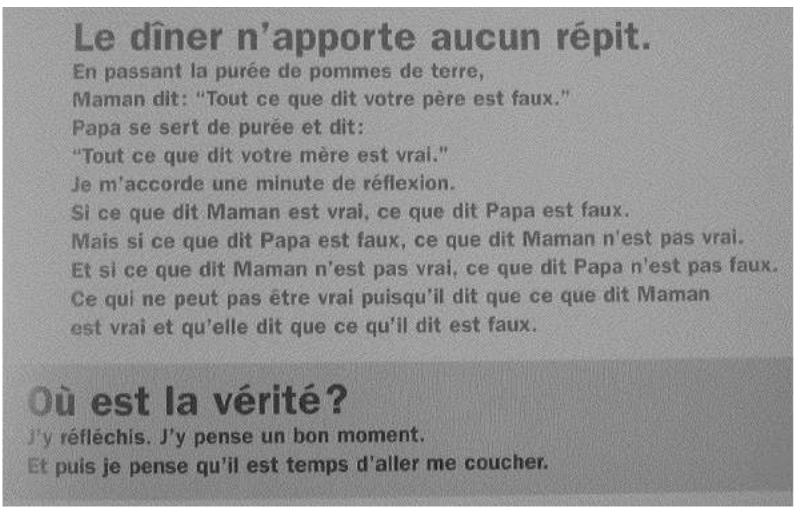
- Formuler des conjectures, émettre des hypothèses.
- Améliorer la gestion des procédures par essais de calculs successifs : garder la trace des essais, faire des ajustements au voisinage du but, vérifier que les solutions sont compatibles avec les contraintes de l'énoncé.
- S'organiser pour produire les solutions, contrôler qu'on a toutes les solutions.
- Établir la preuve d'une proposition.

Dans cette classe de CM1/CM2, la maîtresse a conservé un espace de regroupement comme dans les classes maternelles. Ce n'est pas très courant et nous voudrions en souligner l'intérêt. Cet endroit permet non seulement de raconter ou de lire des histoires, mais aussi de donner des consignes collectives avant que les élèves ne s'impliquent dans une tâche. Lors de la résolution de problèmes, la maîtresse lit le problème, certains enfants le reformulent, racontent l'histoire, puis essaient de mémoriser les nombres en jeu. Ils ne vont à leur place que lorsqu'ils savent exactement ce qu'il faut chercher. La recherche se fait le plus souvent individuellement dans un premier temps, puis par groupe si le problème est suffisamment « résistant ».
Toutes les séances décrites ici ont été suivies de séances intermédiaires non décrites mais qui ont fait l'objet d'explications complémentaires, d'exercices de consolidation ou de réinvestissement.

La séquence s'est étalée sur approximativement cinq semaines consécutives, d'où le plan qui décrit cinq séances.

II. Séance 1 : Découverte de l'album

La lecture est faite par la maîtresse dans l'espace de regroupement. Cette lecture s'est échelonnée sur plusieurs jours car il y a beaucoup de pages et d'idées différentes à exploiter. C'est souvent en fin d'après midi, en récompense d'un travail sérieux et silencieux qu'elle en lit trois ou quatre pages, laissant les autres pour le lendemain. La manière est traditionnelle : lecture et monstration des images.
Des questions concernant la compréhension générale sont posées par la maîtresse : « que se passait-il dans les pages précédentes ? Qui peut raconter, avec ses mots, la partie de l'histoire que je viens de lire ? »… Les élèves s'expriment et des reformulations en vue de la maîtrise de la langue française sont proposées et discutées collectivement. Lorsqu'une erreur de langue est faite, la maîtresse demande aux élèves leur avis et tranche si besoin est.
Puis elle pose des questions plus fines concernant la compréhension. Par exemple :
– Le narrateur dit « tout est problème ». Est-ce que ce sont des problèmes ? Les élèves répondent qu'il y a plusieurs questions, certaines sont faciles comme « Combien y a-t-il de minutes dans une heure ? » ; d'autres sont farfelues : « Combien de dents dans une bouche ? » ; « Quel est l'âge du conducteur ? » ; « À quoi vous fait penser cette tache d'encre ? », mais ce ne sont pas de « vrais problèmes ». Un débat est alors ouvert pour s'interroger sur ce qu'est un problème pour ces enfants de CM1/CM2.
– La maîtresse attire l'attention sur la syntaxe : « Qui parle ? Est-ce un garçon ou une fille ? ». Les élèves doivent tirer du texte des indications pour justifier leur réponse. Il s'agit d'une fille car il est écrit : « À quelle heure serai-je prête ? ».
– La page « Le dîner ne m'apporte aucun répit » est l'occasion de se poser des problèmes de logique :


Le dîner n'apporte aucun répit.
En passant la purée de pommes de terre,
Maman dit: "Tout ce que dit votre père est faux."
Papa se sert de purée et dit:
"Tout ce que dit votre mère est vrai."
Je m'accorde une minute de réflexion.
Si ce que dit Maman est vrai, ce que dit Papa est faux.
Mais si ce que dit Papa est faux, ce que dit Maman n'est pas vrai.
Et si ce que dit Maman n'est pas vrai, ce que dit Papa n'est pas faux.
Ce qui ne peut pas être vrai puisqu'il dit que ce que dit Maman
est vrai et qu'elle dit que ce qu'il dit est faux.

Où est la vérité?
J'y réfléchis. J'y pense un bon moment.
Et puis je pense qu'il est temps d'aller me coucher.

Il est clair qu'il y a ici une faute de raisonnement, mais l'objectif n'est pas d'utiliser ce texte tel quel car l'analyse logique dépasse les capacités d'élèves de fin de cycle 3. Cela se confirme quand le lecteur annonce dans l'album qu'il est temps d'aller se coucher !
Cet écrit a simplement permis d'introduire quelques problèmes de logique comme ceux de l'annexe 1.

III. Séance 2 : Produire des énoncés de problèmes

Objectif : rédiger un énoncé de problème correct du point de vue de la langue et qui puisse être résolu par les autres élèves. Réinvestir et utiliser ses connaissances sur les durées exprimées en heures, minutes et secondes.
Les élèves ont remarqué que l'album plutôt loufoque ne propose pas de « vrais problèmes » scolaires. C'est l'occasion pour la maîtresse de proposer un travail écrit de production d'un énoncé de problème. L'idée n'est donc pas fortuite : lors de la construction des séances, nous avions envisagé cette possibilité.

Description : la maîtresse a distribué aux élèves la photocopie de l'extrait de page suivant.

> Je me réveille à 7 h 15.
> Il me faut 10 minutes pour m'habiller,
> 15 minutes pour prendre mon petit déjeuner,
> et 1 minute pour me brosser les dents.
>
> SOUDAIN, C'EST UN PROBLÈME :
>
> 1. Sachant que mon bus part à 8 h 00, parviendrai-je à l'attraper ?
> 2. Combien y a-t-il de minutes en 1 heure ?
> 3. Combien de dents dans une bouche ?

Après lecture silencieuse et reformulation des élèves, elle demande de résoudre les deux premières questions. Cela est fait très rapidement. Quant à la troisième question, après discussion, on s'accorde à dire qu'on ne peut pas répondre car cela dépend de la dentition de chacun. Dans l'absolu, les élèves savent qu'adultes ils auront 32 dents, mais… De plus cette question n'a pas vraiment de rapport avec les précédentes.

Consigne : vous allez, modifier le texte de façon à ce que cela devienne un « vrai problème ». Dans un premier temps, sur une feuille blanche. Je choisirai quelques énoncés que nous retravaillerons la semaine prochaine.
En italique, dans la colonne de gauche,voici les textes de quelques groupes de trois élèves, les critiques et la reconstruction des énoncés qui ont été faites collectivement lors d'une séance intermédiaire. Dans la colonne de droite, en commentaires, nous avons résumé les débats et propositions qui ont émergé.

Énoncés produits par les élèves	Commentaires
Problème 1 *Je me réveille à 7 h 15. Je mets 2 min pour descendre les escaliers. Il me faut 10 min pour m'habiller et 3 min pour me coiffer. Je mets 15 min pour déjeuner, 1 min pour me brosser les dents. Mon bus met 5 min pour arriver à l'école.* *1. Sachant que mon bus part à 8 h 02, parviendrai-je à l'attraper ?* *2. Arriverai-je en retard ?*	La première question est jugée facile car il n'y pas de conversion à faire. La discussion porte ensuite sur la deuxième question : elle ne peut être résolue car il manque une donnée. Il s'agit de déterminer l'heure de fermeture de la grille. Les élèves se rendent compte que celle-ci ne peut pas être donnée au hasard pour que le problème puisse être cohérent. En outre, les données déterminent si la question peut être résolue facilement de tête ou par un calcul. Après concertation, ils proposent : « Arriverai-je en retard si la grille ferme à 8 h 32 ? »
Problème 2 : *Je me réveille à 7 h 15. Il me faut 10 min pour m'habiller, 15 min pour déjeuner, 1 min pour me brosser les dents et 5 min pour faire mon lit. Je mets 25 min pour descendre les marches et 40 min pour aller à l'école.* *Sachant que ça sonne à 8 h 13, arriverai-je avant la sonnerie ?*	La discussion porte sur la cohérence du problème. Une donnée gêne les élèves : « 25 min pour descendre les marches ». Ce n'est pas possible ! Un élève propose de rajouter 14 étages. Les autres rétorquent que c'est tout de même peu probable. Un autre élève propose : « mon pied pourrait être cassé ». La phrase devient donc : « l'ascenseur est en panne et j'ai très mal au pied, alors je mets 25 min pour descendre les 14 étages.
Problème 3 : *Je me lève à 7 h 15. Il me faut 5 min pour faire mon lit, 5 min pour me laver, 10 min pour m'habiller, 15 min pour prendre mon petit déjeuner, 1 min pour me brosser les dents, 2 min pour me coiffer, 12 secondes pour mettre mon bracelet, 2 min pour enfiler mon manteau, 2 min pour mettre mes chaussures, 2 min pour mettre mon cartable sur mon dos ? Je mets 10 min pour aller à l'école. La cloche sonne à 8 h 50.* *Est-ce que je vais être en retard ?*	Le problème est jugé plus complexe que les précédents car les élèves qui ont rédigé l'énoncé ont ajouté des secondes : « C'est plus compliqué les soustractions avec des minutes et des secondes » La maîtresse profite de cette réflexion pour proposer une autre question : « Si je suis en avance, peux-tu me dire de combien de temps ? » Tous les élèves en résolvant le problème se rendent compte de la difficulté effective des opérations nécessaires.
Problème 4 : *Je me réveille à 7 h 15. Il me faut 10 min pour m'habiller, 15 min pour prendre mon petit déjeuner et 1 min pour me brosser les dents.* *Mon bus part à 8 h, mais je dois apporter une leçon à 14 min d'ici, mais il l'a*	La réécriture de ce problème sera quasi totale. Elle porte moins sur les données numériques que sur la rédaction elle même. Tout d'abord, le narrateur passe du « je » au « il », puis il y a répétition de « mais » et de « donc » mal employés. Enfin le texte en lui-même n'est pas très cohérent.

justement oubliée chez lui au milieu du chemin. Donc il retourne chez lui. Il met 2 min à la trouver. Donc il y retourne et met 7 min à expliquer la leçon. Le deuxième passage du bus est à 8 h 16. *Prendra t-il ce bus ou le suivant ?*	Tout le monde s'approprie l'histoire et une élaboration collective est faite. La maîtresse veille au bon usage des connecteurs, à la syntaxe et à la grammaire. Les données numériques sont modifiées et les élèves introduisent des secondes comme dans le problème précédent. Puis le nouvel énoncé est donné à résoudre à tous.

Une trace écrite collective sera produite et écrite sur le cahier du jour. Elle concerne
- la maîtrise de la langue et les remarques faites dans la colonne Commentaires. (Non développé ici)
- la rédaction d'un problème de mathématiques :
  - L'énoncé doit être concis (les phrases ne doivent pas se répéter).
  - Toutes les données utiles pour répondre aux questions doivent figurer (il peut y en avoir qui sont inutiles).
  - Le changement d'unités rend souvent le problème plus compliqué.
  - L'énoncé doit être plausible (afin qu'on puisse contrôler la vraisemblance des résultats).
  - Les questions intermédiaires rendent le problème plus simple.

Rédiger des problèmes est une activité riche.
- Pour la maîtrise de la langue :
  - Les élèves prennent conscience de l'importance de la clarté de la rédaction et donc de la reformulation. La cohérence d'un récit, par notamment un meilleur usage des substituts et des connecteurs logiques, est largement abordée.
  - Les élèves se rendent compte que certaines formulations aident à la compréhension des questions. Ainsi certaines phrases peuvent permettre de résoudre une question, alors que d'autres phrases sont associées à d'autres questions ou permettent simplement la compréhension de l'histoire.
  - Enfin, les problèmes rédigés étant destinés à être résolus par des élèves d'une autre classe, les rédacteurs sont particulièrement sensibles à la correction de la grammaire et de l'orthographe.
- Pour la résolution de problèmes :
  - Les élèves qui ont écrit l'énoncé le comprennent aisément ainsi que les autres qui ont participé activement à son élaboration. Le problème a du sens.
  - Les élèves prennent conscience de l'impact des données numériques qui peuvent complexifier ou simplifier la ou les opérations à effectuer.
  - Tous les problèmes fabriqués appartiennent à une même classe et auront pour titre de référence « Le problème du départ à l'école ». Les élèves pourront s'en souvenir : il fait partie de la culture commune.

Conclusion à l'issue de cette séance

Le but recherché par l'enseignante était de faire produire des énoncés de problème, de travailler sur la maîtrise de la langue tout en exigeant que les problèmes produits soient résolus. Ce but a été atteint au-delà de toute espérance car les élèves ont trouvé

une réelle motivation à poser des problèmes comme l'auteur aurait pu le faire s'il avait voulu donner un aspect plus sérieux à son album.
Le travail sur la langue prend du sens dans un contexte. Et les élèves résolvent plus volontiers un problème qui vient d'eux qu'un problème donné par la maîtresse. Lors des échanges des problèmes, ils les prennent comme un défi lancé par leurs camarades et veulent le relever.

IV. Séance 3 : Résoudre un problème complexe : « le problème des chemises »

Objectifs : savoir lire et comprendre un problème complexe (différence entre contrainte et question) ; savoir le résoudre.

1. Présentation de la page et du problème en collectif oral

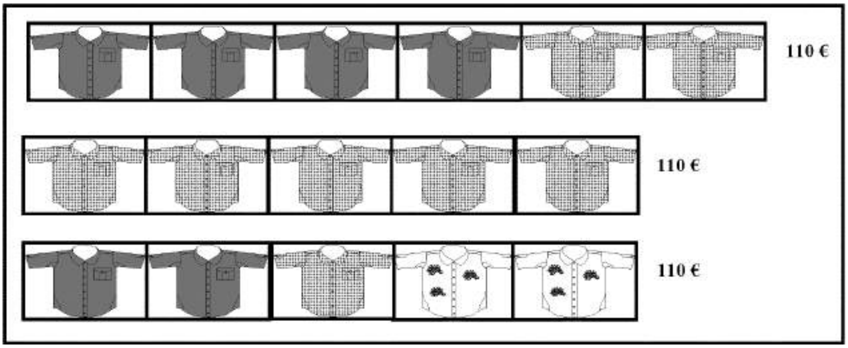
La maîtresse montre de nouveau la double page de l'album et lit l'histoire à partir de « J'ouvre mon armoire… » jusqu'à « Tout semble faire problème.»
D'un commun accord, les élèves trouvent les deux premières questions faciles. En revanche, ils ne peuvent pas répondre à la troisième. La maîtresse leur propose donc le problème suivant :

> Je décide de renouveler ma garde robe car je n'en peux plus de l'immonde chemise de l'oncle Zeno.
> Je casse ma tirelire. Elle contient 110 €.
> Le commerçant me dit :
> Avec l'argent que tu possèdes, tu peux acheter :
> - Quatre chemises vertes et deux chemises à carreaux.
> - Cinq chemises à carreaux.
> - Deux chemises vertes, une chemise à carreaux et deux chemises à fleurs.
>
> Oui, mais combien coûtent donc une chemise verte, une chemise à carreaux et une chemise à fleurs ?
> Je sens que je vais exploser.
> Le lecteur peut-t-il m'aider ?

Une reformulation rapide de l'énoncé du problème permet de s'assurer que les élèves ont compris tous les termes utilisés par les auteurs.
L'annexe 2 distribuée à chaque élève, propose un montage de la page photocopiée de l'album sur laquelle nous avons collé l'encadré précédent.

2. La recherche

Cinq minutes sont consacrées à la réflexion individuelle afin de s'approprier l'énoncé. Pendant ce temps, la maîtresse affiche au tableau la traduction **des contraintes dans l'ordre de l'énoncé**. (Elle a préparé par avance le panneau suivant sur une grande feuille bristol). Elle montre clairement aux élèves cet affichage.
Elle leur propose ensuite de travailler en groupes de trois élèves. Un rappel est fait sur le rôle de chacun dans le groupe : « Vous devez désigner un rapporteur, un secrétaire et un gardien du silence ». La recherche se poursuit de manière active.



Cet affichage respecte l'ordre des données de l'énoncé et ne « tue » pas le problème. En effet si la ligne des chemises à carreaux avait été affichée en premier, tous les élèves auraient commencé par cette contrainte et le problème aurait été résolu immédiatement.
Cependant, nous savons le problème complexe pour des élèves de cet âge qui n'ont encore jamais rencontré un tel énoncé. Nous nous attendons à ce que les élèves suivent le contrat didactique implicite qui veut qu'on traite en premier la première ligne, puis la seconde, puis la troisième. Ce qui rend impossible la résolution du problème.

Après une dizaine de minutes de recherche individuelle, pendant lesquelles la maîtresse a circulé entre les groupes et s'est rendue compte que peu arrivaient à démarrer, des aides sont apportées.
Dans un but de différenciation pédagogique, nous ne proposons pas le même type de matériel à tous les groupes.

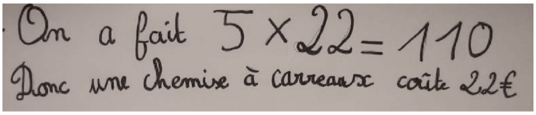
- Certains groupes disposent de trois enveloppes dans lesquelles sont mises les étiquettes des chemises correspondant aux trois contraintes (annexe 3). Sur les enveloppes ne figure que le prix total : 110 €.
  L'intérêt pour les élèves est la mobilité des enveloppes et des étiquettes qui peut permettre aux élèves de calculer en premier le prix des chemises à carreaux. (La mobilité des étiquettes rend possible le déplacement des contraintes : mettre la seconde contrainte en premier, mais certains élèves n'y pensent pas spontanément et se contentent de reproduire ce qu'ils voient en affichage au tableau.)
- À d'autres groupes d'élèves, la maîtresse suggère de faire des schémas avec des crayons de couleur.
- Les derniers groupes n'ont aucun matériel. Ce sont ceux avec qui la maîtresse avait engagé un débat et qui ont vaguement perçu que l'énoncé pouvait être lu autrement que de haut en bas.

3. Phase de synthèse

Après 15 à 20 minutes de recherche, les productions des élèves sont affichées au tableau, le rapporteur vient expliquer leur procédure et ce qu'ils ont trouvé. Nous

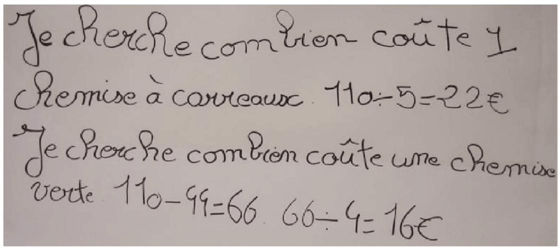
avons sélectionné deux groupes A et B dont les productions nous paraissent significatives.
Le groupe A n'a trouvé que le prix d'une chemise à carreaux en utilisant une multiplication à trous. Ce groupe n'a pas eu d'aide. Le problème n'est pas terminé dans le temps imparti d'une séance de mathématiques à l'école primaire. Il sera poursuivi le lendemain.

Groupe A



Le groupe B, qui a bénéficié de l'aide des étiquettes mobiles, a été plus loin dans sa recherche. Nous pouvons remarquer qu'il ne formule pas de phrase réponse après chaque opération mais qu'il utilise la division euclidienne. En effet, selon les I.O. de 2002, seule cette division était enseignée. Aujourd'hui, des élèves de fin de cycle 3 pourraient prolonger la division (car on divise 66 par 4) et obtenir le résultat décimal de 16 euros et 50 centimes qui est le prix d'une chemise verte.

Groupe B



Il est à remarquer qu'aucun groupe n'est laissé en échec grâce aux aides fournies. Tous ont pris en compte la deuxième contrainte et ont trouvé le prix d'une chemise à carreaux soit 22 €.
Tous les élèves se rendent comptent de l'importance des contraintes données. Il ne faut pas forcément les prendre dans l'ordre de l'énoncé. Cette idée est reprise et institutionnalisée par la maîtresse. Elle sera rédigée dans le cahier du jour.
Une autre séance sera nécessaire pour terminer le problème et pour que chaque élève rédige sa solution finale.

Deux problèmes de réinvestissement sont proposés dans une autre séance ultérieure. Ils ne sont pas proposés à tous les élèves, mais selon une différenciation. Ceux qui semblent avoir compris ont le problème 1, les autres cherchent le problème 2 qui permet une matérialisation par des objets.
En voici les énoncés :

Problème 1 : « Pour équiper un collège en matériel informatique, une entreprise expédie trois chargements de 300 kg chacun.

- Le premier chargement contient 15 ordinateurs et 30 chaises.
- Le deuxième contient 25 ordinateurs.
- Le troisième contient 10 ordinateurs, 20 chaises et 5 armoires.

Combien pèse un ordinateur, une table, une armoire ? »

Problème 2 : « On a acheté du matériel pour une classe : des feuilles de bristol, des crayons et des gommes.

- 2 feuilles et 3 crayons coûtent 70 centimes d'euro.
- 6 feuilles coûtent 30 centimes d'euro.
- 3 feuilles, 2 crayons et 4 gommes coûtent 95 centimes d'euro.

Combien coûte une feuille, un crayon, une gomme ?

Conclusion à l'issue de cette séance :
Le but recherché était de montrer aux élèves que, parfois, il est bon de lire un énoncé en entier et de ne pas systématiquement répondre à ce qui semble être une question dans l'ordre chronologique. Il a fallu rendre les élèves attentifs au fait que les contraintes ne sont pas des questions et qu'il ne s'agit pas de répondre en premier à la question « *combien coûtent quatre chemises vertes et deux chemises à carreaux* » **qui n'est pas posée**. Les élèves de cycle 3, peu vigilants et ayant peu rencontré cette subtilité, ont confondu question et contrainte. Nous avons de nouveau travaillé dans le domaine de la maîtrise de la langue française en soulignant qu'une question était suivie d'une ponctuation caractéristique : le point d'interrogation, alors qu'une information était suivie d'un point. Cela a donné lieu à une trace écrite dans le cahier du jour.
Le problème contextualisé grâce à la page de l'album a été mieux perçu par les élèves qui ont été plus motivés pour le résoudre que les problèmes de réinvestissement. Il y a certainement un « effet album » qui joue car les élèves ont perçu à la fois son aspect comique et les questions plus sérieuses qui peuvent émerger.
Nous n'avons pas la prétention de penser que des élèves de fin de cycle 3 pourront dorénavant résoudre des systèmes triangulaires de trois équations à trois inconnues.
Il est illusoire de croire

- que tous les élèves ont compris le problème ;
- qu'ils sont capables de réinvestir ces nouvelles connaissances dans d'autres problèmes du même type(1).

Cependant, c'est un premier pas et nous pouvons espérer que ces problèmes, où il faut lire tout le texte et mettre en ordre les différentes contraintes, ne les laisseront plus en échec complet.

V. Séance 4 : résoudre un autre problème complexe : « le problème des dinosaures »

Objectif : retravailler et consolider la compétence annoncée dans les textes officiels concernant la notion de multiples au travers d'un problème complexe.

1. Présentation de la page et du problème en collectif oral. (Annexe 4)

Dans un premier temps, en collectif, la maîtresse montre la double page de l'album et lit le texte à partir de « La matinée… » jusqu'à « 2 rangées ? »
Les élèves résolvent facilement les questions posées. Elle leur propose le problème suivant qui est, comme la première fois, rédigé sur une photocopie de la page de l'album. Chaque élève dispose de sa photocopie.

(1) Voir l'article « Séquences de résolution de problèmes complexes : quelles mises en œuvre » dans grand N n° 77.

La mise en œuvre suit un déroulement identique :

- 5 à 7 min d'appropriation individuelle et première recherche ;
- mise en groupes de niveau hétérogène et rappel de la situation (histoire) et de ce qu'il faut chercher (ce sont les élèves qui le disent) ;
- recherche à trois pendant 15 à 20 min, rédaction de l'affiche ;
- affichage des productions, commentaires des rapporteurs et débat collectif ;
- institutionnalisation par la maîtresse.

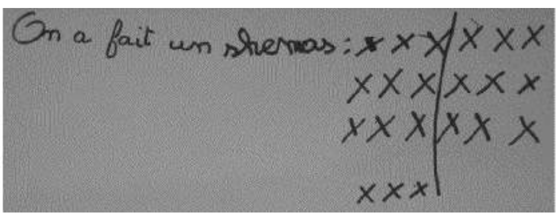
> Le problème des rangées me tourne la tête. Depuis ce matin, je range les petites voitures dans mon garage, j'aligne les capsules de bière de ma collection, j'ordonne en rangées les dinosaures de mon autre collection.
> J'ai remarqué que si je mets les dinosaures par rangées de 6, il en reste trois.
> Si je les place par rangées de cinq, il n'en reste pas.
> Et voilà que j'invente des problèmes maintenant !
> 1. Si je les mettais par rangées de trois, en resterait-il ?
> 2. Si je les mettais par rangées de deux, en resterait-il ?
> 3. Finalement, combien est-ce que je possède de dinosaures ? Je me souviens seulement que j'en ai un nombre inférieur à 50, mais proche de 50.
>
> La malédiction des maths m'est réellement tombée dessus !

2. Recherche

Il est demandé aux élèves de commencer par les deux premières questions et de ne répondre à la troisième que si les deux premières ont trouvé une solution. Nous verrons que cette consigne ne sera pas perçue par tous les groupes.
Nous avons pensé à préparer une cinquantaine de haricots dans des gobelets comme aide éventuelle, mais cela ne servira pas dans cette classe.

Remarque. Dans un premier temps, ces aides matérielles offrent souvent des difficultés supplémentaires aux élèves : il faut s'approprier le matériel, ce qui éloigne la pensée de la recherche, puis voir en quoi il est lié au problème, enfin, il offre souvent des motifs de distraction : on joue avec. Ce qui fait que les élèves en difficulté prennent du retard sur la résolution du problème. Cependant, l'aide matérielle est nécessaire à ces élèves qui ne peuvent pas démarrer tant qu'ils n'ont pas une représentation concrète du problème. Il faut donc que le maître prenne en compte l'aspect temporel dans son organisation.
Nous n'avons distribué aucun matériel aux élèves de cette classe car personne n'a paru en avoir besoin. Mais dans une autre classe, à un autre moment, ces aides semblent judicieuses.
Ci-dessous nous proposons les affiches de quatre groupes d'élèves.

Groupe A



Pour répondre à la première question, le groupe A schématise les dinosaures par des croix, même s'il ne conclut pas par écrit, on voit bien qu'il a compris et il sera capable d'expliquer oralement qu'il ne reste pas de dinosaures si on les met par groupes de trois. Les élèves du groupe expliquent très bien leur schéma qui convainc tous leurs camarades.
La maîtresse a choisi d'afficher la production de ce groupe car certains élèves ont encore besoin d'avoir une image mentale du problème. Elle insiste sur le fait que les croix donnent une idée de la résolution avec de « petits » nombres.

Groupe B

On sait que si l'on fait en 6 rangées, il en reste 3. Alors, en 3, il en reste forcément car : 3 est la moitié de 6. (3+3=6).

Le groupe B s'exprime mal : il dit « en 6 rangées » au lieu de rangées de 6. Néanmoins, si on interprète correctement ce que les élèves encore maladroits ont pu dire, ce groupe a un raisonnement élaboré car il met en évidence une propriété multiplicative qui sera exploitée par la maîtresse : « *3 est la moitié de 6*, on peut aussi dire que 6 est le double de 3 ».
Les élèves de la classe concluent que c'est « pareil » que le groupe A, mais qu'il y a des calculs. C'est donc plus mathématique !

Groupe C

6 6 6 6 3
faux
3+3+3+3+3+3+3+3+3
juste
1) Il n'~~est~~ en reste pas si on le fait par multiple de 3
2) si on fait avec 2 il en restera 1.

Le groupe C a un raisonnement additif : « 3 + 3 = 6 » pour la première question. Les élèves ont encore besoin de décomposition pour être sûrs que 6 est un multiple de 3. Ils ne donnent qu'une réponse sans justificatif pour la deuxième question, mais s'expliqueront lors du collectif oral (« dans 6, il y a 2 + 2 + 2 et dans 3, il y a 2 + 1 »).

Groupe D

On sait que en rangé de 5 il n'y en reste pas.
Donc c'est un nombre qui se termine par 0 ou 5.
Si je les rangeais par rangé de 3 il n'y en resterait aucun. Car 3 x ~~9~~ 15 = 45.
Si je les rangeais par rangé de 2 il y en resterait 1. Car 2 x 22 = 44 + 1 = 45

Le groupe D a d'abord cherché à répondre à la troisième question avant de répondre aux deux premières malgré nos consignes de départ. En fait, c'est assez malin et économique : un nombre proche de 50 et multiple de 5 ne peut être que 45, les autres phrases servent plutôt à vérifier.
Lors du collectif, la production de ce groupe a été mise en avant :

- Critique négative : ils n'ont pas respecté les consignes de la maîtresse.
- Critique positive : ils ont fait preuve d'initiative et d'astuce (un peu comme dans le « problème des chemises »).

Remarques :

- Nous nous sommes rendu compte que la notion en jeu fonctionnait de manière implicite chez ces élèves de CM2. La maîtresse a dû insister pour de nouveau donner du sens au mot **multiple**. Par un questionnement approprié, elle a su faire en sorte que les élèves le prononcent, l'utilisent dans des phrases, même si le schéma leur paraissait suffisamment clair.
- Étant donné que nous avions travaillé sur le « problème des chemises » assez longuement et mis en exergue le fait qu'il ne fallait pas toujours traiter les indications d'un problème dans l'ordre de lecture, le groupe D a mis en œuvre cette idée. Cependant, comme nous souhaitions, cette fois, que chacune des questions soit traitée dans l'ordre de numérotation, lors d'une séance ultérieure, un problème de réinvestissement sera donné en deux étapes :

Première étape : recherche du problème suivant :
« Nicolas reçoit des chocolats pour Pâques.
Quand il les range par paquets de 5, il ne lui en reste aucun.
Quand il les range par paquets de 12, il lui en reste 4 qu'il ne peut pas ranger.

1. S'il les mettait par paquets de 4, lui en resterait-il ?
2. S'il les mettait par paquets de 3, lui en resterait-il ? »

Deuxième étape : ajout d'une question supplémentaire.
Lorsque les deux questions ont été résolues, la maîtresse écrit au tableau la troisième : « Nicolas m'a dit qu'il avait moins de 100 chocolats, mais plus de 60 chocolats. Combien de chocolats a reçu Nicolas ? »

Conclusion à l'issue de cette séance :
Le but recherché : réviser et consolider la compétence concernant la notion de multiple a été atteint. Nous avons remarqué que si le vocabulaire avait du mal à émerger, le concept semblait compris pour la majorité des élèves. Ils ont encore beaucoup de difficultés à mettre en mots leurs raisonnements. Il est donc essentiel que des problèmes de ce type soient proposés tout au long de l'année afin que le vocabulaire fasse peu à peu partie intégrante des connaissances des élèves.
Les notions de multiples de 2, 5 et 10 complètent les connaissances des élèves sur la structuration arithmétique des entiers naturels. Il nous semble important de traiter ces problèmes en cycle 3 de l'école primaire car, au collège, d'autres problèmes arithmétiques plus complexes seront proposés dont ceux de proportionnalité.
Les programmes de 2002 (et 2007) ont réduit la connaissance de « multiples et de diviseurs » à celle de multiple. Le mot « diviseur » ne devant pas être utilisé en cycle

3 dans le sens « 5 est diviseur de 35 est une formulation équivalente à 35 est un multiple de 5 ». Cela rend les formulations ou reformulations assez complexes et les maîtres doivent en être conscients.

VI. Séance 5 : résoudre un troisième problème complexe : « le problème des tartelettes »

Objectifs : mettre en œuvre au travers de la résolution d'un problème les compétences suivantes : utiliser des fractions de dénominateurs 2 et 3 ; savoir les additionner ; savoir lire et comprendre un énoncé de problème complexe.

1. Présentation de la page et du problème en collectif oral. (Annexe 5)

La maîtresse montre de nouveau aux élèves la double page de l'album et lit celle de gauche : à partir de « Malheureusement pour moi » jusqu'à « que je croque 2 par 2 ». Les avis sont partagés pour répondre à la question 3, mais là n'est pas le problème de la maîtresse qui leur propose le problème suivant, rédigé sur une photocopie de la page de l'album.

> Je n'arrive plus à digérer les pizzas et les tartes. Je somnole en classe quand, tout à coup, me voilà propulsé dans un cauchemar.
> Il y a des tartelettes qui voltigent autour de moi. En les comptant le tournis augmente. Il y en a 20.
> Le boulanger me dit : tu vas les placer dans des boites. Bing, je reçois cinq boites sur la tête. Il y en a deux jaunes et trois vertes.
> Le boulanger continue : il faut utiliser toutes les boites et les boites d'une même couleur doivent contenir le même nombre de tartelettes. Tu peux, si tu veux, partager les tartelettes en deux ou en trois parts égales, mais pas plus.
> Je me mets au travail, mais j'hésite car il y a plusieurs façons.
> Tout ça augmente mon mal de cœur. Je vais vomir si tu ne m'aides pas…

Souhaits pédagogiques :
Outre l'organisation habituelle d'une séance de recherche rappelée au paragraphe V, nous voulions systématiser une attitude pédagogique en trois étapes :

- Phase d'action. Les élèves cherchent des solutions de façon non organisée. Nous avions souhaité qu'ils en trouvent « beaucoup ».
- Formulation des résultats par les élèves. La maîtresse observe et fait remarquer la pertinence des procédures.
- Vers la notion de preuve. L'objectif est méthodologique. Peut-on s'organiser pour trouver toutes les solutions ?

Le problème et ses contraintes :
Il a fallu un certain temps pour que les élèves s'imprègnent de toutes les contraintes. On a 2 boîtes jaunes et 3 boîtes vertes, 20 tartelettes. Il s'agit de prévoir la répartition de toutes les tartelettes dans les boîtes avec les contraintes suivantes :

- **On utilise toutes les boîtes.**
- **Les boîtes d'une même couleur contiennent le même nombre de tartelettes.**

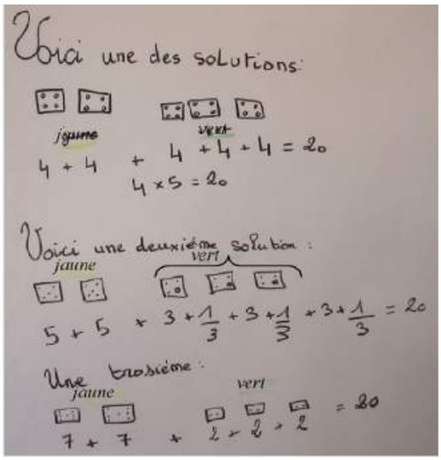
- **On peut partager les tartelettes en <u>deux ou en trois parts égales</u>.**

Remarque : les élèves doivent prendre conscience que dans les deux boîtes jaunes on peut mettre des tartelettes entières ou des demis, mais pas des tiers et que dans les trois boîtes vertes, on peut mettre des tartelettes entières ou des tiers, mais pas des demis.

Les aides :
Nous avons prévu des carrés (format A5) de couleurs jaune et vert découpés dans du bristol qui symbolisent les boîtes. Nous les avons plastifiés afin que les élèves puissent écrire avec des feutres effaçables. Cette idée s'est avérée utile car ils ont ainsi pu faire de nombreux essais.

Quelques groupes d'élèves se sont aussi aidés de dessins comme le groupe A. Ils ont encore besoin d'images très concrètes.

Groupe A

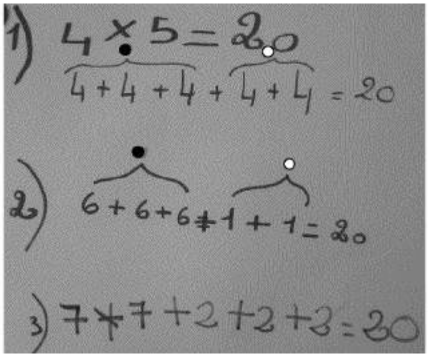


Les élèves ont écrit en jaune le mot « jaune » au-dessus de ces deux schémas.
Les élèves ont écrit en vert le mot « vert » au-dessus de ces schémas.

Nous pouvons remarquer que ce groupe a pensé à partager les tartelettes en trois parties égales pour les placer dans les boites vertes, mais n'a pas songé à faire des partages en deux parts égales pour les mettre dans les boites jaunes. Dans l'analyse a priori, nous avions au contraire imaginé qu'ils traiteraient plus facilement les demis que les tiers.

Ce problème possède 19 solutions parmi lesquelles trois donnent des valeurs entières. De nombreux élèves, comme le groupe B, ont d'abord trouvé celles-ci.
Les productions sont variables. Ainsi ceux qui font des dessins ont une assez bonne représentation du problème et sont capables de trouver une solution comportant des fractions (groupe A), d'autres ne voulant se limiter qu'aux calculs semblent bloqués et ne proposent que des solutions comportant des entiers.

Groupe B

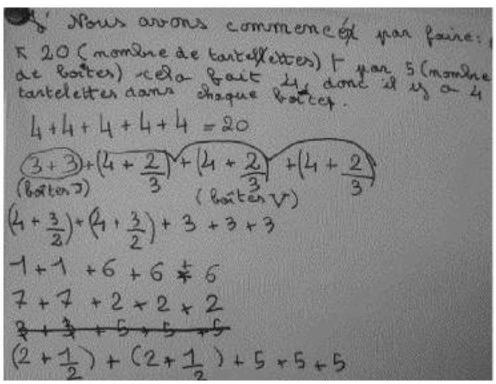


Les élèves ont placé un point vert • et un point jaune ◦ au dessus de leurs accolades.

Certains ont eu du mal à dépasser ce stade, mais une fois les tartelettes découpées virtuellement, le jeu les a motivés et ils ne voulaient plus s'arrêter. Le dispositif pédagogique des carrés verts et jaunes sur lesquels on peut écrire ou représenter les parts de tartelettes les a beaucoup aidés.

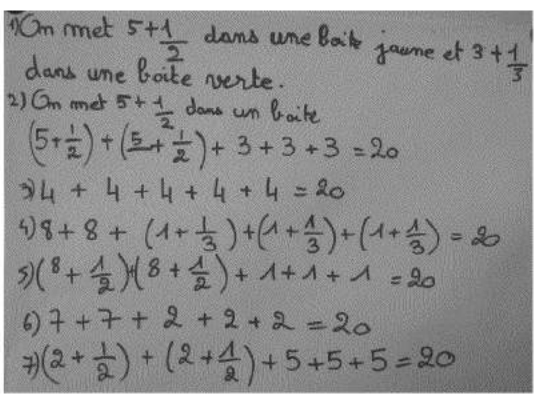
Ainsi, le groupe C trouve trois solutions supplémentaires avec des fractions.

Groupe C



La première solution du groupe D est originale, mais le total fait 21 au lieu de 20.

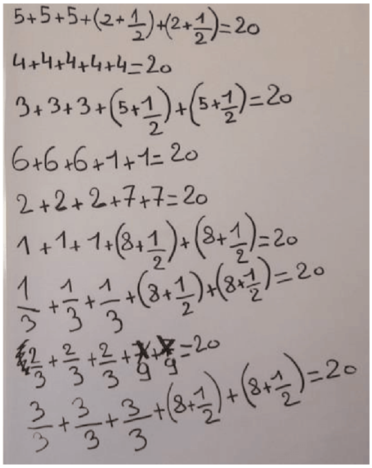
Groupe D



Cette non prise en compte d'une contrainte du problème est assez fréquente chez les élèves de cycle 3 (et même chez certains élèves de collège qui au bout d'un moment oublient les contraintes du problème.) Le rôle du maître est d'arrêter la recherche de temps en temps et de recadrer l'activité en rappelant ces contraintes. (Environ une fois toutes les dix minutes).
Nous pouvons tout de même remarquer que le groupe D trouve six solutions exactes.

Le groupe E montre déjà certaines performances dans le calcul des fractions. Une solution parmi les neuf trouvées est erronée en raison de la non prise en compte du nombre total des tartelettes.

Groupe E



Cette phase collective s'est terminée par une vérification des solutions trouvées : « Respectent-elles bien toutes les contraintes ? »
La séance s'est conclue sur une question : « Y a-t-il d'autres solutions ? Combien ? Comment faire pour les trouver toutes ? » et sur un projet : « La prochaine fois nous essayerons de répondre à ces questions. »

Lors de la séance suivante, la maîtresse a repris les solutions et a tenté de faire trouver une organisation possible afin de ne pas en oublier. Il s'agit d'un travail méthodologique adapté au cycle 3.
Le travail a pu être réalisé à partir de l'affiche du groupe E où l'on voit un début de recherche systématique à gauche de la feuille : 5, 4, 3, puis une rupture à cause du 6, puis de nouveau 2 et 1, avant le partage en tiers.
Une disposition sous forme de tableau nous a semblé pertinente car elle aide à la visualisation.

Boite verte	Boite verte	Boite verte	Boite jaune	Boite jaune	Total
$6+\frac{1}{3}$	$6+\frac{1}{3}$	$6+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	20
6	6	6	1	1	20
$5+\frac{2}{3}$	$5+\frac{2}{3}$	$5+\frac{2}{3}$	$1+\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2}$	20
Etc.	…	…	…	…	

Remarques :
Nous voulons attirer l'attention sur le retour au sens nécessaire. En effet, les élèves les plus en difficulté, même s'ils ont écrit l'égalité mathématique 2 + 2 + 2 + 7 + 7 = 20, **ont du mal à la formuler oralement** : « 2 tartelettes dans chacune des boites vertes et 7 tartelettes dans chacune des boites jaunes. », et **à la rédiger**.
Le problème des tartelettes peut être le prolongement de celui donné avec des jetons (dans l'énoncé, on remplace seulement le mot « tartelette » par le mot « jeton »). Les solutions sont alors entières. À notre avis, ce problème relève davantage du début du cycle 3.

Conclusion à l'issue de ces séances :

Ce problème a été l'aboutissement d'un travail préalable sur les fractions simples. Il s'inscrit dans la dynamique instaurée par les I.O. de 2002 (et 2007). Les fractions prennent encore plus de sens au travers de la résolution de problèmes. Les fractions utilisées ici ont des dénominateurs « simples » : ce sont des demis et des tiers.
Les élèves ont mieux intégré le concept difficile formulé de la manière suivante : « Pour prendre un tiers, il faut partager une unité en trois parties égales et prendre une part. Pour prendre deux tiers, il faut partager une unité en trois parties égales et prendre deux parts. Mais pour prendre trois demis, il faut partager deux unités en deux parties égales chacune et prendre trois parts. ». L'objectif fixé a donc été atteint. Cependant, il ne suffit pas de résoudre un seul problème pour annoncer que les élèves savent additionner et utiliser des fractions simples. D'autres exercices de réinvestissement doivent permettre de consolider la connaissance des fractions. Mais l'aspect ludique de ce problème permet des représentations mentales fortes et le rappel par la maîtresse de cette recherche permet une mémoire collective qui a du sens pour eux. Nous avons pu constater que les élèves se sont passionnés pour chercher des combinaisons linéaires convenables et que la cloche sonnant la récréation a amené des « déjà ! » montrant qu'ils n'avaient pas vu le temps passer. Nous en avons tiré une grande satisfaction : les maths ne sont pas si maudites que cela !

Conclusion générale :

L'entrée par l'album a eu une influence sur les élèves qui habituellement restent en retrait lors de problèmes de type plus standard. Dans ce monde magique de l'album et à l'instar d'Harry Potter, tous se sont sentis impliqués pour aider la fillette à surmonter les problèmes de maths. Les comportements ont évolué et, à la fin des séances, ils réclamaient de nouveaux problèmes associés aux pages de l'album. L'engouement non simulé a eu une incidence sur les apprentissages mathématiques qui ont pris du sens dans un contexte fort qui est devenu une référence pour la classe. Une fois brisée la malédiction des maths, nous avons vu qu'on peut résoudre n'importe quel problème en sachant que dans notre vie « *presque tout peut s'envisager comme un problème de mathématiques* ».

Bibliographie :

Roland Charnay, *Faut-il enseigner les mathématiques à tous les élèves ?*, Plot n° 8.
Roland Charnay, Mathématiques et problèmes (extraits de Pourquoi des mathématiques à l'école, ESF 1996).

Roland Charnay, *En mathématiques, l'utilisation des connaissances se manifeste à travers la résolution de problèmes*, SNUipp.
Jean Julo, *Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes*, Grand N nº 69.
Nicole Bonnet, *Mise en œuvre d'un problème pour chercher en CM2 : analyse et perspectives*, Grand N nº 77.
G. Geudte, G. Lepoche, *Séquences de résolution de problèmes complexes : quelle mise en œuvre ?*, Grand N nº 77.
François Boule, *Le rôle des problèmes dans l'enseignement des mathématiques*, IREM de Dijon.
Document d'Accompagnement des Programmes 2002 « Les problèmes pour chercher » ; www.eduscol.education.fr/prog
Rubrique « à signaler » de la revue Grand N nº 65, 1999-2000.

Annexe 1

Problèmes de logique niveau cycle 3

Problèmes qui se résolvent à l'aide d'un tableau de logique comme :

Mathieu, Elsa, Cédrick et Céline vont au supermarché pour acheter des jouets. Il y a des camions bleus et des rouges, une poupée et un walkman. On sait que :

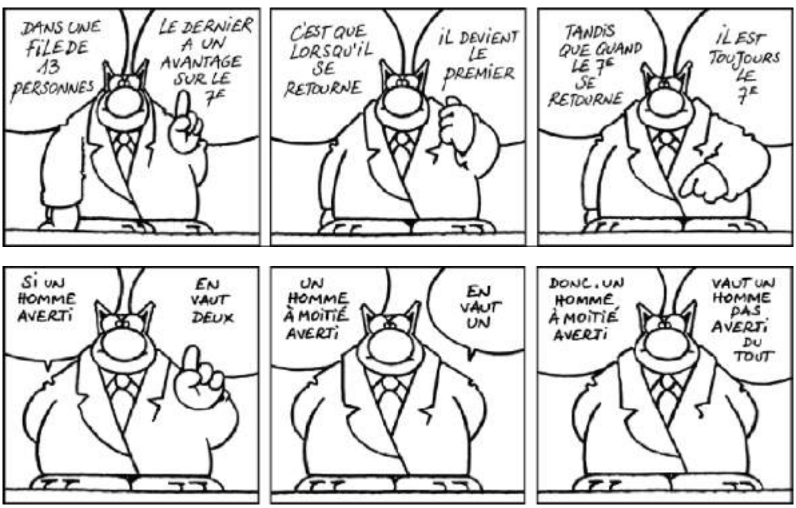
- Elsa n'aime pas la musique.
- Mathieu aime les camions mais pas la couleur rouge.
- Céline n'aime pas la couleur bleue.
- Cédrick préfère les jouets de garçon.

Retrouve le jouet de chaque enfant.

Ou bien des problèmes qui se résolvent dans le domaine numérique comme celui-ci.

Mon père a 3 fois mon âge. Mon grand-père a 2 fois l'âge de mon père. Au total, nous avons 100 ans.

Ou bien comme ceux -ci issus de «Le Chat » de Philippe Geluck :



Annexe 2

Je me réveille à 7h15. Il me faut 10 minutes pour m'habiller, 15 minutes pour prendre mon petit déjeuner et 1 minute pour me brosser les dents.

SOUDAIN, c'est un problème :

1. Sachant que mon bus part à 8h00, parviendrai-je à l'attraper ?
2. Combien y a-t-il de minutes dans 1 heure ?
3. Combien de dents dans 1 bouche ?

J'ouvre mon armoire et les problèmes se multiplient :

Je possède 1 chemise blanche, 3 chemises bleues, 3 chemises à rayures et l'immonde chemise à carreaux que m'a envoyée mon oncle Zeno.

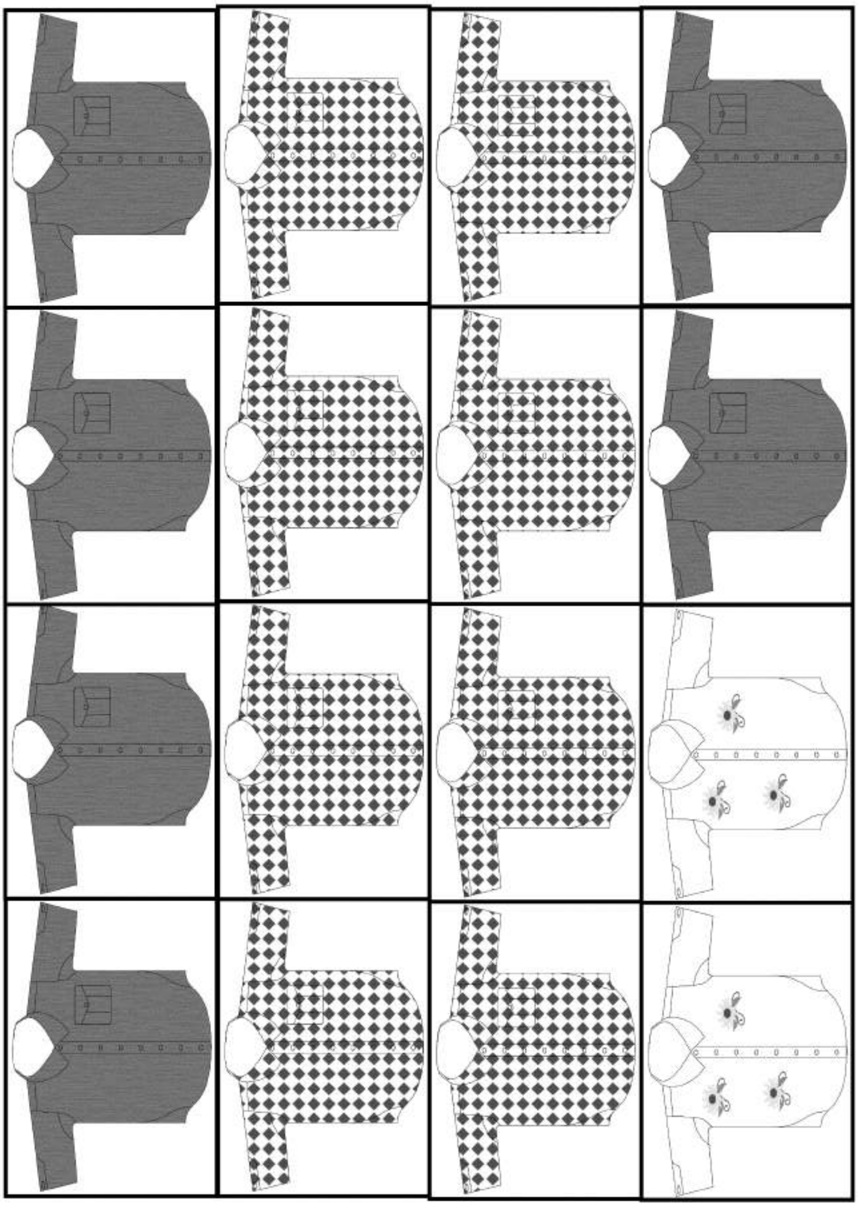
1. Combien ai-je de chemises en tout ?
2. Combien m'en resterait-il si je jetais cette immonde chemise à carreaux ?
3. Quand mon oncle Zeno cessera-t-il de m'envoyer des chemises aussi immondes ?

JE COMMENCE à m'inquiéter un peu.
Tout semble faire problème.

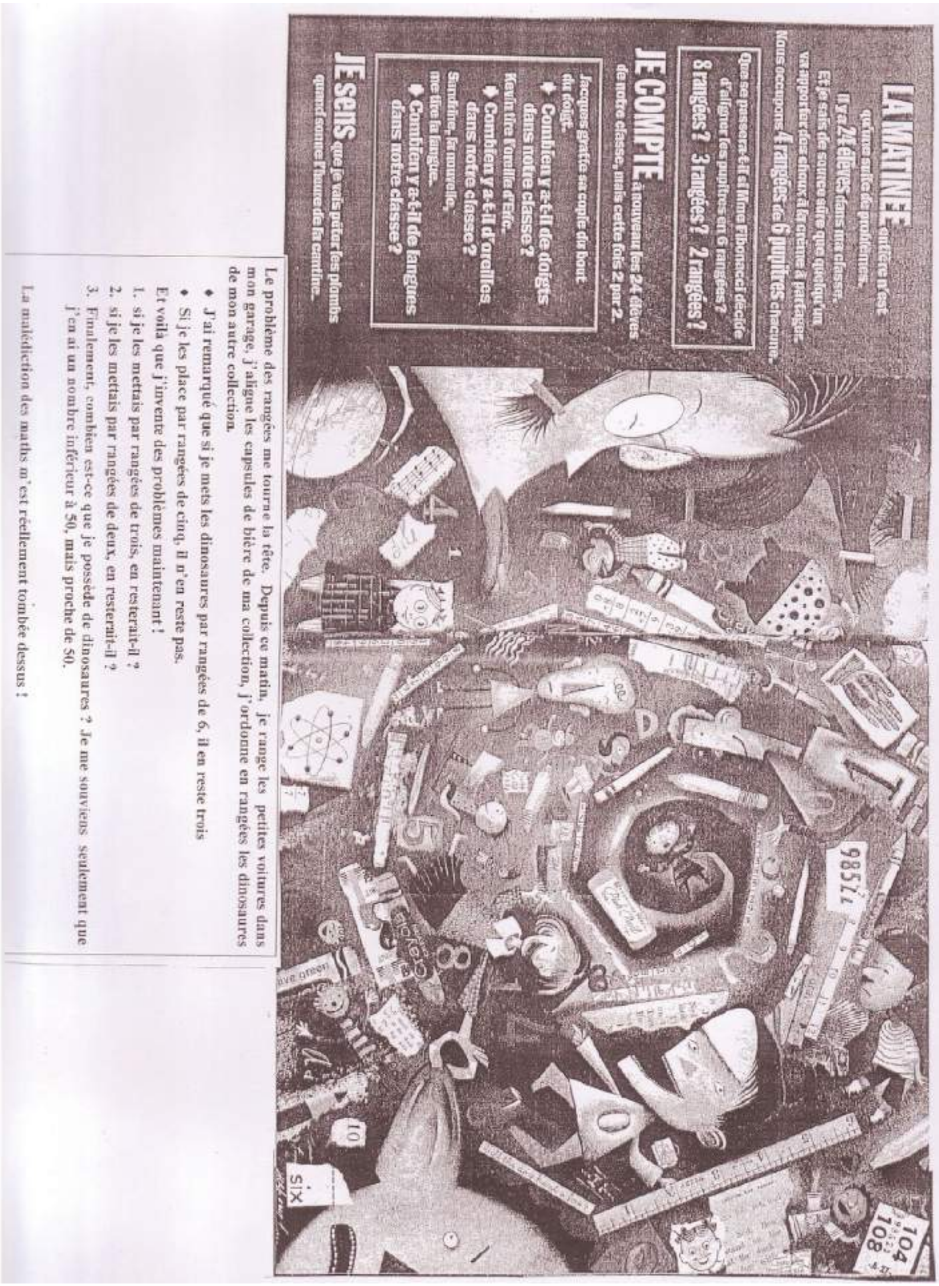
Je décide de renouveler ma garde robe car je n'en peux plus de l'immonde chemise de l'oncle Zeno.
Je casse ma tirelire. Elle contient 110 €
Le commerçant me dit :
Avec l'argent que tu possèdes, tu peux acheter
- Quatre chemises vertes et deux chemises à carreaux
- Cinq chemises à carreaux
- Deux chemises vertes, une chemise à carreaux et deux chemises à fleurs

Oui, mais combien coûtent donc une chemise verte, une chemise à carreaux et une chemise à fleurs ?
Je sens que je vais exploser.
Le lecteur peut-t-il m'aider ?

Annexe 3



Annexe 4



LA MATINEE entière n'est qu'une suite de problèmes.
Il y a **24 élèves** dans ma classe.
Et je sais de source sûre que quelqu'un va apporter des choux à la crème à partager.
Nous occupons **4 rangées** de **6 pupitres** chacune.

Que se passera-t-il si Mme Fibonacci décide d'aligner les pupitres en 6 rangées ?
8 rangées ? 3 rangées ? 2 rangées ?

JE COMPTE à nouveau les 24 élèves de notre classe, mais cette fois 2 par 2.

Jacques gratte sa copie du bout du doigt.
- **Combien y a-t-il de doigts dans notre classe ?**

Kevin tire l'oreille d'Eric.
- **Combien y a-t-il d'oreilles dans notre classe ?**

Sandrine, la nouvelle, me tire la langue.
- **Combien y a-t-il de langues dans notre classe ?**

JE SENS que je vais péter les plombs quand sonne l'heure de la cantine.

Le problème des rangées me tourne la tête. Depuis ce matin, je range les petites voitures dans mon garage, j'aligne les capsules de bière de ma collection, j'ordonne en rangées les dinosaures de mon autre collection.

- J'ai remarqué que si je mets les dinosaures par rangées de 6, il en reste trois
- Si je les place par rangées de cinq, il n'en reste pas.

Et voilà que j'invente des problèmes maintenant !

1. si je les mettais par rangées de trois, en resterait-il ?
2. si je les mettais par rangées de deux, en resterait-il ?
3. Finalement, combien est-ce que je possède de dinosaures ? Je me souviens seulement que j'en ai un nombre inférieur à 50, mais proche de 50.

La malédiction des maths m'est réellement tombée dessus !