À table !
– Au lycée ! … Au collège ! –(*)

Henri Bareil(**)

La revue MATHS-JEUNES de la S.B.P.M.ef a proposé dans son numéro 115 de janvier 2002 *le problème suivant appuyé sur la figure 1 ci-jointe :*

Déterminer les sets identiques pour qu'ainsi disposés sur une table circulaire ils la recouvrent au maximum.

En son numéro 117 d'avril 2007, MATHS-JEUNES propose une solution algébrique :

avec $AB = \frac{\ell}{2}$ et AC = h, on détermine h puis l'aire des sets, en fonction de ℓ.
En dérivant, on en déduit, à partir d'une équation bicarrée, ℓ puis h.

Cette solution se termine sans explication aucune par :

« On peut remarquer que $\widehat{COD} = 22°30'$ »

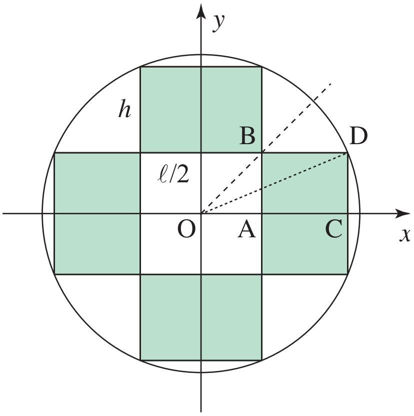

figure 1

CELA M'A DONNÉ ENVIE : – de m'intéresser à ce problème de sets de table en le généralisant au cas de n sets (identiques), – d'y dégager un « motif-clé », – de m'y adresser d'emblée au point D, – de développer à la fois des outils lycée et des outils collège.

I. UN PROBLÈME GÉNÉRAL

« Maths-jeunes » étudie le cas de 4 sets, mais on peut avoir le même type de configuration pour n naturel, $n > 2$, et même étendre au cas $n = 2$.

• SOPHIE suit, sur un logiciel, la variation du set pour n = 5 lorsque D parcourt $\overset{\frown}{VT}$ …

Configuration pour n = 2 :

(*) Cet article, terminé le jour de son anniversaire, est dédié à ma filleule Agnès trop tôt arrachée à notre affection peu après son succès au Capes de maths.
(**) Institut du Lauragais

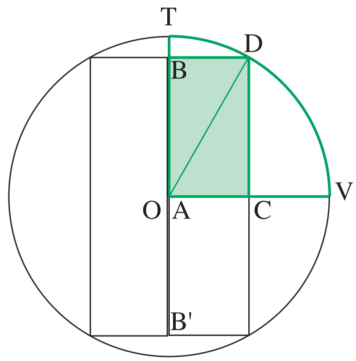

figure 2

• DAMIEN propose :

– DEUX EXEMPLES POUR $n = 3$:

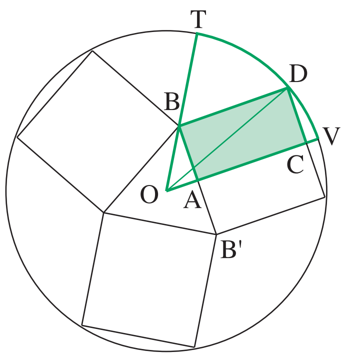

figure 3

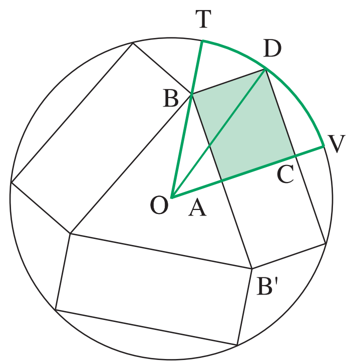

figure 3'

– DEUX EXEMPLES POUR $n = 6$:

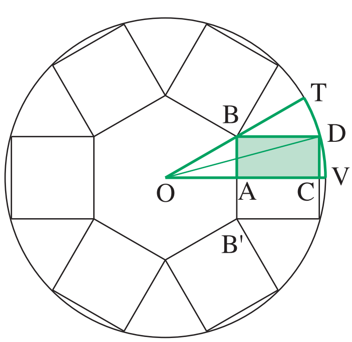

figure 4

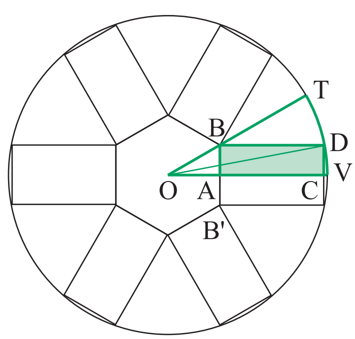

figure 4'

S'il y a n sets ($n \geq 2$), $\widehat{\mathrm{AOB}} = \dfrac{\pi}{n}$ (Posons $\widehat{\mathrm{AOB}} = \alpha$).

• Dans chacune des figures 2. 3. 4, **j'ai fait ressortir en vert un motif-clé. Il concerne un demi-set.**

Voici la configuration de ce motif-clé quelle que soit la valeur de n avec $\widehat{\mathrm{VOT}} = \dfrac{\pi}{n}$

et, comme $n \geq 2$, $\widehat{\mathrm{VOT}}$ est aigu ou droit :

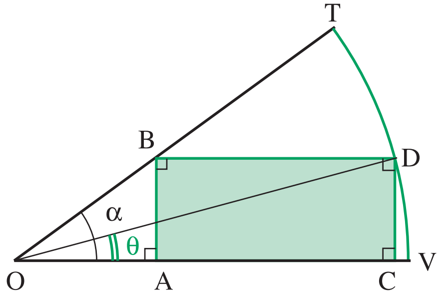

figure 5

> **Voici donc le problème de Maths-Jeunes généralisé :**
>
> Avec une table circulaire, *n donné (et* $\alpha = \dfrac{\pi}{n}$*),* D *pouvant varier sur l'arc* $\overset{\frown}{\mathrm{VT}}$*, comment le choisir pour que l'aire* S *du demi-set* ABDC *soit maximale ?*

1.1. MÉTHODE « LYCÉE » :

S = DC × DB.

Or, avec $\widehat{\mathrm{AOD}} = \theta$ et une table de rayon R, DC = R sin θ tandis que, dans le triangle OBD, $\dfrac{\mathrm{BD}}{\sin(\alpha-\theta)} = \dfrac{\mathrm{OD}}{\sin\widehat{\mathrm{OBD}}} = \dfrac{\mathrm{R}}{\sin\alpha}$, d'où $\mathrm{BD} = \dfrac{\mathrm{R}}{\sin\alpha}\sin(\alpha-\theta)$.

Donc $\mathrm{S} = \dfrac{\mathrm{R}^2}{\sin\alpha}\sin\theta\cdot\sin(\alpha-\theta)$.

$\dfrac{\mathrm{R}^2}{\sin\alpha}$ étant constant, *le maximum de* S *est celui du produit des deux sinus.*

Or $2\sin\theta\cdot\sin(\alpha-\theta) = \cos(\theta-\alpha+\theta)+\cos(\theta+\alpha-\theta)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad = \cos(2\theta-\alpha)+\cos(\alpha)$.

Le maximum est donc atteint pour $2\theta = \alpha$, c'est-à-dire pour (OD) bissectrice de $\widehat{\mathrm{VOT}}$, soit D le milieu de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{VT}}$:

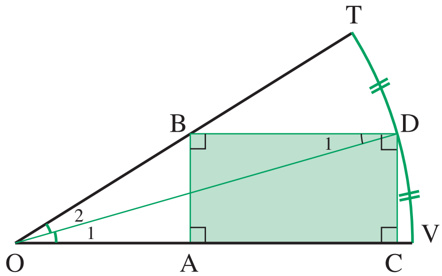

figure 6

Étude de cette configuration :

• Le parallélisme de (OA) et (BD) entraîne l'égalité $\widehat{O_1} = \widehat{D_1}$. Or $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$.

Le triangle BOD est donc isocèle de base OD :

$$\boxed{OB = BD}$$

• **Aire de ABDC :**

Avec le triangle ODC, $\boxed{DC = R \sin \frac{\alpha}{2}}$.

Avec le triangle isocèle BOD, $\boxed{BD = \dfrac{R}{2\cos\frac{\alpha}{2}}}$.

n donné, le set le plus grand possible a donc une aire $S' = 2\,DC \times BD = R^2 \tan\frac{\alpha}{2}$. Soit

$$\boxed{S' = R^2 \tan\frac{\pi}{2n}}$$

1.2. MÉTHODES « COLLÈGE » :

ÉTAPE 1 :

D intervient, avec DC et DB, de façon dissymétrique vis-à-vis des côtés de l'angle $\widehat{VOT}$. Comme D se déplace sur $\overset{\frown}{VT}$, remédions à cette dissymétrie.

a) Soit avec (DE) ⊥ (OB), [DE] « remplaçant » [DB]…

DE = DB sin α.

Donc

$$DC \times DB = DC \times DE \times \frac{1}{\sin\alpha}$$

et le maximum de DC × DB *correspond à celui de* DC × DE.

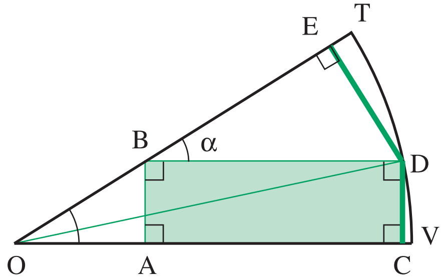

figure 7

b) Soit avec (DL) // (OB), [DL[« remplaçant » [DC]…
DC = DL sin α.
Donc
DC × DB = DB × DL × sin α
et le maximum de DC × DB correspond à celui de DB × DL.

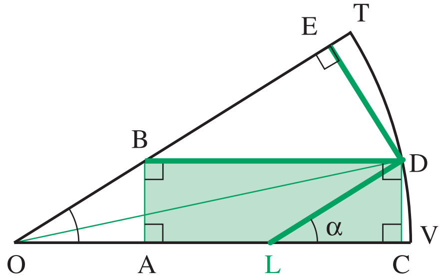

figure 8

Remarque pour a) et b) :
Il y a cohérence puisque DB × DL × $\sin^2 \alpha$ = DC × DE.

ÉTAPE 2 :

Avec nos « symétries » quant aux deux bras de D, sommes-nous pour autant plus avancés?
Nous le serions si D *se déplaçait sur le segment* [VT], *base du triangle* OVT.
En effet (Cf. Annexes I et I′), nous avons :
– avec le a), DE + DC = constante,
– avec le b), DB + DL = constante.
Et nous savons, Cf. Annexe II, que q*uand deux nombres ont une somme constante leur produit est maximal quand ces nombres sont égaux* (ou s'en approchent le plus possible).
Mais D *n'est pas sur* [VT] !
Pour contrer ma frustration et m'appuyer sur ce que je sais, *j'associe au point* D *qui se situe sur l'arc* $\overset{\frown}{\mathrm{VT}}$, *le point* D′ *où* (OD) *coupe* [VT].
Cf. les figures 9 et 10 ci-après :

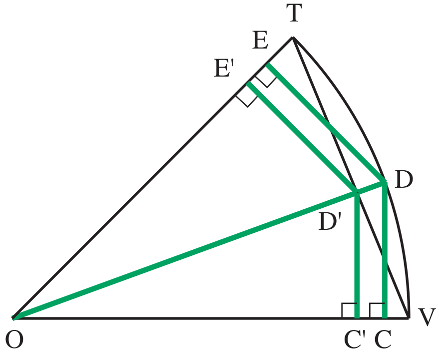

figure 9

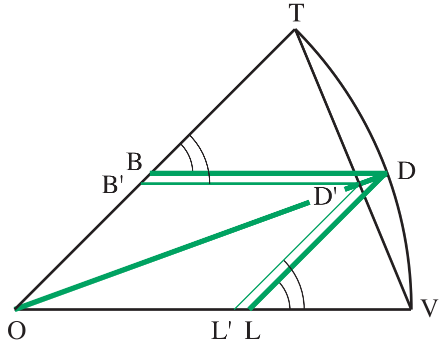

figure 10

Dans chacun de ces cas, le théorème de « Thalès-triangle » permet un « report » de D′ sur D : $\dfrac{DC}{D'C'} = \dfrac{OD}{OD'}$, etc. D'où

$$DC \times DE = D'C' \times D'E' \left(\frac{OD}{OD'}\right)^2 \quad \text{et} \quad DL \times DB = D'L' \times D'B' \left(\frac{OD}{OD'}\right)^2 .$$

Le maximum de $D'C' \times D'E'$ a lieu pour $D'C' = D'E'$ soit D′ milieu du segment [VT], c'est-à-dire $(OD') \perp (VT)$, donc OD′ minimum, ce qui déclenche aussi un maximum pour $\left(\frac{OD}{OD'}\right)^2$.

$DC \times DE$ *est donc alors, du fait de la conjugaison de deux maxima, lui-même maximum*.

Idem pour $DL \times DB$.

Donc, par l'une quelconque des deux voies a) et b), on retrouve le fait que l'aire du set est maximale pour (OD) bissectrice de $\widehat{VOT}$, soit D milieu de l'arc $\overset{\frown}{VT}$: c'était le résultat de la « méthode lycée ».

Comme précédemment on déduira, de (OD) bissectrice, l'égalité OB = BD.

I.3. UNE AUTRE MÉTHODE ENCORE :

Le rectangle ABDC et le parallélogramme OBDL ont des aires égales.
Celle de OBDL est le double de celle du triangle BOD.

Or, quand D varie sur l'arc de cercle $\overset{\frown}{VT}$, le triangle OBD a son côté OD constant, ainsi que son angle $\widehat{OBD}$ $(= \pi - \alpha)$. Il s'ensuit que, si on maintenait [OD] fixe, B se déplacerait sur un arc de cercle $\overset{\frown}{OD}$ (appelé « arc capable… ») avec un maximum de l'aire de OBD pour BOD isocèle de base [OD], donc quand le parallélogramme OBDL est un losange, donc (OD) bissectrice de $\widehat{VOT}$. Etc.

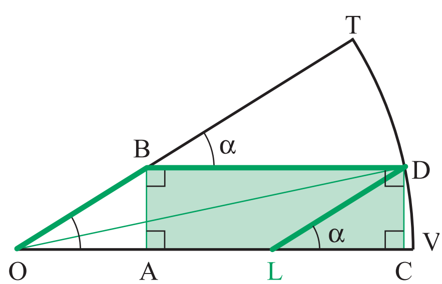

figure 11

REMARQUE SUR LES VOIES DES 1.2 ET 1.3 :
Ces voies ont l'avantage de mettre en jeu des méthodes générales, ici fécondes grâce à des propriétés, démontrées dans les Annexes, d'usage relativement fréquent (y compris en probabilités ou statistiques…). Il s'agit de « beaux » parcours…

II. PROPRIÉTÉS DES SETS MAXIMAUX

Nous avons vu que, pour n donné, il lui correspond un set maximal d'aire $R^2 \tan\frac{\pi}{2n}$.

En cette partie II, nous ne ferons intervenir, pour n donné, que les sets maximaux correspondants.

PREMIER PROBLÈME :

Existe-t-il une valeur de n (au moins une) et, si oui, laquelle (ou lesquelles) telle(s) que le set maximal soit un carré ?

MÉTHODE 1 :

BD = BB′
équivaut à OB = BB′, donc à OBB′ équilatéral,

soit $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Or $\alpha = \frac{\pi}{n}$.

Le set maximal est donc carré pour le cas de six sets, et seulement dans ce cas.

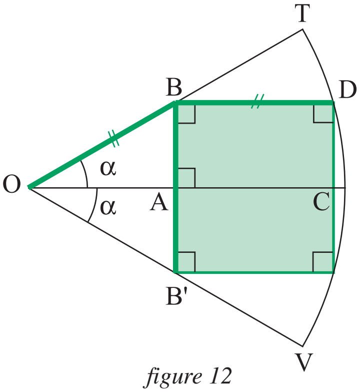

figure 12

MÉTHODE 2 :

DE = BD sin α (Cf. figure 7)
Le set est maximal si et seulement si DE = DC, soit DC = BD sin α.

Il est carré si et seulement si $\mathrm{DC} = \frac{1}{2}\mathrm{DB}$, donc $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. D'où $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Etc.

MÉTHODE 3 :

Le set est maximal si et seulement si

$$2\,\mathrm{R}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\mathrm{R}}{2\cos(\alpha/2)}$$

i.e. $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$,

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ (le cas $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, α obtus, étant exclu).

CONCLUSION :

Il existe donc un et un seul cas, celui de six sets, où les sets maximaux sont des carrés.

MAIS DAMIEN S'ÉTONNE :

– La figure 3, où $n = 3$, ne propose-t-elle pas un set carré ?
– Tu oublies, rétorque SOPHIE, que la conclusion précédente porte sur des sets maximaux. Celui de la figure 3 n'est pas « maximal ».
– Tu as raison.
  Mais, Sophie, peut-on toujours, pour n donné, trouver un set carré, maximal ou pas ?
– Bien sûr ! Vois l'ANNEXE 3 !

DEUXIÈME PROBLÈME :

Soit Σ la somme des aires des n sets identiques d'une même configuration lorsque ces sets ont l'aire maximale.

$$\boxed{\Sigma = n\,\mathrm{R}^2 \tan\frac{\pi}{2n}}$$

ÉTUDE DE LA SUITE AINSI OBTENUE

En voici les premiers termes, à partir de n = 2 :
2 R² ; 1,732 R² ; 1,657 R² ; 1,625 R² ; 1,607 R² ; 1,597 R² ; 1, 591 R² ; …
Que constate-t-on ? (…, diminution des différences, …)
Illustrer par un graphique…
Que prévoir pour la suite des valeurs de Σ ?

AU COLLÈGE

On s'en tiendra là, sauf à éliminer les valeurs peu réalistes (ainsi n = 90 qui donne 1,570 956 R² ou n = 180, qui donne 1,570 08… R²) qui, cependant, suggèrent bien une « limite » de la suite, égale à la moitié de l'aire de la table...

AU LYCÉE

1. La suite est-elle bien décroissante ?

Associons à notre suite la fonction qui, dans ℝ, *associe à x la valeur y telle que*

$$\boxed{y = x\tan\frac{\pi}{2x}}$$

et étudions, par sa dérivée, la variation de cette fonction.

$$y' = \tan\frac{\pi}{2x} + x\left(1+\tan^2\frac{\pi}{2x}\right)\left(-\frac{\pi}{x^2}\right),$$

soit, en posant $\tan\frac{\pi}{2x} = t$,

$$y' = t\left(1-\frac{\pi}{x}\times\frac{1+t^2}{2t}\right) = t\left(1-\frac{\pi/x}{\sin(\pi/x)}\right).$$

Or $\sin\frac{\pi}{x} < \frac{\pi}{x}$.

D'où $\dfrac{\pi/x}{\sin(\pi/x)} > 1.$
La dérivée est donc négative.
Donc une fonction et **une suite décroissantes**…

Plus il y a de sets (c'est-à-dire de convives), moins la table est protégée par eux !

2. Valeur limite ?

Quand $n \to +\infty$, $\dfrac{\pi}{2n}$ tend vers zéro et $\tan\dfrac{\pi}{2n}$ se comporte, en valeurs supérieures, comme $\dfrac{\pi}{2n}$. D'où la limite de la suite : $n\,\mathrm{R}^2 \times \dfrac{\pi}{2n}$, c'est-à-dire $\boxed{\dfrac{\pi\,\mathrm{R}^2}{2}}$, donc la moitié de l'aire de la table.

Variante proposée par Louis-Marie BONNEVAL :

1′. La suite est-elle bien décroissante ?

Posons pour tout x de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x}$, de sorte que : $\Sigma_n = \dfrac{\pi\,\mathrm{R}^2}{2} f\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

Alors $f'(x) = \dfrac{\dfrac{x}{\cos^2(x)} - \tan(x)}{x^2} = \dfrac{x - \sin(x)\cos(x)}{x^2\cos^2(x)} = \dfrac{2x - \sin(2x)}{2x^2\cos^2(x)} > 0$.

Donc f est croissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, ce qui implique la décroissance de la suite (Σ_n).

2′. Valeur limite ?

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{2n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \Sigma_n = \dfrac{\pi\,\mathrm{R}^2}{2}$.

TROISIÈME PROBLÈME :

Quand n augmente, que devient le polygone central délimité par les sets (à partir de $n = 3$) ?

Reportons-nous à la figure 6 et au résultat $\mathrm{OB} = \dfrac{\mathrm{R}}{2\cos(\alpha/2)}$

$$\mathrm{OB} = \frac{\mathrm{R}}{2\cos(\pi/2n)}.$$

Quand n augmente, $\dfrac{\pi}{2n}$ diminue et, $\dfrac{\pi}{2n}$ étant inférieur à $\dfrac{\pi}{2}$, cos $\dfrac{\pi}{2n}$ augmente, donc OB diminue.

Mais quand $n \to +\infty$, $\dfrac{\pi}{2n} \to 0$, cos $\dfrac{\pi}{2n} \to 1$ et OB $\to \dfrac{\mathrm{R}}{2}$.

Le polygone intérieur délimité par les sets aurait donc alors *ses sommets sur le cercle* (O, R/2) *et tendrait à se confondre avec lui, d'aire* $\dfrac{\pi R^2}{4}$.

Remarque : Il existe **entre les sets et le pourtour de la table, hors du polygone,** (cf. figures 1, 2, 3, 5 et 6) **une partie de la table non couverte**. Quand $n \to +\infty$, quelle est son aire? (Les limites des autres aires : sets, et polygone central, permettent de répondre … $\dfrac{\pi R^2}{4}$)

CONCLUSION DE CETTE MINI-ÉTUDE SUR LES SETS DE TABLE

Merci à eux pour nos promenades mathématiques élémentaires collège ou lycées ! Et merci à MATHS-JEUNES !

Henri BAREIL
en remerciant Louis-Marie Bonneval
et Christiane Zehren
pour leurs critiques constructives

ANNEXE 1

Un triangle isocèle OVT de base [VT], D′ variable sur [VF], … : Cf. figure 13.
La somme D′C′ + D′E′ est constante.

Parmi les nombreuses démonstrations possibles :
2 aire OD′V = D′C′ × OV,
2 aire OD′T = D′E′ × OT.
D'où 2 aire OVT = (D′C′ + D′E′) × OV.
D′C′ + D′E′ est donc constante, égale à la hauteur issue de V ou de T.

Remarque : Cela a une application classique au triangle équilatéral, avec la somme des distances aux côtés d'un point intérieur au triangle.

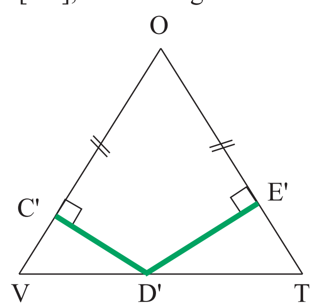

figure 13

ANNEXE 1′

Triangle isocèle OVT, … (Cf. figure 14), avec D′ variable sur [VT].

Alors D′B′ + D′L′ = B′T + B′O = OT.
D'où D′B′ + D′L′ constante,...
Extension aussi au triangle équilatéral.

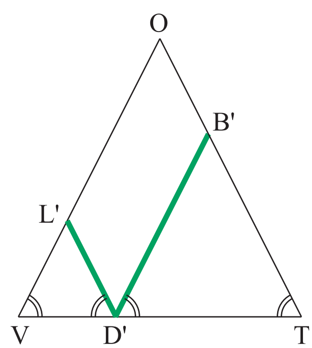

figure 14

ANNEXE 2

Théorème : *Quand deux nombres ont leur somme constante, leur produit est maximum quand ces nombres sont égaux (ou s'en approchent le plus possible).*

En voici une démonstration :

Soit $x + y = 2m$, constante.
$x = m - a$ implique $y = m + a$.
D'où $xy = m^2 - a^2$. Etc.

Remarque : La démonstration faite au §1.1 a fait apparaître un théorème voisin :

Quand deux angles ont leur somme constante (et inférieure à π) le produit de leurs sinus est maximum quand ces angles sont égaux.

ANNEXE 3

Problème : *Pour n donné, peut-on obtenir un set carré* (pas nécessairement maximal) ?

Référons-nous au § Il. Premier problème - Méthode 2.

Pour que le set soit carré, il faut et il suffit que $\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DC}} = 2$, soit $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DC}} = 2\sin\alpha$.

Il suffit de construire α en conséquence :
Soit, par exemple, un point d :
– à une distance arbitraire k de (OV),
– à la distance $k \times 2$ sin α de (OT).
d est défini par l'intersection de deux parallèles respectives à (OV) et (OT).
La droite (Od) est la droite (OD), D et d se correspondant par homothétie.