# Exercices de-ci, de-là

*Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.*

Serge Parpay

*Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer à :*

*Serge Parpay*
*22 rue Alphonse Rougier*
*79000 NIORT*

*ou par Mél à : jeanfromentin@wanadoo.fr*

## Exercices

### Exercice 474-1 (Raymond Raynaud - Digne)

Étant donné un triangle équilatéral ABC de hauteur $h$, on désigne par $f(\mathrm{M})$ la somme des distances d'un point M du plan aux droites (AB), (BC) et (CA).
Quel est le lieu des points M tels que $f(\mathrm{M})$ soit égale à une longueur donnée $l$ ?

### Exercice 474-2 (Georges Lion - Wallis)

Dans son intéressant article (Bulletin Vert n° 470), Éric Barbazo cite l'étude de la fonction $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{\dfrac{1}{x}}$ proposée en première partie du baccalauréat en 1911 à Lille, comme l'un des premiers exemples d'application du calcul des dérivées en conformité avec les programmes de 1902.
Comment au contraire trouver le minimum de ladite fonction sans avoir recours aux dérivées ?

### Exercice 474-3 (Alain Corre - Moulin)

La configuration de l'exercice 470-3 lui a rappelé l'exercice suivant :
Étant donné un triangle ABC, on place les points D, E et F respectivement sur les segments [BC], [CA] et [AB]. Les droites (AD), (BE) et (CF) se coupent en P, Q et R.
En notant $x$, $y$ et $z$ les rapports BD/BC, CE/CA et AF/AB, déterminer l'aire du triangle PQR en fonction de celle de ABC, de $x$, $y$ et $z$.

### Exercice 474-4 (Serge Parpay - Niort)

Petits exercices pour amateurs :

a) Trouver un entier de quatre chiffres, carré parfait, sachant que l'entier que l'on obtient en augmentant chacun des chiffres d'une unité est encore un carré parfait.

b) Trouver un entier de quatre chiffres, carré parfait, sachant que les deux chiffres de gauche sont égaux et que les deux chiffres de droite sont égaux.

*Arithmétique – Maillard et Millet – Terminale C 1954*

# Solutions

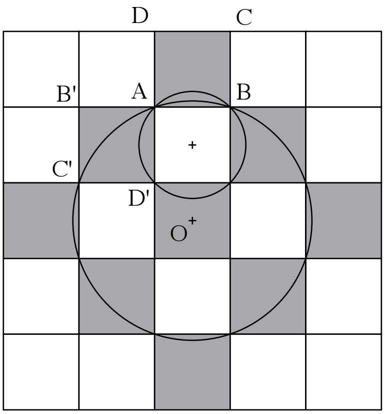
## Exercice 472-1 Olympiades suédoises (Supplément au Corol'aire n° 18)

Quelle est la circonférence du plus grand cercle que l'on peut tracer dans les carrés noirs d'un échiquier dont les carrés ont 4 cm de côté ?

***Solution de Raymond Raynaud (Dignes)***

Appelons cercles noirs les cercles visés par l'énoncé.
Il est évident que les cercles intérieurs à un carré noir ne sont pas les plus grands et que si un cercle noir coupe une ligne du quadrillage cela ne peut être qu'en un nœud.

Examinons donc les cercles noirs passant par un nœud A quelconque du quadrillage.
Ils ont tous un arc dans le carré noir ABCD.
Ils passent donc aussi par B, par C ou par D.
Ceux qui passent par B sont les deux cercles (ABD′) et (ABC′).
Ceux qui passent par D sont les symétriques des précédents par rapport à la droite (AC).
Ceux qui passent par C sont les cercles (ACB′) et (ACD′), qui sont symétriques par rapport à la droite (AC).
Les cercles noirs les plus grands sont les cercles du type (ABC′).




Leur rayon R est défini par $R^2 = 2^2 + 6^2 = 40$ : $R = 2\sqrt{10}$ .

Leur circonférence vaut $4\pi\sqrt{10}$ cm $\cong$ 40 cm.

***Autre solution :* René Manzoni (Le Havre)**.

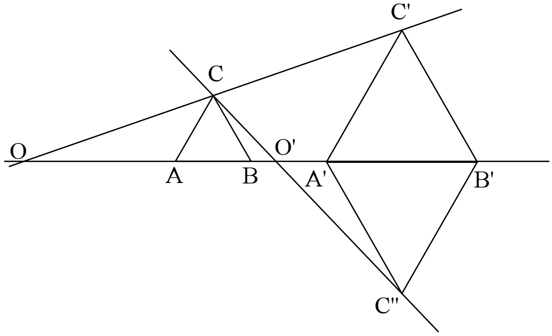
## Exercice 472-2 Petits exercices pour amateurs (Supplément au Corol'aire nº 23)

a) Soient quatre points alignés A, B, A′, B′, avec AB < A′B′. Construire le centre d'homothétie transformant [AB] en [A′B′].

b) Sur une droite, trois points A, B et C, le milieu I de [AB], le milieu J de [AC] et le milieu K de [BC]. Montrer que [CI] et [JK] ont même milieu.

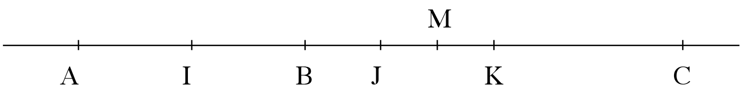
***Solution de Jean-Yves Le Cadre (Saint-Avé)*** *pour le a)*

Soient C, C′ et C″ les sommets des triangles équilatéraux construits sur [AB] et [A′B′]. Ces triangles sont homothétiques et les centres d'homothétie sont O et O′, points d'intersection de (AB) avec (CC′) et (CC″).




Remarque : s'il s'était agi d'un bipoint, un seul de ces centres convenait.

***Solution analytique de Raymond Raynaud (Digne)*** *pour le b)*
La droite étant munie d'un repère, désignons par $a$, $b$, $c$, $i$, $j$ et $k$ les abscisses respectives des points A, B, C, I, J et K.



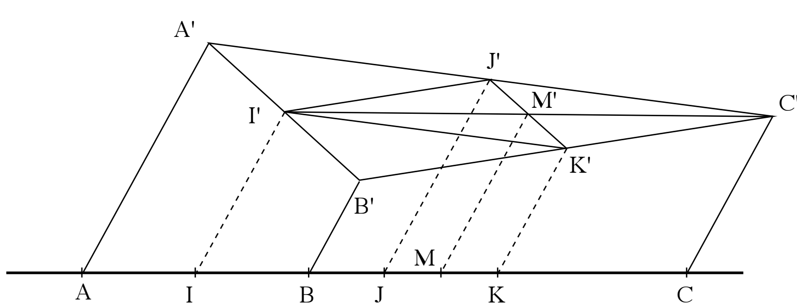

$i = \dfrac{a+b}{2}$, $j = \dfrac{a+c}{2}$, $k = \dfrac{b+c}{2}$.

Le milieu de [CI] a pour abscisse $\dfrac{c + \dfrac{a+b}{2}}{2} = \dfrac{a+b+2c}{4}$.

Le milieu de [JK] a pour abscisse $\dfrac{\dfrac{a+c}{2} + \dfrac{b+c}{2}}{2} = \dfrac{a+b+2c}{4}$.

Ces deux milieux sont confondus.

***Solution géométrique de René Manzoni (Le Havre)*** *pour le b)*




Une solution consiste à considérer les points A, B et C comme les projetés des sommets d'un triangle non aplati A′B′C′ situé dans un plan contenant la droite (AB). Les points I, J et K sont alors les projetés respectifs des milieux I′, J′ et K′ des segments [A′B′], [A′C′], [B′C′], et l'on sait que les diagonales [C′I′] et [J′K′] du parallélogramme C′J′I′K′ se coupent en leurs milieux.

### Exercice 472-3* (Serge Parpay – Niort, Corol'aire n° 61)

On désigne par E($x$) la partie entière du nombre fractionnaire $x$.

1) Si $x$ est une fraction irréductible, montrer que $x$ – E($x$) l'est aussi.

2) Montrer que l'on a $\mathrm{E}(x)+\mathrm{E}\left(x+\frac{1}{n}\right)+\ ...\ +\mathrm{E}\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\mathrm{E}(nx)$.

* Extrait du livre « Arithmétique, classe de mathématiques », Maillard et Millet (Hachette 1960).

***Solution de Jean-Claude Carréga (Lyon)***

On note $m=\mathrm{E}(x)$ et $p=\max\{i, 0\le i\le n-1, x+i/n<m+1\}$.

On a alors

$$\mathrm{E}(x)=\mathrm{E}(x+1/n)=\ldots=\mathrm{E}(x+p/n)=m$$

et

$$\mathrm{E}(x+(p+1)/n)=\ldots=\mathrm{E}(x+(n-1)/n)=m+1.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(x)+\mathrm{E}(x+1/n)+\ldots+\mathrm{E}(x+(n-1)/n)&=(p+1)m+(n-p-1)(m+1)\\&=nm+n-p-1.\end{aligned}$$

Donc pour établir que

$$\mathrm{E}(x)+\mathrm{E}(x+1/n)+\ldots+\mathrm{E}(x+(n-1)/n)=\mathrm{E}(nx),$$

il suffit de démontrer que

$$\mathrm{E}(nx)=nm+n-p-1$$

et cela signifie que

$$nm+n-p-1\le nx<nm+n-p.$$

Par définition de $p$, on a :

$$x+p/n<m+1\le x+(p+1)/n$$

et en multipliant par $n$ on obtient

$$nx+p<nm+n\le nx+p+1,$$

ce qui fournit la double inégalité cherchée :

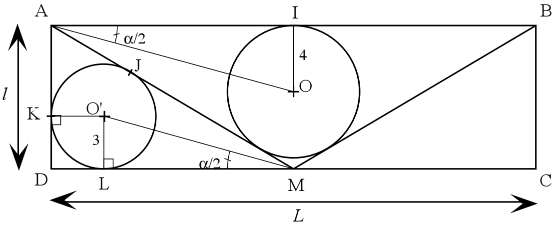
$$nm+n-p-1\le nx<nm+n-p.$$

***Autres solutions (reprenant la même méthode) : Olivier Ayanou (Cayenne), Robert Bourdon (Tourgeville), Marie-Louise Chaillout (Épinay sur Orge), Christian Dufis (Limoges), Jean-Yves Le Cadre (Saint-Avé), René Manzoni (Le Havre), Éric Oswald (Borgo), Christian Perroud (Habère-Lullin), André Stoll (Strasbourg).***

### Exercice 472-4 (Daniel Reisz – Auxerre)

Une unité de longueur étant choisie, on demande de déterminer les dimensions du rectangle ABCD. Le point M étant le milieu de [CD], on sait que les rayons des cercles inscrits aux triangles ABM et ADM mesurent respectivement 4 et 3.

***Solution d'Éric Oswald (Borgo)***



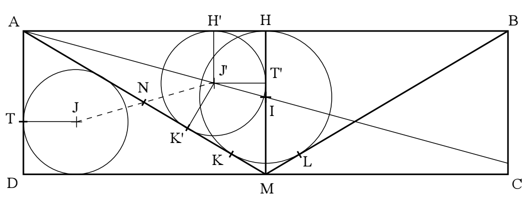

$AM = AJ + JM = AK + HM = (AD - KD) + HM = l - 3 + HM$.
$HM = DM - DH = DM - 3 = L/2 - 3$.
Donc $AM = l + L/2 - 6$.

Les angles alternes-internes $\widehat{AMD}$ et $\widehat{BAM}$ sont égaux. Soit $\alpha$ leur mesure commune.

O étant sur la bissectrice de $\widehat{BAM}$, on a $\widehat{OAB} = \dfrac{\alpha}{2}$ et $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{4}{AI} = \dfrac{4}{\frac{L}{2}} = \dfrac{8}{L}$.

D'autre part, O′ est sur la bissectrice de $\widehat{AMD}$, donc $\widehat{O'MH} = \dfrac{\alpha}{2}$ et $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{HM} = \dfrac{3}{\frac{L}{2} - 3} = \dfrac{6}{L-6}$. Donc $\dfrac{8}{L} = \dfrac{6}{L-6}$, soit $6L = 8L - 48$ ; $2L = 48$ et $L = 24$. Alors $AM = l + L/2 - 6 = l + 6$ et le théorème de Pythagore dans le triangle ADM donne : $AM^2 = DM^2 + AD^2 = 12^2 + l^2$. Donc $(l + 6)^2 = l^2 + 144$ d'où on déduit que $l = 9$.

***Solution de Raymond Raynaud (Digne)***




Introduisons le symétrique du cercle de centre J par rapport au centre N du rectangle AHMD.
Ce troisième cercle est le cercle inscrit dans le triangle AHM. Son centre est J′ et ses

points de contact sont T′, H′, K′.
Le quadrilatère HH′J′T′ est un carré. HT′ = 3 IT′ = 1.
Le triangle HAI est l'homothétique du triangle T′J′I dans le rapport 4.
HA = 3 × 4 = 12 ; d'où AB = 24.
Désignons par $x$ la mesure du segment MT′.
Le demi-périmètre du triangle AHM est $9 + x + 3 = 12 + x$.
Son aire est à la fois $(12 + x) \times 3$ et $6 \times (3 + x)$.
D'où l'on tire $x = 6$ et AD = 9.

***Un rappel de propriété par Serge Fabbian (Metz)***

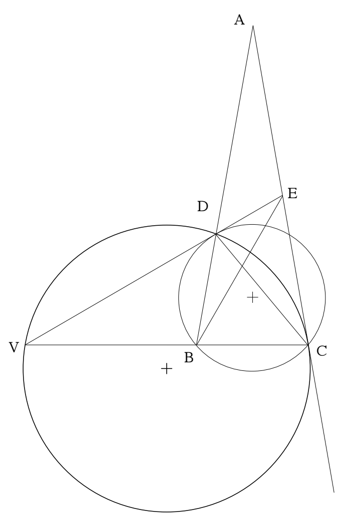
Soit ABC un triangle rectangle en A. O est le centre du cercle inscrit dans le triangle. K est la projection orthogonale de O sur l'hypoténuse. Montrer que

Aire (ABC) = KB × KC.

***Autres solutions : Serge Fabbian (Metz), Jean-Yves Le Cadre (Saint-Avé), Georges Lion (Wallis), René Manzoni (Le Havre), Éric Oswald (Borgo).***
***Solutions trigonométriques : Robert Bourdon (Tourgeville), Jean-Claude Carrega (Lyon), Christian Dufis (Limoges), Fabien Laurent (Provins), André Stoll (Strasbourg).***

## Exercice 473-1 (Michel Hébraud - Toulouse)

Au sujet de l'exercice 469-2 (Bulletin n° 472, page 776), Michel Hébraud proposait : « *Pour aiguiser la curiosité, compléter la figure en définissant l'intersection des droites* (DE) *et* (BC) *en* V. *Le quadrangle ainsi défini a des propriétés intéressantes. Mais il y a bien d'autres pistes…* ».




***Réponse de René Manzoni (Le Havre)***

L'angle $\widehat{BVD}$ vaut 30°, d'où VB = BE = EA.
Les triangles VCD et VDB sont semblables, d'où VC/VD = VD/VB, c'est-à-dire $VD^2 = BV \times VC$.
Cela prouve que la droite (VD) est tangente en D au cercle circonscrit au triangle DBC.
Les triangles EDC et ECV sont semblables, d'où ED/EC = EC/EV, c'est-à-dire $EC^2 = ED \times EV$.
Cela prouve que la droite (EC) est tangente en C au cercle circonscrit au triangle CDV.

## Exercice 473-2 (Denis Page - Bourg-en Bresse)

Déterminer les extremums de $\cos a + \cos b + \cos c$, $\sin a + \sin b + \sin c$ et $|e^{ia} + e^{ib} + e^{ic}|$ quand $a$, $b$ et $c$ sont les angles d'un triangle.

***Solution de l'auteur***

Soient SS la somme des sinus, SC la somme des cosinus et SE la somme des exponentielles.

1) $\mathrm{SS} = \sin a + \sin b + \sin c$ *avec* $a + b + c = \pi$

$$\mathrm{SS} = \sin a + 2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}$$

$$\mathrm{SS} = 2\cos\frac{a}{2}\left(\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{b-c}{2}\right) = 2\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{\pi-a}{2} + \cos\frac{b-c}{2}\right)$$

$$\mathrm{SS} = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{\pi-a+b-c}{4}\cos\frac{\pi-a-b+c}{4}$$

$$\mathrm{SS} = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

2) $\mathrm{SC} = \cos a + \cos b + \cos c$ *avec* $a + b + c = \pi$

$$\mathrm{SC} = \cos a + 2\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}$$

$$\mathrm{SC} = 1 - 2\sin\frac{a}{2}\left(\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{b-c}{2}\right) = 1 - 2\sin\frac{a}{2}\left(\cos\frac{\pi-a}{2} - \cos\frac{b-c}{2}\right)$$

$$\mathrm{SC} = 1 + 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{\pi-a-b+c}{4}\sin\frac{\pi-a+b-c}{4}$$

$$\mathrm{SC} = 1 + 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

3) $0 \leq a,\ b,\ c \leq \pi$ et $a + b + c = \pi$ impliquent $\mathrm{SS} \geq 0$ et $\mathrm{SC} \geq 1$.

4) $\mathrm{SS} = \sin a + 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b-c}{2} \leq \sin(a) + 2\cos\frac{a}{2} = \varphi(a)$

$$\mathrm{SC} = \cos a + 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b-c}{2} \leq \cos(a) + 2\sin\frac{a}{2} = \psi(a)$$

$$\varphi'(a) = \cos a - \sin\frac{a}{2} = \cos a - \cos\frac{\pi-a}{2}$$

$$\psi'(a) = -\sin a + \cos\frac{a}{2} = \cos a - \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

| $a$ | 0 | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'$ | | + | 0 | - | |
| $\varphi$ | 2 | $\nearrow$ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | $\searrow$ | 0 |

| $a$ | 0 | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\psi'$ | | + | 0 | - | |
| $\psi$ | 1 | $\nearrow$ | $\frac{3}{2}$ | $\searrow$ | 1 |

$\mathrm{SS} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $\mathrm{SC} \leq \frac{3}{2}$, valeurs obtenues quand $a = b = c = \pi/3$.

5) $\frac{1}{3}\mathrm{SS} = \frac{1}{3}\sin a + \frac{1}{3}\sin b + \frac{1}{3}\sin c \le \sin\frac{a+b+c}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ car le sinus est concave sur $[0,\pi]$. Donc $\mathrm{SS} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

6) $\frac{1}{3}\mathrm{SC} = \frac{1}{3}\cos a + \frac{1}{3}\cos b + \frac{1}{3}\cos c$. Or le cosinus est concave sur $[0,\pi/2]$ ; donc si $a,\ b,\ c \le \pi/2$, $\frac{1}{3}\mathrm{SC} \le \cos\frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{2}$, donc $\mathrm{SC} \le \frac{3}{2}$.

Si, par exemple, $a \ge \frac{\pi}{2}$, $b + c \le \frac{\pi}{2}$, $b$ et $c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors

$$\mathrm{SC} = \cos a + \cos b + \cos c \le \cos a + 2\cos\frac{b+c}{2}$$

car le cosinus est concave sur $[0,\pi/2]$.

$$\mathrm{SC} = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2} + 2\sin\frac{a}{2} = \frac{3}{2} - 2\left(\sin\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{3}{2}.$$

Donc $\mathrm{SC} \le \frac{3}{2}$ est vrai dans tous les cas.

7) $\mathrm{SE} = \left|e^{ia} + e^{ib} + e^{ic}\right| = \sqrt{\mathrm{SC}^2 + \mathrm{SS}^2}$,

$\mathrm{SE}^2 \le \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 9 \ \Rightarrow\ \mathrm{SE} \le 3.$

Cette valeur est atteinte lorsque $a = b = c = \pi/3$.
8) SS et SC, continues, ont un maximum sur le compact $[0,\pi] \times [0,\pi]$. Le maximum est atteint à l'intérieur, donc en un point où les dérivées partielles s'annulent. (FORMULE 26).
Le maximum est atteint quand $a = b = c$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{SC}}{\partial a} = -\sin a + \sin c \\ \dfrac{\partial \mathrm{SC}}{\partial b} = -\sin b + \sin c \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{SS}}{\partial a} = \cos a - \cos c \\ \dfrac{\partial \mathrm{SS}}{\partial b} = \cos b - \cos c \end{cases}$$

**Autres solutions : Richard Beczkowski (Chalon sur Saône), Robert Bourdon (Tourgeville), Jean Gounon (Chardonnay), René Manzoni (Le Havre), Raymond Raynaud (Dignes).**