Quelques interrogations à propos du « tableau de signes »

Dominique Gaud
pour l'équipe de l'IREM de Poitiers

On lit dans le programme de Seconde en vigueur à la rentrée 2000 :
Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction.
C'est la première fois que l'expression « tableau de signes » apparaît dans le libellé d'un programme.
Les difficultés des élèves, mises en évidence notamment par EVAPM, nous ont conduits à nous interroger sur le statut de cet objet « tableau de signes » et sur les mécanismes qui ont motivé son introduction dans l'enseignement secondaire. Ce travail(1), mené dans la cadre d'une recherche INRP-ADIREM(2), nous a amenés à une réflexion sur les écueils de la transposition didactique.

Étude de quelques présentations actuelles

Déclic, Hachette 2000, cours page 140.

Exemple

On veut étudier le signe de $\mathrm{P}(x) = -x\ (x + 1)(3 - x)$, *expression factorisée.*
On résout $-x\ (x + 1)(3 - x) = 0$.
$-x = 0$ *ou* $x + 1 = 0$ *ou* $3 - x = 0$.
$x = 0$ *ou* $x = -1$ *ou* $x = 3$.

x		-1		0		3	
$-x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$3-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$\mathrm{P}(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

On place ces valeurs dans l'ordre croissant sur la première ligne.
On étudie le signe de chaque facteur dans un tableau de signes.
On applique la règle des signes du produit pour obtenir la dernière ligne.

> ***Inéquations***
> *Pour résoudre une inéquation à une inconnue, on peut toujours se ramener à une comparaison à zéro.*
> *Ainsi résoudre une inéquation revient à étudier le signe d'une expression.*
> *Résoudre* $\mathrm{A}(x) \geq \mathrm{B}(x)$ *équivaut à résoudre* $\mathrm{A}(x) - \mathrm{B}(x) \geq 0$, *c'est-à-dire trouver pour quelles valeurs de* x *l'expression* $\mathrm{A}(x) - \mathrm{B}(x)$ *est positive ou nulle.*

Exemple

On veut résoudre l'inéquation $-x^2\ (3 - x) \geq 3x - x^2$ *d'inconnue* x.
On se ramène à une comparaison à zéro :

(1) coordonné par Maryse Cheymol, Dominique Gaud (dom.gaud@wanadoo.fr), Jean-Paul Guichard, Loïc Jussiaume, Claude Robin. Louis-Marie Bonneval a également contribué au présent article.
(2) *Faire des maths en classe ?* INRP-ADIREM, 2003. Il a aussi été le thème d'un atelier aux Journées de Clermont 2006.

$$-x^2\ (3 - x) - (3x - x^2) \geq 0.$$

On cherche une forme factorisée :

$$-x^2\ (3 - x) - x\ (3 - x) \geq 0.$$

Ici, on met $-x\ (3 - x)$ *en facteur :*

$$-\ x\ (3 - x)(x + 1) \geq 0.$$

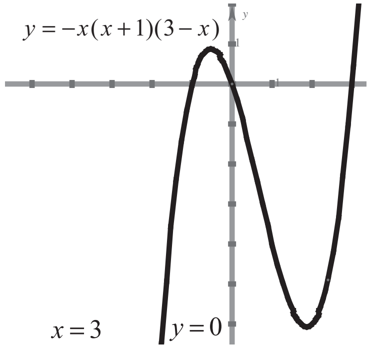
On retrouve le polynôme $\mathrm{P}(x)$ *précédent.*

Or d'après le tableau de signes précédent, on a :

$\mathrm{P}(x) \geq 0$ *lorsque* $x \in [-1\ ;\ 0]$ *ou* $x \in [3\ ;\ +\infty[$.

D'où l'ensemble solution :

$$\mathrm{S} = [-1\ ;\ 0] \cup [3\ ;\ +\infty[.$$



Commentaires

Au préalable, le signe du binôme a été étudié à partir de la représentation graphique des fonctions affines.

Le tableau de signes est introduit *a priori* comme technique pour déterminer le signe d'un produit. Ensuite il est utilisé en situation pour résoudre une inéquation.

La courbe suggère un éclairage graphique qui n'est pas expliqué, ce qui est d'autant plus regrettable que l'énoncé initial évoque plutôt la comparaison de deux fonctions

Pyramide, Hachette 2000, cours page 126.

3. Inéquations $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$, ... $(a \neq 0)$

En appliquant les transformations d'écritures décrites à la page précédente, l'inéquation $ax + b \geq 0$ *équivaut à :*

$ax \geq -b$ *et enfin à :* $x \geq -\dfrac{b}{a}$ *(si* $a > 0$*) ou* $x \leq -\dfrac{b}{a}$ *(si* $a < 0$*).*

Avec l'inéquation $ax + b \leq 0$*, nous trouverions :* $x \leq -\dfrac{b}{a}$ *(si* $a > 0$*)* ou $x \geq -\dfrac{b}{a}$ *(si* $a < 0$*).*

Pratiquement, on ne retient pas ces résultats, mais seulement la conséquence suivante :

À RETENIR (SIGNE DE $ax + b$***)***

a *et* b *fixés,* $a \neq 0$*. Lorsque* x *varie sur* $\mathbb{R}$*, l'expression* $ax + b$ *change de signe au point où elle s'annule :* $-\dfrac{b}{a}$.

Dégageons alors une méthode pratique pour étudier le signe de $ax + b$ *(doc. 10) :*

1. On cherche le point où $ax + b$ *s'annule.*

2. On regarde le signe de $ax + b$ *pour une valeur particulière de* x *(autre que* $-\dfrac{b}{a}$*).*

3. On consigne les résultats dans un tableau de signes.

Étudier le signe de $3x - 2$.

1) $3x - 2 = 0$ lorsque $x = \dfrac{2}{3}$.

2) On détermine le signe de $3x - 2$ pour une valeur quelconque de x (autre que $\dfrac{2}{3}$) ; pour $x = 0$, $3x - 2$ vaut -2 (donc $3x - 2 < 0$).

3) Conclusion

x	$-\infty$	$\dfrac{2}{3}$	$+\infty$
signe de $3x - 2$	$-$	0	$+$

Doc 10. Un exemple de mise en œuvre

4. Signe d'un produit, d'un quotient.

EXEMPLE :

Étudier le signe de $(x - 3)(1 - 5x)$.

On détermine séparément les signes de $(x - 3)$ *et de* $(1 - 5x)$, *puis on applique la règle des signes pour un produit. D'où le tableau :*

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		3		$+\infty$
signe de $(x - 3)$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(1 - 5x)$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $(x - 3)(1 - 5x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Commentaires

La résolution de l'inéquation du premier degré dans le cas général est donnée *a priori*. Cette résolution débouche sur une méthode pratique qui donne le signe du binôme en perdant de vue tout élément de justification (« on ne retient pas ces résultats »). Ensuite ce signe est résumé dans un tableau dont l'existence n'est pas motivée.

Le tableau de signes pour étudier le signe d'un produit est aussi donné *a priori*.

À ce moment de l'étude, aucun lien n'est fait entre l'algébrique, le fonctionnel et le graphique.

Delagrave 2000, page 153.

Application : *signe d'un produit de facteurs du premier degré.*

Soit à résoudre l'inéquation :

$$(3x - 6)(-2x + 1) > 0.$$

Utilisons un tableau de signes. On notera que la connaissance du sens de variation de la fonction $x \mapsto mx + p$ *et de la valeur de* x *qui annule* $mx + p$ *permet d'en connaître le signe sans résoudre l'inéquation.*

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$3x - 6$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x + 1$		$+$	0	$-$		$-$	
$(3x - 6)(-2x + 1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

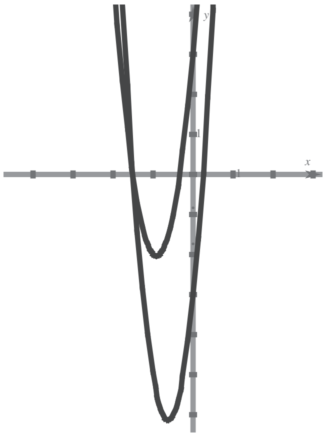
L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ 2\right[$.

Commentaires

Le signe du binôme est introduit par l'étude des variations de la fonction affine. L'étude du signe d'un produit apparaît comme application. Les aspects fonctionnel et algébrique sont imbriqués, mais le cadre graphique n'apparaît pas à ce niveau.

Ces mises en œuvre sont-elles en adéquation avec le programme ?

On constate que ces approches sont différentes. Certains semblent renoncer à justifier, à ce niveau, l'introduction des tableaux de signes, alors que les programmes demandent « ***de ne pas perdre de vue les justifications des techniques employées*** ». Certains manuels restent dans l'algébrique, certains passent dans le fonctionnel sans aller jusqu'à la vision graphique. Certains placent le tableau de signes dans les savoirs officiels (cours), d'autres dans les « savoirs qui en sont sans en être » : T.P., méthodes, activités, exercices résolus, … Dans ce deuxième cas, il risque d'apparaître comme marginal aux yeux des élèves alors que c'est l'outil principal dans les exercices.



Pour organiser entre les cadres fonctionnel, graphique et algébrique le va-et-vient recommandé par les programmes, l'IREM de Poitiers propose l'activité suivante :

Une calculatrice graphique affiche les courbes ci-contre pour représenter les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ *par :*
$f(x) = (2x + 3)(3x + 1)$ *et* $g(x) = (2x + 3)(4x - 1)$.
Comparer $f(x)$ *et* $g(x)$.

Commentaire
Le problème est formulé dans le cadre fonctionnel.
La donnée du graphique invite à établir le lien entre comparaison de $f(x)$ et $g(x)$ (relevant du cadre algébrique) et position relative des courbes de f et g (relevant du cadre graphique). De plus le choix de la fenêtre ne permet pas de conclure quant à la position des courbes, ce qui incite à une exploration à l'aide d'une calculatrice graphique pour émettre des conjectures.
Les coefficients choisis pour les binômes ne permettant pas de conjecturer les valeurs exactes des solutions de $f(x) = g(x)$, on est amené à une résolution algébrique.
L'expression factorisée ne comportant que deux facteurs, la résolution algébrique ne débouche pas obligatoirement sur la mise en place du tableau de signes mais peut inciter à un travail sur les connecteurs logiques « et » et « ou ». Le tableau de signes apparaît alors comme un moyen pratique (voire un changement de registres) pour résumer la résolution d'inéquations. On peut proposer ensuite d'autres situations où l'expression comportant au moins trois facteurs nécessite la mise en place du tableau de signes.

Origines du problème

La diversité des approches et les différentes conceptions qui les sous-tendent nous ont conduits à nous interroger sur l'étude du signe d'un polynôme :
– Pourquoi étudier le signe d'un polynôme ? Mathématiquement, à quoi cela sert-il ?
– Comment étudier le signe d'un polynôme ? Le tableau de signes est-il la seule technique possible ?
– Quelle importance doit-on accorder à la détermination du signe d'une expression et à la technique du tableau de signes ?
Pour trouver des éléments de réponses nous nous sommes posé d'autres questions :
– Historiquement, quand a-t-on étudié le signe d'un polynôme ? Dans quels buts ? Quelles étaient les techniques employées? Comment étaient-elles justifiées ?
– Quand l'étude du signe d'un polynôme est-elle apparue dans les programmes scolaires ? Pour résoudre quels types de problèmes ? Y avait-il des techniques préconisées ou imposées ? Y avait-il des justifications ? Quelle place cette étude avait-

elle au sein de l'organisation mathématique préconisée dans les programmes ou mise en œuvre dans les manuels ?
– Actuellement, pourquoi le cadre algébrique est-il souvent le cadre privilégié par rapport aux cadres fonctionnel et graphique ?

L'étude historique nous a amenés à balayer l'histoire de l'algèbre moderne. Cette étude fait apparaître que le signe d'un polynôme est un outil pour localiser les zéros voire les dénombrer. On est dans un contexte d'algèbre jusqu'à Bolzano et Cauchy (≈ 1820) nous semble-t-il. Ensuite l'analyse devient essentielle.

Girard, dans *Invention nouvelle en algèbre* (1629), étudie le nombre de solutions d'une équation algébrique, en distinguant les racines « vraies » (positives) des racines « fausses » (négatives ou imaginaires). Il énonce ce qui, avec d'Alembert puis Gauss, deviendra le théorème fondamental de l'algèbre : « *Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le démontre* ».

Descartes, dans *La Géométrie* (1637), s'intéresse lui aussi au nombre de solutions, à leur calcul (exact), et à leur construction géométrique. Il établit un lien entre le nombre de racines et le nombre de changements de signes des coefficients.

Rolle, dans son *Algèbre* (1690), remarque que les racines, que nous appelons maintenant réelles, d'un polynôme sont nécessairement séparées par celles du polynôme que l'on appelle maintenant polynôme dérivé, ces dernières par celles du polynôme dérivé second, et ainsi de suite (méthode dite des cascades).

L'Hospital, dans *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696), écrit : « *on conçoit aisément qu'une quantité qui diminue continuellement, ne peut devenir positive à négative sans passer par le zéro* ».

Lagrange s'est lui aussi fortement intéressé aux équations algébriques. Dans ses *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* (1772), il démontre que si P est un polynôme dont les coefficients sont les réels a_i, alors un zéro de P ne peut excéder $\max(1 + |a_i|)$. Dans son *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés* (1808), il expose sa méthode de substitutions successives, que nous appelons aujourd'hui résolution par dichotomie, fondée sur les **changements de signes** du polynôme dont ont cherche les zéros ; il a publié cette méthode auparavant puisque d'Alembert, Lacroix, Euler y font référence.

D'Alembert, dans l'article « approximation » de l'*Encyclopédie méthodique* (1784), écrit « *Si, en substituant dans une équation quelconque deux nombres différents à la place de l'inconnue, on obtient des résultats de signes contraires, l'une des valeurs de l'inconnue sera comprise entre les deux nombres substitués* ».
Suit une technique pour « *résoudre une équation quelconque, sinon rigoureusement, au moins par approximation* » : on recherche les racines multiples ; on recherche si l'équation n'a pas de facteur du premier degré à coefficients rationnels ; après simplification, il reste une équation dont les racines sont inégales et irrationnelles ou imaginaires ; on fait un tableau de valeurs pour étudier les **changements de signe**

de l'expression ; s'il n'en apparaît pas, il faut affiner, en changeant de variable ($x = \frac{y}{10}$). Et on recommence, ce qui donne une méthode d'approximation.

Lacroix[3], dans *Éléments d'Algèbre* (1797), après avoir étudié tous les cas où l'on peut trouver des solutions exactes aux équations, énonce, dans le paragraphe intitulé *Procédés pour approcher des racines d'une équation numérique*, le « principe » suivant, directement repris à d'Alembert : « *Lorsque l'on a trouvé deux quantités qui, substituées dans une équation à la place de l'inconnue, donnent deux résultats de signes contraires, on doit conclure qu'une des racines de l'équation proposée est comprise entre ces deux quantités et est par conséquent réelle* ».
C'est à ce propos qu'il introduit les signes < et > et explique leur emploi. L'explication donnée est de nature dynamique et utilise un « principe de continuité » qui n'est justifié que par des exemples. Il expose la méthode par dichotomie, due à Lagrange, qu'il combine avec une méthode infinitésimale due à Newton. Il reconnaît que la technique a des failles car la substitution par des valeurs entières peut laisser échapper certaines racines. Il en explique les raisons en mettant en avant les changements de signes des facteurs de l'expression polynomiale. Cela l'oblige à affiner sa technique : il faut que les valeurs substituées tombent entre les racines pour observer les changements de signes.

Euler dans son *Introduction à l'analyse infinitésimale* (1796) énonce : « *Si une fonction entière*[4] Z, *en faisant* $z = a$, *prend la valeur* A *et en faisant* $z = b$, *prend la valeur* B *; en mettant à la place de* z *des valeurs intermédiaires entre* a *et* b, *la fonction* Z *peut prendre toutes les valeurs intermédiaires qu'on voudra entre* A *et* B ».
Dans le chapitre « *De la recherche des facteurs trinômes* », Euler s'intéresse à la factorisation des expressions polynomiales. Les techniques sont algébriques et utilisent les nombres complexes.
Quand on ne sait pas calculer les valeurs exactes des racines, on cherche des méthodes d'approximation. Pour cela il faut localiser les racines et l'une des méthodes consiste à rechercher localement le signe de la quantité polynomiale par « balayage ». (On connaît depuis Girard le nombre possible de racines d'une équation et certaines méthodes, en particulier celle de Lagrange, permettent de déterminer un intervalle borné où elles figurent). Reste le problème des racines multiples, pour lequel il faut des techniques spécifiques.

Bolzano, dans un mémoire de 1817 au titre explicite (*Mémoire sur la démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine de l'équation*), franchit un pas décisif en définissant rigoureusement la continuité et en démontrant de façon purement analytique le théorème des valeurs intermédiaires.
Dans la préface, il explique : « *Dans la théorie des équations, il y a deux théorèmes dont on pouvait dire récemment encore que la démonstration entièrement correcte est*

(3) Lacroix est un auteur de manuels de mathématiques dont les ouvrages font référence au XIX^{e} siècle
(4) C'est-à-dire polynomiale.

inconnue. L'un est le suivant : il faut qu'il y ait toujours, entre deux valeurs quelconques de la grandeur inconnue qui donnent deux résultats de signes opposés, au moins une racine réelle de l'équation. Voici l'autre : toute fonction algébrique rationnelle entière d'une grandeur variable peut être décomposée en facteurs réels du premier et second degré. »
Il mentionne que si le deuxième théorème semble avoir été démontré par Gauss, peu de mathématiciens se sont intéressés au premier. Il réfute les démonstrations qui s'appuient sur la géométrie ou qui introduisent le mouvement et le temps, notions étrangères aux mathématiques. Il démontre ce qui jusque là était considéré comme intuitif : « toute grandeur variable peut passer d'un état positif à un état négatif seulement en traversant l'état de n'être rien ou celui d'être infinie ». Il en déduit : « *Si deux fonctions continues de x, $f(x)$ et $\phi(x)$ ont la propriété que pour $x = a$ on ait $f(a) < \phi(a)$ mais pour $x = b$, $f(b) > \phi(b)$ alors il doit toujours exister une certaine valeur intermédiaire entre a et b pour laquelle $f(x) = \phi(x)$* ».

Cauchy· dans ses *Cours à l'école polytechnique* (1821), aborde la problématique de la **variation des fonctions**, qui semble être restée étrangère aux fondateurs et aux premiers utilisateurs du calcul infinitésimal. Elle ne figure en effet ni dans l'œuvre de Newton, ni dans celle de Leibniz, et apparemment pas dans celle d'Euler. Elle ne figure pas non plus dans les « *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* » de Lazare Carnot (1797) qui récapitule les différentes problématiques dont traite le « calcul » (différentiel et intégral) et fait l'inventaire comparé des méthodes concurrentes.

Sturm, dans son *Mémoire sur la résolution des équations numériques* (1835) écrit : « *La résolution des équations numériques est une question qui n'a cessé d'occuper les géomètres, depuis l'origine de l'algèbre jusqu'à nos jours. Lagrange, le premier, a donné pour cet objet une méthode rigoureuse (…). Mais, dans l'application, la longueur des calculs (…) la rend presque impraticable. Le théorème dont le développement est l'objet de ce mémoire (…) fournit un moyen très sûr de connaître combien une équation a de racines réelles comprises entre deux nombres quelconques ; cette connaissance suffit pour conduire à la détermination effective de toutes les racines réelles.* »
Pour déterminer le nombre de racines réelles d'une équation polynomiale $\mathrm{P}(x) = 0$ dans un intervalle donné $[a ; b]$, il applique l'algorithme d'Euclide à P et P′ : posant $\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}$, $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}'$ puis P_{n+2} = reste de la division de P_{n+1} par P_n, il obtient une suite finie de polynômes de degrés décroissants. Notant $w(x)$ le nombre de changements de signes de la suite $(\mathrm{P}_n(x))$, il démontre que le nombre de racines entre a et b est égal à $|w(a) - w(b)|$.
Cette méthode, plus simple et plus sûre que les méthodes antérieures, lui assure immédiatement la célébrité. Elle est aujourd'hui à la base des algorithmes informatiques de résolution des équations algébriques.

Ce survol montre que le problème de la résolution des équations a glissé progressivement du domaine de l'algèbre vers celui de l'analyse, ouvrant le champ des équations non algébriques et obligeant les mathématiciens du XIX^{e} siècle à préciser

les notions de fonction, de continuité et de nombre réel. Dans cette recherche longue et difficile, le théorème des valeurs intermédiaires apparaît comme une étape cruciale. Il montre – outre la continuité – le rôle du **changement de signe** dans l'existence d'une solution. Quant à l'unicité éventuelle de cette solution, son étude fait intervenir la notion de **sens de variation**.
D'autres grands mathématiciens (Laplace, Legendre, Fourier, Gauss, …) ont travaillé sur les équations algébriques (et donc sur le lien entre recherche des zéros, factorisation d'un polynôme, signe d'un polynôme), dont la théorie a aussi connu des développements purement algébriques (Abel, Galois, …).
Cette évolution des mathématiques a aussi été stimulée par les besoins de la physique. Savoir si deux grandeurs varient dans le même sens ou en sens inverses, déterminer les renversements de sens et donc les extremums, sont des questions essentielles pour le physicien. Par exemple, **Poincaré**, dans le cadre des équations différentielles ou aux dérivées partielles (petites oscillations des corps, stabilité du système solaire, mouvement des fluides, diffusion de la chaleur) a montré l'intérêt d'une étude qualitative des fonctions.

Naissance d'une tradition didactique

La partie historique a mis en évidence que le savoir savant du XVIII^{e} et du début du XIX^{e} siècle ne faisait guère de place à l'étude du signe d'une expression algébrique. Seuls les changements de signe des expressions, repérés par de banals tests numériques, étaient objet d'intérêt, d'abord comme révélateurs de l'existence d'un zéro de l'expression, ensuite comme outils dans des processus dichotomiques pour trouver des valeurs approchées de ces zéros.
La question se pose donc de comprendre ce qui a motivé au niveau de l'enseignement l'étude systématique du signe d'une expression algébrique, le choix des techniques proposées aux élèves pour cette étude, les types de problèmes traités, leurs variations dans le temps.

C'est dans les programmes de 1891 que le signe d'une expression algébrique apparaît explicitement comme un objet d'enseignement :

Classe de troisième
Inégalités(5) *numériques du premier degré à une inconnue.*
Classe de seconde
Équations du deuxième degré à une inconnue.
Inégalité du second degré à une inconnue.
Classe de première
Représentation d'une fonction par une courbe – notion de dérivée –. La dérivée est le coefficient angulaire de la tangente.

Variation des fonctions suivantes : $y = ax^2 + bx + c$, $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$.

(5) Le mot *inéquation* semble avoir été introduit assez tard en mathématiques. Il ne figure pas dans l'encyclopédie de D'Alembert. Il n'apparaît dans les programmes que dans le courant du XX^{e} siècle.

Pour cette dernière fonction, on se bornera à des exemples numériques.
Remarque : En vue de la variation des fonctions précédentes, il suffira de faire connaître la dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient.

Ce programme est repris et complété dans celui de la grande réforme de 1902 :

Classe de seconde C et D
Variation de l'expression $ax + b$; représentation graphique.
Équation du second degré à une inconnue.
Nature et signe des racines – Étude du trinôme du second degré. Changements de signe. Inégalités du second degré. Variation du trinôme du second degré ; représentation graphique.

Variation de l'expression $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, *représentation graphique.*

Notion de dérivée ; signification géométrique de la dérivée – le sens de variation est indiqué par le signe de la dérivée – applications à des exemples numériques simples.
Classe de mathématiques
Variations et représentations graphiques des fonctions :

$$y=ax^2+bx+c,\quad y=\frac{ax+b}{cx+d},\quad y=\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f},\quad y=ax^4+bx^2+c.$$

Notion de dérivée. Signification géométrique (coefficient angulaire de la tangente) et cinématique (vitesse dans le mouvement rectiligne) de la dérivée ; le sens de variation d'une fonction est indiqué par le signe de la dérivée. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de la racine carrée d'une fonction, de $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.
Application à l'étude de la variation, à la recherche des maximums ou des minimums de quelques fonctions simples, en particulier des fonctions de la forme :

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f},\quad y=x^3+px+q.$$

où les coefficients ont des valeurs numériques.
Dérivée de l'aire d'une courbe dont l'aire est considérée comme fonction de l'abscisse (on admettra la notion d'aire).

L'étude du signe d'une expression algébrique est motivée par l'étude des variations des fonctions à l'aide du signe de la dérivée. Une lecture superficielle peut laisser croire que c'est là l'objectif central et ultime de cette partie du programme d'analyse. Or l'étude des variations des fonctions n'a jamais constitué un axe de recherche en mathématique et la notion de dérivée n'a pas été inventée pour cela. Les auteurs de ces programmes, qui sont de grands mathématiciens de l'époque (Darboux, Borel, Poincaré, Lebesgue, …), veulent moderniser l'enseignement des mathématiques, jusque là fortement centré sur la géométrie d'Euclide. Un des axes de cette modernisation est l'introduction du concept majeur du calcul différentiel et intégral : la dérivée. Un problème surgit aussitôt : **trouver des classes de problèmes simples permettant de mettre en scène ce concept**. Le savoir savant n'en fournit que deux : la détermination des tangentes à une courbe en un point et les calculs d'aire de trapèzes mixtilignes. Tous les autres problèmes traités à l'aide de la dérivée (courbure, points d'inflexion, longueur de courbes, extremums de fonctions de plusieurs variables, …) sont hors de portée d'un débutant. Un champ d'application simple est alors créé pour faire vivre ce concept, en donnant une importance primordiale à un point mineur du savoir savant, jamais développé pour lui-même : la variation des fonctions. Cette étude motive l'étude du signe d'une expression algébrique, puisqu'elle fait appel au signe de la dérivée.

Tous les programmes qui se succéderont de 1890 à 1980 reconduiront cette mise en scène, dans laquelle le signe d'une expression algébrique a pour unique champ d'application l'étude des variations des fonctions. Il faudra attendre les années 1980 pour voir les questions d'étude de signes trouver un nouveau champ d'application avec l'introduction de majorations d'expressions dans le but d'évaluer des ordres de grandeur :

On montrera que l'inégalité $\left|x\right| \leq \dfrac{1}{2}$ *entraîne* $\left|\dfrac{1}{1+x} - (1+x)\right| \leq 2x^2.$

On entrait avec ces programmes dans une ère ambitieuse de l'enseignement de l'analyse inspirée par les mathématiciens du groupe Bourbaki : « *Pour acquérir le sens de l'analyse indispensable jusque dans les spéculations les plus abstraites, il faut avoir appris à distinguer ce qui est grand de ce qui est petit, ce qui est prépondérant de ce qui est négligeable. En d'autres termes le calcul infinitésimal est l'apprentissage du maniement des inégalités et on pourrait le résumer en trois mots : Majorer, Minorer, Approcher* » (Jean Dieudonné, Calcul infinitésimal, 1968). Les commentaires du programme de l'époque sont éloquents à ce sujet :
Il convient de consacrer de nombreuses activités réparties sur toute l'année aux concepts, fondamentaux en analyse, de majoration, minoration, encadrement (commentaire du programme de seconde).
Dans les exercices de recherche de limites on se gardera de toute codification systématique ; on entraînera les élèves à évaluer l'ordre de grandeur des termes mis en jeu (commentaire du programme de Première S).

La mise en œuvre dans les manuels

Les manuels ont une importance considérable comme lieux de transposition didactique et comme conservatoires de celle-ci. Leur étude, confrontée au programme qu'ils mettent en œuvre et aux savoirs savants de référence, nous renseigne sur les choix qui ont été faits et nous permet de comprendre l'origine de méthodes et de type de problèmes dont on a parfois perdu de vue l'intérêt et les objectifs.

Neveu, classe de mathématique élémentaires (1908)
Le cours d'algèbre comprend trente cinq leçons :

- Les huit premières sont consacrées aux nombres, aux polynômes, aux fractions rationnelles.
- Les leçons 9 à 14 traitent des problèmes du premier degré : équations, systèmes d'équation, problèmes qui y conduisent.

- Les leçons 15 à 22 traitent des problèmes du second degré.
- Les leçons 23 à 27 sont consacrées à l'étude des fonctions au programme.
- Les leçons 28 à 31 traitent de la dérivation et de ses applications à l'étude des fonctions et aux calculs de surfaces et de volumes.
- Les leçons 32 à 35 traitent des suites arithmétiques et géométriques et à leurs applications aux mathématiques financières.

L'étude du signe d'une expression occupe une place importante : 13% du volume de l'ouvrage y est directement consacré, 20% si l'on ajoute les études faites sur la factorisation des polynômes et sur les fractions rationnelles pour pouvoir en étudier le signe.
Les études de signe sont constamment utilisées pour les études de fonctions qui sont conduites de deux manières pour les mêmes fonctions : directement dans les chapitres 23 à 27, à l'aide des dérivées dans les chapitres 28 à 31.
Ce fait laisse penser que l'étude des variations à l'aide des dérivées semblait exotique à l'époque. De plus la méthode utilisée nous renseigne sur les traditions didactiques qui vont s'instaurer et perdurer des décennies durant. Cette méthode est mise en place à l'aide d'exemples traités.

Exemple : *Étudier les variations de la fraction* $\dfrac{3x^2-4x+3}{x^2+1}$.

Posons $\dfrac{3x^2-4x+3}{x^2+1} = y$ *d'où* $(3-y)\,x^2 - 4x + 3 - y = 0$. *Pour que cette équation en x ait des racines, il faut que l'on ait* $4-(3-y)^2 \geq 0$ ou $(5-y)(-1+y) \geq 0$. *Dans cette expression, le coefficient de* y^2 *est négatif : donc y devra varier entre les racines qui sont* 5 *et* 1. 5 *sera le maximum, nous le désignerons par* M, *et* 1 *sera le minimum, nous le désignerons par m. Les valeurs correspondantes de x sont* $x=\dfrac{2}{3-y}$ *: à* $y=5$ *correspond* $x=-1$ *; à* $y=1$ *correspond* $x=1$.

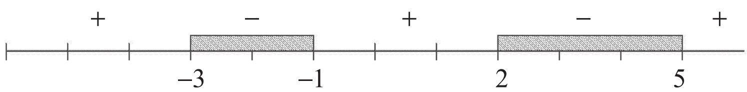
Le numérateur et le dénominateur ne s'annulent jamais ; donc ils sont toujours positifs, et par suite, la fonction est toujours positive.
On obtient sans difficulté le tableau suivant :

Valeurs de x	$-\infty$	*Croît*	-1	*Croît*	0	*Croît*	$+1$	*Croît*	$+\infty$
Valeurs de y	3	*Croît*	M$=5$	*Décroît*	3	*Décroît*	$m=1$	*Croît*	3
Signe de y	*Fonction toujours positive*								

La méthode pour obtenir le tableau de variation repose uniquement sur le signe du trinôme du second degré. Les variations s'obtiennent alors sur des bases implicites appartenant dans la logique de l'ouvrage au champ de l'intuition : tout changement dans les variations de la fonction sur un intervalle équivaut à l'existence d'un maximum ou d'un minimum pour la fonction sur cet intervalle ; en conséquence sur tout intervalle où il n'y a ni extremum ni discontinuité, la fonction est monotone.
Ce type de méthode occupe une place importante dans l'économie générale de

l'ouvrage. Tous les exemples et exercices font appel à **des études de signes d'expressions du second degré avec paramètres** qui trouvent ici un champ d'application qui peut paraître naturel. On peut observer en effet que les familles de fonctions au programme ont en commun de ramener l'équation $f(x) = k$ à une équation du premier ou du second degré, ce qui dispense de faire appel au théorème des valeurs intermédiaires et donc à la notion difficile de continuité.
Toutes les fonctions au programme sont étudiées de cette manière, puis à l'aide de la dérivée. Une seule exception : les fonctions polynômes du troisième degré, pour lesquelles la dérivation est le seul recours (et donne lieu à l'étude du signe d'un polynôme du second degré). Vu la difficulté de la première méthode par rapport au calcul des dérivées, on peut supposer qu'il s'agit d'une pure création didactique développée pour donner un champ d'application aux développements sur le second degré qui forment l'essentiel du programme d'algèbre.
Jusqu'au début des années 1970, les équations du second degré avec paramètres vont continuer à occuper une place importante dans les manuels du secondaire, bien longtemps après qu'elles aient perdu tout champ d'application, le calcul des dérivées étant l'unique méthode préconisée dans les programmes ultérieurs pour l'étude des variations des fonctions[6].

Maillard, classe de troisième (1962)
L'étude du signe d'une expression apparaît dans le chapitre consacré à l'étude des inéquations à une inconnue.
Exemple : *Résoudre l'inéquation* $(x - 5)(x + 1)(x - 2)(x + 3) > 0$.
Les facteurs successifs s'annulent respectivement pour les valeurs 5 ; -1 ; 2 ; -3.
Nous rangeons ces valeurs par ordre croissant : -3 ; -1 ; 2 ; 5.
D'après ce qui précède, nous pouvons conclure que pour $x > 5$ *tous les facteurs sont positifs et l'inéquation est vérifiée.*
Si maintenant x prend une valeur comprise entre 2 *et* 5, *seul le facteur* $x - 5$ *change de signe et le produit change de signe. Le produit est donc négatif pour* $2 < x < 5$.
Et le raisonnement se poursuit …
Le schéma indique les changements de signe du produit :



Riche, classe de première CDE (1970)
Nous admettrons que si le corps utilisé est $\mathbb{R}$, *tout polynôme de degré supérieur à* 2 *peut être mis sous forme d'un produit de polynômes du premier degré et du second degré à discriminant négatif.*
Si $\mathrm{P}(x) = 5x\,(x - 1)(x + 2)^2(x^2 + x + 1)$:
L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ *n'a pas de racine : quel que soit x,* $x^2 + x + 1 > 0$.
Le polynôme P *admet* 1 *comme zéro simple,* -2 *comme zéro double.*
Quel que soit x distinct de -2 *et de* 1, $\mathrm{P}(x)$ *a le signe de* $(x - 1)$.

(6) Y. Chevallard parle du « vieillissement des praxéologies ».

Remarquons que la valeur d'un polynôme du premier degré change de signe quand x « traverse » son zéro. La valeur d'un polynôme du second degré change de signe si x « traverse » un zéro simple du polynôme, mais elle ne change pas de signe si x « traverse » un zéro double.
Ce résultat est général ; la valeur d'un polynôme P *ne peut changer de signe que si x « traverse » un zéro du polynôme* P *; si x « traverse » un zéro simple (d'ordre* 1*) ou triple (d'ordre* 3*), la valeur de* P(x) *changera de signe ; si x « traverse » un zéro double (d'ordre* 2*) ou un zéro quadruple (d'ordre* 4*), la valeur de* P(x) *ne changera pas de signe.*
Considérons, par exemple, le polynôme $P(x) = 63\,(x + 2)^2\,(x + 1)\,(x - 3)^3\,(x - 5)$. P *est un polynôme du 7*^{e} *degré. Il admet* -2 *comme zéro double,* -1 *comme zéro simple,* 3 *comme zéro triple,* 5 *comme zéro simple. Sur chacun des intervalles* $]-\infty\,,\,-1[$, $]-1\,,\,3[$, $]3\,,\,5[$, $]5\,,\,+\infty[$, P(x) *conserve un signe constant. Calculons la valeur de* $P(x)$ *pour x appartenant à l'un de ces intervalles. Par exemple* P(0), $P(0) < 0$; $P(x)$ *est donc négatif lorsque x décrit* $]-1\,,\,3[$. *D'où le tableau :*

x	$-\infty$		-2		-1		3		5		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Comme la méthode du tableau de signes, cette technique repose sur la possibilité (admise) de factoriser les fonctions polynômes dans $\mathbb{R}$. Comme chez Maillard, c'est une alternative aux tableaux de signes des manuels contemporains.

La transposition didactique : nécessaire mais perverse ?

L'étude que nous avons menée montre que derrière l'enseignement d'une notion il y a de vraies questions mathématiques. **La détermination des solutions d'une équation polynomiale en est une** et c'est ce que révèle l'étude historique. Le signe d'une expression algébrique est un outil pour résoudre ce problème. Mais le tableau de signes n'est alors pas viable car les racines ne sont pas connues !
Nous n'avons jamais trouvé l'objet « tableau de signes » dans le savoir savant, c'est une pure création de notre enseignement.
Il a des domaines d'application restreints : il ne peut vivre que dans le domaine des fonctions polynômes, **factorisées ou factorisables**, et des fractions rationnelles dont les numérateur et dénominateur sont de ce type, domaine qui peut s'élargir à des fonctions produit ou quotient. Il fait vivre la factorisation, mais du même coup conduit à des exercices didactiques avec des fonctions présentées sous forme ad hoc, alors que les situations consistantes conduisent en général à des expressions polynomiales développées et non factorisables par des techniques usuelles au collège ou au lycée.
En seconde, il est souvent utilisé pour donner le signe d'une expression du second degré, et va donc perdre de son intérêt en première. Ultérieurement, son « habitat » va encore se réduire, au profit d'une technique fondée sur la continuité (signe constant sur un intervalle entre deux zéros consécutifs).
Autrement dit les mathématiques enseignées vont à l'encontre des mathématiques !
Actuellement la détermination des solutions d'une équation polynomiale est traitée informatiquement à l'aide du théorème de Sturm ! Cela relativise l'importance que

l'on doit accorder à la recherche du signe d'une expression.
Dans la tradition didactique qui s'est installée, le signe d'une expression-produit a justifié l'étude du signe du trinôme. La « trinomite » a alors pris une place importante pour étudier des variations de fonctions particulières sans l'étude des dérivées, études qui justifiaient les équations et inéquations paramétriques du second degré. Le tableau de signes était alors quasi inexistant dans les exercices et dans les techniques utilisées pour les résoudre, et était remplacé par le théorème concernant le signe du trinôme (c'est ce que faisait Lacroix pour étudier les variations d'une fonction ad hoc sans les dérivées). La « trinomite » va perdurer une centaine d'année alors que les problèmes qui lui donnaient du sens disparaissaient. La suppression des programmes du signe du trinôme va redonner de l'importance au signe d'une expression factorisée mais son domaine d'application va être autre : il s'agit de déterminer des signes de dérivées – nécessairement bien choisies – non seulement d'expressions polynomiales mais aussi d'expressions devenant polynomiales après changement de variable. Mais dans les domaines variés où interviennent les fonctions, est-ce réellement ces fonctions – dont les dérivées se factorisent sagement – que l'on rencontre ?
Le cas du tableau de signes est quasi caricatural : il est devenu un objet important d'enseignement alors que ce n'est qu'un savoir scolaire dénué de réelle portée mathématique. À la lecture des programmes, ne devrions-nous pas nous demander *pourquoi on étudie le signe d'une expression* ? Nous y avons en partie répondu : cette question doit être une sous-question d'une question autrement plus importante : *comment déterminer les solutions exactes ou approchées d'une équation polynomiale* ? Pourquoi ce type de questionnement n'apparaît-il pas de manière plus explicite ?

Ce que nous avons mis en évidence sur le tableau de signes est général. Il conduit à réfléchir au processus de ***transposition didactique***, c'est-à-dire de ***transformation du savoir savant en savoir à enseigner***.
L'acte de transposition didactique n'est pas neutre par rapport au savoir savant qu'il met en scène :

- Lorsqu'il est opéré à un niveau élémentaire, la nécessité de mettre à portée de débutants les notions à enseigner oblige à créer un environnement propice à leur assimilation. Il y a alors création d'un ensemble de problèmes qui sont parfois étrangers au savoir savant et de techniques qui n'ont d'intérêt que dans la transposition didactique qui les a fait naître.
- Lorsqu'il est opéré à un niveau supérieur, il donne une forme au savoir savant à transmettre, sélectionne des cadres de présentation, des champs d'application, en occulte d'autres et détermine ainsi, pour des décennies parfois, les axes de la recherche et la postérité de certaines théories[(7)].

Il est important de réfléchir sur l'origine des notions et techniques que nous enseignons, afin de mieux cerner leur intérêt et donc la place à leur accorder. L'histoire, l'analyse épistémologique et les différents outils d'analyse didactique sont

(7) On pourra lire à ce propos ce qu'écrit L. Schwartz, dans *Un mathématicien dans le siècle*, sur le choix fait par Bourbaki sur la théorie de l'intégration et ses conséquences, en France, sur la recherche en probabilités. On pourrait aussi évoquer l'analyse non-standard.

les instruments de cette réflexion[8].

L'étude ci-dessus conduit à dégager deux axes de réflexion :

- L'un sur les créations didactiques liées à la mise en scène des notions au programme : quelles sont-elles ? Quelle importance leur accorde-t-on ? Ne deviennent-elles pas parfois centrales dans notre enseignement, nous faisant du coup oublier les vraies questions qui ont fait que certaines notions sont apparues dans les programmes ?
- L'autre sur les traditions didactiques qui s'instaurent et qui perdurent, parfois sans raison, si ce n'est celle de la coutume. Peut-on les repérer ? Sont-elles toujours fondées ?

Initialement le savoir à enseigner est explicite : on demande d'enseigner une notion car elle est un outil pour résoudre une vraie question mathématique (voire d'un domaine hors des mathématiques). Les manuels (ce sont les écrits qui nous restent) créent des objets didactiques pour faciliter la compréhension de la notion. De réformes en réécritures des programmes, d'allègements en suppressions de parties de programmes, il reste dans les programmes actuels des bribes (des scories ?) de notions dont on ne connaît même plus la finalité ou pire les créations didactiques qui, d'objets susceptibles de faciliter l'apprentissage de la notion, sont devenus eux-mêmes objets d'étude ! Une difficulté de notre enseignement est que nous avons perdu de vue les problèmes essentiels en amont.

Bachelard dit que toute connaissance est réponse à une question. Notre enseignement n'a-t-il pas tendance à donner aux élèves des réponses avant qu'ils ne se posent des questions ?

Bibliographie complémentaire

Abbé de la Caille, *Leçons élémentaires de mathématiques*, 1772 (disponible sur http://gallica.bnf.fr).

Clairaut Alexis, *Éléments d'algèbre*, 1746.

Artaud Michèle, *Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisation didactiques*, Actes de la IX^e école d'été de didactique des mathématiques, Houlgate, 1997.

Chevallard Yves, *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*, in Revue de Didactique des Mathématiques 12/1, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1992.

Chevallard Yves et al., *Analyse anthropologique*, Actes de l'université d'été de La Rochelle, IREM de Clermont-Ferrand, 1998.

Matheron Yves, *Analyser les praxéologies. Quelques exemples d'organisations mathématiques*, in Petit x, nº 54, 1999-2000, IREM de Grenoble.

Borowczyk Jacques, *Sur l'histoire des démonstrations de la règle des variations du signe de Descartes*, Actes du colloque de Besançon, 1989.

Chabert Jean-Luc et al., *Histoire d'algorithmes*, Belin, Pour la Science, 1994.

Sinaceur Hourya, *Corps et modèles*, Vrin, 1992.

(8) On a privilégié dans cette étude les outils de l'analyse anthropologique qui nous ont paru bien adaptés pour formuler notre questionnement.