Proportionnalité en seconde …
et apprentissage de la citoyenneté

Étienne Gille(*)

I. La situation à l'entrée en seconde

Si un certain nombre d'élèves entrant en seconde savent plus ou moins manipuler un « tableau de proportionnalité », force est de constater que la notion même de proportionnalité n'est pas réellement installée dans l'esprit de la plupart. Dans une classe ordinaire de seconde, quand on demande aux élèves d'exprimer ce qu'on veut signifier quand on dit que deux quantités ou deux grandeurs sont proportionnelles (le mot grandeur ayant été explicité par ailleurs)(1), pas un seul ne donne une réponse correcte, ne serait-ce qu'approximativement. La réponse la plus fréquente, mais minoritaire à côté de beaucoup de phrases obscures(2), est de dire : « quand l'une varie, l'autre varie ». Il y a une dépendance entre les deux, un « rapport », au sens vague du terme. Pour d'autres, le sens est un peu plus précis, avec l'idée que l'une est fonction croissante de l'autre.

Ce flou dans les esprits des élèves se retrouve chez les adultes(3). Le *Petit Robert* ne donne-t-il pas en effet, après une définition précise quoiqu'un peu alambiquée (« se dit de grandeurs mesurables qui sont ou dont les mesures sont et restent dans des rapports égaux »), une acception plus générale : « qui est, reste en rapport avec, varie dans le même sens que : traitement proportionnel à l'ancienneté ». Cette deuxième acception est clairement un affaiblissement du sens premier, l'étymologie renvoyant nettement à la notion de rapport (*ratio*)(4) et donc à la première acception. On pourrait faire le rapprochement avec l'utilisation de l'adjectif exponentiel dans les médias.

Du fait du caractère flou de leur appréhension de la notion, les élèves ont tendance

(*) egille@wanadoo.fr

(1) Cet article concerne essentiellement la classe de seconde. On trouvera cependant en annexe des résultats à des questions posées en Première S.

(2) Je ne ferai pas ici une typologie des réponses, mais certaines sont assez frustes, du genre « 4 est proportionnel à 2 car 4/2 = 2 ». On note quand même l'arrière-plan d'un quotient. Et aussi la difficulté d'obtenir des élèves l'usage d'autres nombres que 2 !

(3) Cf. l'article d'Yves Chevallard dans le Bulletin n° 471 (p. 441 sq) qui signale ce flou conceptuel aussi bien chez les journalistes, les politiques ou les « décideurs », tel ce proviseur qui pense que son salaire est proportionnel au nombre de ses élèves. Voir aussi cet exemple relevé par J.P. Friedelmeyer dans un magazine : « le risque d'accident mortel augmente proportionnellement avec le taux d'alcoolémie. Par exemple, il est multiplié par deux lorsque le conducteur a 0,5 g/l d'alcool dans le sang, par 10 s'il a 0,8 g/l » etc. (APMEP n° 449). Il serait intéressant de faire un test sur des adultes pour voir combien ont réellement acquis la notion de proportionnalité.

(4) Il y a un joli travail linguistique à faire avec le professeur de français sur la famille de mots issue du latin *ratio*, avec le double sens du mot *rationnel*.

à utiliser les méthodes de proportionnalité de manière systématique, que la situation le justifie ou non. Qui n'a « piégé » ses élèves avec des questions du genre : une barre de fer mesure 1 m à la température de 40°, combien mesure-t-elle à la température de 80° ?, ou bien avec des croissances exponentielles de nénuphar sur un lac ?[5] Sans doute travaille-t-on trop peu (travaillait-on trop peu ?), lors de l'apprentissage de la proportionnalité, sur des situations de non proportionnalité.

Or les programmes scolaires donnent une place importante à l'étude de la proportionnalité dès l'enseignement primaire, et ce à plusieurs occasions. Voici ainsi des passages du programme du cycle 3 (avril 2007) :

« – résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité, résolus en utilisant des raisonnements personnels appropriés ;

[…]

Des situations relevant de la proportionnalité sont proposées et traitées en utilisant des raisonnements personnels, adaptés aux données en jeu dans la situation et aux connaissances numériques des élèves (…). <u>Les élèves distingueront ces situations de celles pour lesquelles ces raisonnements ne sont pas pertinents (situations de non-proportionnalité)</u>[6].

Ces procédures de résolution concernent également les problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes et aux conversions entre unités de longueur, de masse, de contenance, de durée ou d'aire qui trouvent leur place sous cette rubrique. À partir de cette première approche dont l'importance ne doit pas être sous-estimée, l'étude organisée de la proportionnalité sera mise en place au collège.

[…]

– résoudre, dans des cas simples, des problèmes relevant de la proportionnalité (pourcentages, échelles, conversions, …), en utilisant les propriétés de linéarité, ou par l'application d'un coefficient donné dans l'énoncé ou calculé ;

[…]

La notion d'agrandissement ou de réduction de figures fait l'objet d'une première étude, en liaison avec la proportionnalité, et conduit à une approche de la notion d'échelle.

[…]

En histoire ou en géographie, les calculs de durées, les travaux sur cartes et sur plans offrent des situations intéressantes, notamment pour l'étude de la proportionnalité. »

De même au collège, les programmes insistent à tous les niveaux sur la proportionnalité, indiquant par exemple en sixième : « reconnaître les situations qui relèvent de la proportionnalité et les traiter en choisissant un moyen adapté », et précisant : « les problèmes à proposer (qui relèvent aussi bien de la proportionnalité que de la non proportionnalité) se situent dans le cadre des grandeurs ». Aucune définition formelle ne semble cependant proposée par les programmes.

Malgré cette insistance, il faut bien constater (il faudrait s'interroger sur cet état de fait) que la notion de proportionnalité n'est pas réellement acquise par les élèves sortant de Troisième, si l'on excepte la manipulation des tableaux de proportionnalité. Il m'a donc toujours paru indispensable de revenir de manière approfondie là-dessus en classe de seconde, car le concept de proportionnalité me semble faire partie du minimum mathématique qu'un citoyen doit maîtriser qu'il soit ou non scientifique.

(5) On pourrait citer aussi le classique « La tour Eiffel mesure 300 m et pèse 8000 t. On en fait un modèle réduit d'un kilo, quelle est sa hauteur ? » (note de Michel Lafond).

(6) C'est moi qui souligne.

Que peut en effet comprendre des débats économiques (ou fiscaux !) une personne ne comprenant pas la proportionnalité ? Que peut-il comprendre des tarifs EDF ou bancaires ? Du débat politique sur les élections « à la proportionnelle » ? J'ai donc consacré chaque année deux à trois semaines à travailler cette notion, avec un succès, on le verra, mitigé (mais ce n'est pas propre à ce sujet !). Les difficultés rencontrées montrent peut-être, outre mes maladresses, que la proportionnalité (et la notion de quotient de manière plus générale) n'est peut-être pas si simple à comprendre.

II. Travail en classe :

Situations de proportionnalité et de non proportionnalité

Pour acquérir la notion de proportionnalité, il est certainement utile d'avoir en tête des exemples variés « de la vie courante » (mathématique et non mathématique), constituant des exemples et des contre-exemples. Il faut bien sûr commencer par donner aux élèves une définition (quotient constant, ou bien coefficient multiplicatif constant) et regarder ensuite dans les différents exemples si la définition est vérifiée.

Des premiers exemples particulièrement simples permettent d'entrer progressivement dans l'idée de deux quantités prenant chacune différentes valeurs, l'une étant liée à l'autre par un facteur constant(7). Ainsi : le périmètre d'un carré (ou d'un triangle équilatéral) et son côté ; l'aire d'un rectangle dont un côté a pour longueur 5 cm et la longueur du deuxième côté(8) ; l'intensité d'un courant et la différence de potentiel(9) (cet exemple n'arrive pas très naturellement, même si les élèves l'ont étudié en physique) ; la mesure d'une longueur en cm et sa mesure en mm ; etc. On peut en profiter pour rafraîchir la mémoire des élèves sur le lien entre le périmètre d'un cercle et son rayon (désespérant(10) !).

Parmi les contre-exemples : l'aire d'un carré et son côté ; l'affranchissement d'une lettre et sa masse ; la note à une dictée et le nombre de fautes ; la diagonale d'un rectangle de côté donné et le deuxième côté ; la hauteur d'une bougie allumée et le temps écoulé depuis son allumage. Cette dernière question, posée à brûle-pourpoint, donne peu de bonnes réponses, malgré le caractère décroissant de la fonction, sans doute du fait de son caractère affine. L'étude de tarifs divers (photocopies, téléphones, EDF) conduit à des situations variées, avec parfois des « zones » de proportionnalité, que l'on peut faire décrypter aux élèves.

Au fur et à mesure que les exemples se compliquent, la question de la justification se pose. Comment voir si la diagonale d'un carré est proportionnelle à son côté ? J'avais l'habitude de distinguer dans la classe les élèves que j'appelais les « pragmatiques » qui procédaient en faisant des vérifications à partir de mesures, et les « théoriciens » qui recherchaient une formule (comme les élèves ont un faible pour

(7) Il n'est pas sûr que l'approche dépouillée, uniquement numérique, des fonctions telle qu'on la pratique généralement permette aux élèves d'acquérir justement cette notion de dépendance.
(8) Avec la difficulté que la longueur de 5 cm peut être la largeur !
(9) Sous réserve que la température atteinte par la résistance ne varie « pas trop », mais cette précision ne concerne probablement pas les élèves de seconde.
(10) Mais, semble-t-il, le professeur de Pagnol avait déjà du mal avec cette formule.

Pythagore, c'est un moyen de l'utiliser avec des lettres, mais pour la moitié des élèves, une telle démonstration reste difficile, même après plusieurs exemples). La méthode « pragmatique » fait vite apparaître son imprécision, et il est évidemment assez instructif en fin de séance, après avoir tâtonné avec des 1,4, 1,38, etc., de confronter ces résultats avec le « racine de 2 » des « théoriciens ». L'exemple de la diagonale d'un cube peut également être pris, mais plutôt en exercice de remémoration à l'occasion du chapitre de géométrie dans l'espace.

Le clivage est souvent net entre ceux qui sont capables de procéder à des raisonnements généraux, et ceux qui se contentent systématiquement de prendre des exemples. On ne peut qu'en prendre son parti. Au demeurant, la deuxième catégorie d'élèves continue d'exister en Première et aussi en Terminale S(11).

Malgré ce travail sur exemples, l'inventivité des élèves est en général faible, et les exemples qu'ils proposent (à l'occasion d'un devoir à la maison par exemple) sont souvent décevants(12). Cela a l'avantage de faire prendre conscience au professeur que le concept est complexe ! Il fait en effet intervenir la notion de quantités variables, de dépendance « permanente » de l'une par rapport à l'autre, de quotient…(13)

On peut aussi faire réfléchir les élèves à la possibilité de mesurer une aire un peu tarabiscotée en la reproduisant sur un carton et en pesant le carton. On encore à la recherche de la valeur de π en pesant un disque de rayon unité (par ex.) et un carré de côté unité découpés dans du carton. Etc.

En fin de chapitre, j'abordais souvent, comme transition avec la trigonométrie, le rapport de projection orthogonale. La référence au théorème de Thalès peut venir assez naturellement lors de l'étude de certaines figures.

Propriétés

L'étude de quelques exemples amène à faire ressortir plusieurs propriétés de la proportionnalité. Par souci de commodité je me limitais aux grandeurs positives. Et je cherchais à faire apparaître que certaines propriétés étaient caractéristiques de la proportionnalité et d'autres non.

Ainsi deux grandeurs proportionnelles vérifient que « si l'une s'annule l'autre aussi ». À partir de la définition faisant intervenir un coefficient multiplicateur, la propriété est évidente. Il est évident aussi que cependant elle n'est pas caractéristique. L'exemple de l'aire du carré est là pour nous en convaincre, et bien d'autres exemples. La propriété n'a donc guère d'intérêt, sauf si on l'utilise « à l'envers » pour démontrer que deux quantités ne sont pas proportionnelles. Ainsi il devient facile, sans aucune donnée, de montrer que la taille d'un bébé n'est pas proportionnelle à son âge ou que la longueur d'un rail de chemin de fer n'est pas proportionnelle à la température

(11) Et par ailleurs, il est désolant dans ces dernières classes, de ne souvent déceler chez les élèves aucun pragmatisme, aucun souci de regarder sur des exemples ce qui ce passe.

(12) Ce sont les proportionnalités des quantités intervenant dans les recettes de cuisine qui apparaissent souvent.

(13) Une autre recherche peut être proposée aux élèves : trouver sur Internet, ou bien en interrogeant des adultes, des exemples d'utilisation du mot « proportionnel » et les confronter à la définition mathématique.

extérieure[14]. Ou encore que la masse d'un pot de crème n'est pas proportionnelle à la quantité de crème qu'il contient, ni le prix d'une course en taxi au nombre de km parcourus. Facile ? Enfin pas pour tous, car la logique des élèves reste à construire. Mais l'idée de la quantité initiale non nulle détruisant toute possibilité de proportionnalité fait néanmoins assez bien son chemin.

Un travail analogue peut être fait sur la propriété : « si l'une augmente, l'autre augmente » (les grandeurs étant supposées positives). La recherche d'exemples de situation où il n'y pas proportionnalité alors que cette propriété est vérifiée (on peut reprendre les exemples ci-dessus ou d'autres) est utile pour déraciner l'idée profondément ancrée que cette propriété exprimerait à elle toute seule la proportionnalité. Cela suppose de ne pas prendre en considération le cas d'un coefficient de proportionnalité négatif et donc de se limiter à des grandeurs intrinsèquement positives.

Le travail logique consistant à distinguer les propriétés seulement nécessaires des propriétés nécessaires et suffisantes est souvent nouveau pour les élèves, même s'ils ont vu un peu cela au collège avec le théorème de Pythagore. Cette réflexion est formatrice. Cependant il faut reconnaître que si les élèves semblent comprendre au moment de l'explication, bien peu sont capables de maîtriser durablement ces raisonnements. Faut-il en conclure que la démarche est prématurée ? Mais alors quand la fera-t-on ? Ou bien, peut-on espérer qu'il s'agit de premiers jalons auxquels les élèves pourront se référer dans leur apprentissage logique ultérieur ?

Pour la suite, je considérais, de manière un peu abusive, et j'admettais que la propriété « si une quantité double, l'autre double aussi » était caractéristique de la proportionnalité tout en avertissant les élèves, par acquis de conscience, que ce n'était pas vrai en toute généralité[15]. Cette propriété nous permettait de répondre (enfin !) à des questions plus complexes où la formule n'était pas (encore) accessible et où l'expérimentation était compliquée. C'est le cas par exemple de l'aire d'un secteur circulaire. La propriété que l'aire double si l'angle double est évidente. La proportionnalité en découle, et ensuite la formule, que les élèves (certains !) sont intéressés à construire ainsi. C'est une des premières formules un peu nouvelles qu'ils peuvent ainsi démontrer.

On pourrait aussi voir ou revoir à cette occasion la proportionnalité entre le volume d'une bille de plomb (par ex.) et sa masse et revoir (ou introduire ?) la notion de masse volumique.

Une difficulté conceptuelle se présente cependant ici aussi. Quand on double la première quantité, encore faut-il que l'on double une valeur quelconque de cette première quantité. Cette « quelconcité » de la valeur initiale n'est pas évidente pour les élèves. Il est possible de la signaler sans s'appesantir.

(14) Ceci nécessite cependant une digression, car les élèves de seconde n'ont en général pas idée de la dilatation.

(15) Que l'on pense à la fonction $f(x) = 2x$ si x est rationnel et $f(x) = 3x$ si x ne l'est pas. Bien sûr je ne donnais pas un tel exemple aux élèves. En prévenant les élèves du caractère provisoire de la propriété énoncée, je savais que cela n'attirerait l'attention que d'un nombre très limité d'entre eux. Mais, outre l'impossibilité de ne pas la faire, une telle remarque fait partie des digressions que peut faire un professeur désirant aiguiser la curiosité de sa classe.

Il est nécessaire de souligner la difficulté des propriétés examinées ici, en ce sens que les théorèmes ont pour conclusion une implication : « si A et B sont proportionnelles, alors, si A = 0, B = 0 ». Ce n'est pas évident à exprimer pour un élève de seconde, la syntaxe de la phrase est inhabituelle et l'expression de la réciproque ou de la contraposée malaisée.

Accroissements proportionnels

Je signale ici, sans m'y arrêter, qu'à un moment ou à un autre des contre-exemples, ceux où la fonction est affine, on peut faire ressortir la propriété, au programme de seconde, de la proportionnalité des accroissements de x et de ceux de y. Et faire apparaître des formules du type $y = y_0 + a\,(x - x_0)$(16).

L'exemple suivant : « on estime qu'un marcheur en montagne s'élève d'environ 300 m toutes les heures de marche. Un marcheur part à 8 h du matin de son chalet situé à 1 200 m d'altitude, à quelle altitude se trouvera-t-il à 11 h du matin ? à l'heure h ? » permet d'analyser un peu la démarche des élèves : ils n'ont pas trop de mal à résoudre la première question, bien que, contrairement à ce qu'on pourrait croire, ils n'y arrivent pas tous immédiatement. En tout cas, les plus faibles, même s'ils font parfois une erreur, comprennent et en ont une certaine satisfaction. La deuxième question est plus coriace, et les élèves oublient souvent de retrancher 8 à h. Mais ici encore, la difficulté reste surmontable, car la situation « concrète » est là pour soutenir la réflexion. La non-proportionnalité de l'altitude et de l'heure est assez claire. La proportionnalité de l'augmentation d'altitude et de la durée, supposée par l'énoncé, l'est aussi(17).

Évaluation

Après ce travail d'apprentissage, une évaluation serait à mener. M'étant contenté de procéder à des contrôles que je n'ai pas analysés et dont je n'ai pas gardé de traces, je suis obligé de me limiter ici à un tout petit résultat. Il s'agit des réponses à un test très varié effectué début février 2007 dans une classe de seconde sérieuse. À la question : « le périmètre d'un carré est-il proportionnel à la longueur du côté ? (expliquez votre réponse) », les résultats ont été les suivants : 12 réponses justes bien justifiées, 8 réponses justes avec des justifications partielles, 3 réponses justes avec des justifications fausses(18), deux confusions entre l'aire et le périmètre, une réponse fausse et deux non réponses (total : 28 élèves). Après deux bonnes semaines de travail sur le sujet, durant lesquelles cet exemple avait été examiné à plusieurs reprises, ce n'est pas glorieux, même si ce n'est pas épouvantable non plus.

Un peu plus loin, une autre question demandait : « Y a-t-il proportionnalité entre le rayon d'un ballon et son volume ? (expliquez votre réponse) », les résultats sont naturellement nettement moins bons. Il y a 12 non mais avec des arguments très

(16) Je préfère cette écriture à celle plus courante, mais moins naturelle à mon sens : $y = a\,(x - x_0) + y_0$.
(17) On peut aussi travailler sur l'allongement d'un ressort (pour lequel la nécessité de se restreindre à un certain intervalle de validité a l'avantage d'apparaître nettement).
(18) Deux élèves justifient en disant que si le côté est nul, le périmètre est nul.

divers presque tous inexacts(19). Il y a 10 oui(20) et 6 non réponses. La méconnaissance de la formule qui n'avait pas été revue explique pour une part le mauvais résultat(21), mais les explications données montrent que fréquemment les propriétés ne sont pas encore bien en place.

III. Un exemple de réflexion : l'impôt sur le revenu

Pour conclure (?) l'étude de la proportionnalité, j'avais l'habitude de donner à mes élèves un devoir ayant pour thème (un peu provocateur ?) l'impôt sur le revenu. Exemple de rédaction d'un tel sujet de devoir :
On considère l'impôt que doit payer un célibataire sur son revenu imposable (c'est-à-dire après diverses déductions).
1) *Pensez-vous que pour être juste cet impôt doit être proportionnel au revenu ? Vous justifierez votre point de vue, éventuellement en prenant des exemples.*
2) *Qu'en est-il dans les faits ? Renseignez-vous en recherchant le « barème » de l'impôt sur le revenu. Prenez des exemples avant de répondre à la question de savoir : est-ce que l'impôt est en fait proportionnel au revenu ?*
3) *À partir du barème que vous avez trouvé, dessinez la courbe représentant l'impôt en fonction du revenu imposable (pour un célibataire, c'est-à-dire quand le nombre de parts vaut* 1*). On se limitera aux revenus compris en euros dans l'intervalle* [0 ; 20 000].

À la question : « pour être juste, l'impôt sur le revenu doit-il être proportionnel au revenu ? », la réponse instinctive massive était oui, avec des arguments du type : « comme cela tout le monde est à égalité ». En réalité, il faut bien voir que le « oui » des élèves ne s'oppose pas à la progressivité de l'impôt, dont ils n'ont pas idée. Elle s'oppose à un impôt qui serait constant. La diversité des exemples donnés précédemment n'a donc pas eu d'effet. Il n'y a en gros que deux possibilités : l'impôt constant ou l'impôt linéaire. C'est ce qui apparaît clairement dans la réponse suivante de C. A. (Seconde 2007) : « Je ne trouve pas équitable que quelqu'un qui gagne le SMIC donne autant d'argent à l'État que quelqu'un qui gagne beaucoup d'argent. Donc je dirai oui, il faut que l'impôt soit proportionnel au revenu »(22).

De telles réponses s'inscrivent dans la logique « archaïque », et donc non réellement modifiée par le travail fait en classe, d'une proportionnalité limitée à la

(19) « car le volume ne dépend pas que de R » ; « car le rayon n'est pas constant » ; « car si R est nul, le volume ne le sera pas » ; « car le rapport entre le rayon et le volume n'est pas constant » ; « car $V = \pi R^2 h/3$ » ; « car $V = 4 \pi R^2$ » ; « car $V = kR$ où k varie » ; « car $V = k R \times R$ et k n'est pas constant » ; « car quand V double, R ne double pas » ; « car $V = 4/3 \pi R^2$ qui n'est pas de la forme $A = kB$ » ; « car le rapport n'est pas constant car le rayon est mis au cube » ; une réponse non justifiée.
(20) « car le volume dépend de R » (2 fois) ; « car quand le rayon augmente, le volume aussi » (2 fois) ; « car si $R = 0$, $V = 0$ » (3 fois) ; « car $V = 4 \pi R$ » ; « car $V = 2 \pi R^3$ » ; et une explication incompréhensible.
(21) Un seul élève utilise une formule où R est au cube…
(22) On peut noter la bonne qualité de la rédaction, signalant une élève réfléchie. Autre réponse du même type : « Je pense que l'impôt doit être proportionnel au revenu, car je ne vois pas pourquoi quelqu'un qui gagne un salaire médiocre devrait payer les mêmes impôts que quelqu'un qui gagne beaucoup » (F.H.).

propriété : « quand le revenu augmente, l'impôt doit augmenter ». Alors échec du parcours précédent ? Peut-être. En tout cas le processus d'acquisition est loin d'être terminé et (comme souvent) les notions étudiées ont du mal à être réemployées dans un autre contexte.

Ce travail permet des réflexions de différents ordres :

- Qu'est-ce que cela veut dire : « tout le monde doit être à égalité » : Exemples de la redevance télé ; de la dîme ou de la TVA ; de la progressivité de l'impôt(23).
- On peut se mettre facilement d'accord avec les élèves sur un certain nombre de critères de justice : idée que deux revenus égaux doivent donner le même impôt(24) ; que la fonction Impôt relativement au Revenu doit être croissante ; que si le revenu est petit, l'impôt doit être nul et donc constant sur un intervalle etc.(25)
- On peut réfléchir avec le professeur d'économie aux raisons de la progressivité de l'impôt sur le revenu et avec le professeur d'histoire à l'histoire de cet impôt(26).
- Et évidemment on peut effectuer un travail mathématique : représentation graphique, coefficients directeurs, calculs de ces coefficients pour faire en sorte que les différentes fonctions affines se recollent bien et retrouver les coefficients mystérieux des formules permettant de calculer l'impôt… Ce dernier travail représente manifestement le maximum de difficulté qu'on puisse demander aux élèves, sauf à y consacrer un temps excessif.

Conclusion

Comme souvent, les résultats des contrôles effectués de différentes manières sont un peu décevants par rapport aux efforts déployés. La méthode employée, consistant à varier constamment les exemples, si elle enrichit probablement les références des élèves, a pour inconvénient de les empêcher de se situer dans un domaine stable, où les méthodes seraient toujours les mêmes. Ici il y a à la fois pluralité de situations et pluralité de méthodes pour les explorer. Ce peut être déstabilisant pour les élèves en difficulté. Par ailleurs, la réflexion logique sur les propriétés nécessaires mais insuffisantes est difficile en seconde, car les élèves s'embrouillent facilement. Elle peut apparaître comme n'entrant pas directement dans le sujet de la proportionnalité. Pourtant, elle m'a toujours semblé utile voire nécessaire pour aider les élèves à disposer de moyens de détecter la proportionnalité et la non proportionnalité (« reconnaître les situations de proportionnalité » disent les programmes dès le primaire. Oui, mais comment ?).

La proportionnalité, aussi essentielle qu'elle soit, n'est pas acquise à l'entrée en seconde. Elle fait appel aux notions de rapport et de fonction, chacune difficile. Son réexamen en seconde est donc nécessaire. Elle peut constituer un thème de travail riche, varié, motivant et utile, dont les élèves peuvent tirer profit à condition que le professeur ne soit pas trop ambitieux dans ses objectifs.

(23) Mise à mal par la non imposition des heures supplémentaires (note postérieure de l'auteur).

(24) Idem.

(25) On pourrait ajouter que le revenu après impôt doit être croissant, ou que la fonction doit être continue.

(26) Progressivité instituée en 1917 si je ne m'abuse.

Annexe 1 : test effectué en Première S (année 92-93)

Question : « Quand dit-on que deux quantités sont proportionnelles ? »

26 réponses. Je les regroupe en fonction de leur degré de consistance et de « proximité » avec la bonne réponse.

Niveau 0 : 4 réponses sans signification apparente (« on peut passer d'une quantité à l'autre, ex. 2 et 4 » ; « $x/y = z/t$ » ; « les deux quantités sont divisibles par un même nombre » (deux réponses)).

Niveau 1 : 2 réponses indiquant un lien entre les deux quantités (« elles dépendent l'une de l'autre » ; « l'une varie en fonction de l'autre »).

Niveau 2 : 2 réponses indiquant probablement une idée de fonction croissante (« elles augmentent de la même manière » ; « elles suivent les mêmes variations »).

Niveau 3 : 4 réponses évoquant une fonction affine (« si x augmente de 3, y augmente aussi de 3 ; elles augmentent en gardant le même écart » ; « lorsque l'augmentation d'une quantité fait varier l'autre régulièrement » ; « $x = ky$ ou $x = k + y$ »).

Niveau 3′ : 2 réponses évoquant l'existence d'un coefficient (« même coefficient de variation » ; « si elles augmentent avec un même coefficient »).

Niveau 4 : 12 réponses évoquant un rapport (rapport sans précision complémentaire (une fois) ; rapport constant (deux fois) ; « $a = kb$ » (huit fois) ; « si l'une double, l'autre double »).

L'imprécision des réponses laisse perplexe. Moins de la moitié des élèves de cette première S avait une idée claire de la proportionnalité.

Annexe 2 : test effectué dans une première S dite « aménagée » en octobre 1989

Question : On met des prunes sur une tarte. Le nombre de prunes est-il proportionnel au rayon de la tarte ? (les prunes étant supposées toutes de même taille).

Sur 23 réponses : 19 oui, dont 13 car « si le rayon augmente, le nombre de prunes augmente ». 3 non, avec des argumentations non satisfaisantes, et une non réponse.