

Les mathématiques à l'école ? Plus complexe qu'il n'y paraît ! Le cas de l'énumération de la maternelle... au lycée

Claire Margolinas^(*), Floriane Wozniak^(**),
Bruno Canivenc^(***), Marie-Christine de Redon^(****)
& Olivier Rivière^(*****)

Résumé

Les mathématiques de l'école élémentaire sont parfois considérées comme « évidentes », notamment lorsqu'on se réfère aux apprentissages précoces – fin de l'école maternelle et début de l'école primaire, cycle 2 des apprentissages fondamentaux –.

Certaines activités très banales – c'est-à-dire présentes dans de nombreuses classes ordinaires – sont souvent d'une complexité qui n'est parfois pas perçue par les professeurs eux-mêmes, mais vécue de plein fouet par les élèves. La conférence a pour objet de montrer ce phénomène sur le cas précis de l'énumération, savoir mathématique méconnu, mis en lumière notamment par les travaux de Joël Briand et Guy Brousseau, dans les années 90.

La conférence s'appuie sur les travaux récents du groupe Démathé (INRP).

Introduction

L'équipe *Développement des Mathématiques à l'École (Démathé)* de l'INRP a commencé ses travaux en septembre 2003, sous la direction de Claire Margolinas. Nous développons des ressources, en mathématiques, pour les professeurs de l'école élémentaire. Notre démarche se situe en complémentarité de la documentation à la disposition des professeurs.

Parmi les caractéristiques de notre travail, nous pouvons citer le lien que nous entretenons avec les recherches en didactique des mathématiques. L'originalité de notre démarche concerne le type de lien que nous établissons : nous partons plus spécifiquement des réflexions épistémologiques de ces recherches, sans chercher à développer des situations « clé en main » (Margolinas et al., 2006).

(*) INRP, UMR ADEF. Case 49, 3 place Victor Hugo, 13331 Marseille Cedex 03.

(**) LEPS-LIRDHIST, Université Lyon 1. La Pagode, 38 Boulevard Niels Bohr, 69622 Villeurbanne Cedex.

(***) IUFM d'Aix-Marseille. 2 avenue Jules-Isaac, 13626 Aix-en-Provence Cedex 1.

(****) INRP, UMR ADEF. Case 49, 3 place Victor Hugo, 13331 Marseille Cedex 03.

(*****) IUFM d'Auvergne. 36 avenue Jean Jaurès, CS 20001, 63407 Chamalières Cedex.

Les recherches qui sont à l'origine des travaux de notre premier ouvrage (cédérom, parution prévue chez Hatier en 2008, peut-être sous le titre « Les dessous du numérique ») sont ceux de (Briand, 1999), ces travaux ont déjà donné lieu à une diffusion grand public (Briand et al., 2004) sous forme d'un cédérom, mais dans un optique différente de la nôtre.

Notre article cherche à donner une petite idée du document en cours de réalisation, en précisant au fur et à mesure certains partis pris concernant l'ouvrage.

Dans la conférence, nous avons pu faire une présentation – partielle – du document numérique que nous sommes en train d'écrire, ce qui est bien évidemment impossible dans ce bulletin. Pour vous en faire néanmoins partager certains aspects, nous avons choisi d'inclure dans le texte des parties comprenant en marge un liseré signalant une description du document numérique.

Un document visuel et sonore

Avant de donner une idée des caractéristiques de fond retenues pour le cédérom, donnons quelques indications sur la forme. En effet, ces caractéristiques sont assez différentes de celles qui sont présentes dans beaucoup de cédérom destinés aux enseignants.

Notre document se présente comme un diaporama, c'est-à-dire d'une certaine manière comme un livre sonore. Une certaine liberté de navigation est tout de même possible, mais elle n'est pas privilégiée. Il s'agit d'un document qui, comme un livre, a un début et procède selon une certaine logique. Comme un livre, il est possible de commencer au chapitre 2 en ayant « sauté » le chapitre 1 mais, comme dans un livre, l'auteur ne garantit pas la compréhension, dans ce cas !

Les pages présentent peu ou pas de texte, les explications étant, le plus souvent, présentes sous une forme sonore, ces « sons » n'ont pas pour vocation d'être édités sous forme d'un texte : on ne peut pas les citer, ni les détacher de leur contexte. Le document présente quelques textes, qui peuvent être enregistrés sur l'ordinateur de l'utilisateur et bien sûr imprimés, il s'agit de textes très courts (une page) qui donnent essentiellement des définitions ou des bibliographies.

Dans cet article, pour donner une idée du cédérom, nous avons « écrit » quelques-uns des commentaires sonores, mais il faut se rappeler que telle n'est pas leur vocation.

Entrer par les difficultés des élèves

Voici comment nous entrons dans le premier chapitre « l'énumération des collections ».

« Nous partons ici d'une évaluation proposée par le Ministère de l'Éducation Nationale pour le cycle 2. Il s'agit de dire combien il y a de ronds, d'abord dans la configuration alignée, puis dans la configuration en désordre. [Une image montre les 12 ronds en ligne verticale et 8 ronds en désordre du document ministériel]

Il ne s'agit pas nécessairement d'une tâche très difficile, mais elle est assez simple pour nous permettre de montrer une difficulté isolée. Certains élèves ont des difficultés avec la comptine, ce qui est bien repéré par les maîtres. D'autres savent bien réciter la comptine, mais pourtant n'obtiennent pas le bon résultat. Ce sont ces élèves-là qui nous intéressent ici. »

Le choix de partir de difficultés connues des professeurs est très important pour nous. Nous avons en effet réalisé une enquête (Margolinas et al., 2004) auprès de professeurs des écoles au sujet de leurs usages de la documentation scolaire en mathématique et nous avons constaté qu'un nouveau type de document ne pourrait être accueilli favorablement par les professeurs que s'il permettait de mieux comprendre les difficultés des élèves et en particulier de mieux comprendre les difficultés récurrentes.

Pourquoi écrire un document numérique ?

Le terme d'énumération ne vous est peut-être pas familier, en tout cas dans le sens que lui a donné Briand (*op. cit.*). Définir formellement l'énumération n'est pas très aisé, ni très facile à communiquer à des professeurs de l'école élémentaire. Pourtant, l'énumération intervient dans toutes sortes de situations extrêmement banales, tant dans les activités scolaires que la vie courante. Elle intervient également, et c'est ce qui nous intéresse, dans de nombreuses difficultés des élèves, un des problèmes étant de *montrer* ces difficultés.

Le choix de la forme numérique pour notre document n'a pas été dicté par des contraintes externes, ni par une mode pédagogique ou institutionnelle. Au départ de notre travail, la forme du document était une question ouverte. La forme numérique s'est imposée dans le courant de la troisième année de travail, pour des raisons que nous allons tenter de partager avec vous ... par écrit !

En effet, quelle erreur peut-on faire en comptant des « ronds », si on ne se trompe pas dans la comptine ? Les erreurs les plus courantes sont de sauter un (ou plusieurs) rond(s) ou bien de compter deux fois (ou plus) le même rond.

Dans le document numérique, ces deux types d'erreurs sont montrés sur deux courts clips vidéo et ceci pour plusieurs raisons. D'une part parce que la description fine des actions appelle le plus souvent un vocabulaire technique qui permet d'être compris (essayez de décrire les gestes que vous faites quand vous trieux des jetons selon les couleurs, par exemple), ce qui peut rendre difficile la lecture au moment où l'on donne les exemples qui sont censés faciliter ou en tout cas illustrer les explications. D'autre part parce que le professeur est justement confronté quotidiennement à l'observation « à la volée » des élèves pendant la classe, il a rarement le temps de s'installer à côté d'un élève pour le regarder travailler. Nous pensons que si le professeur est entraîné à considérer certains gestes, certaines dispositions, comme importants, il pourra les repérer dans son observation rapide. Outiller cette observation des élèves dans le cadre quotidien de la classe est une de nos ambitions (voir (Margolinas, 2002) pour un développement théorique qui montre la place des *connaissances d'observation* dans la situation du professeur).

L'énumération des collections

La situation du « comptage des ronds » nous permet de donner une première approche de l'énumération :

Énumérer, c'est pointer une fois et une seule chaque rond de la collection.

C'est-à-dire

- > Choisir un premier rond.
- > Choisir un rond suivant.
- > Conserver la mémoire des ronds déjà pointés.
- > Savoir que l'on a choisi le dernier rond.

Plus précisément,

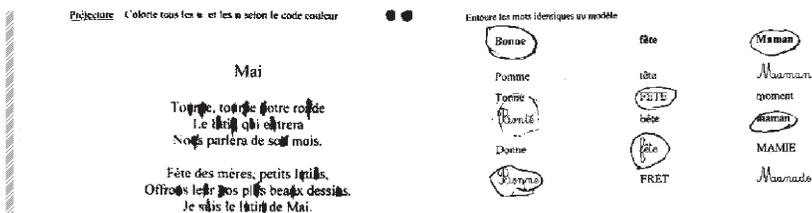
L'énumération est l'action de *structuration d'une collection* qui permet de la parcourir d'une façon ordonnée et contrôlée.

- > *Ordonner* : choisir un premier élément et son successeur.
- > *Contrôler* : conserver la mémoire des choix précédents, savoir que l'on a parcouru toute la collection.

Nous retrouverons cette définition très fréquemment dans l'ensemble du document, car elle comporte de nombreuses facettes qui ne sont pas apparentes au premier abord.

Les autres disciplines

Nous adressant à des professeurs des écoles, qui enseignent toutes les disciplines scolaires, il était possible et pertinent de montrer que les questions qui touchent à l'énumération ne se rencontrent pas uniquement dans des contextes numériques et mathématiques. Dans le cédérom, entre la première approche de l'énumération et la définition, nous avons inclus une diapositive qui réfère à des situations de prélecture, très courantes en grande section de maternelle.



Figures 1 et 2

« L'énumération intervient rarement isolée d'une autre activité, mais par contre, elle n'est pas réservée au domaine des mathématiques. Il y a en fait de très nombreuses activités durant lesquelles il faut parcourir une collection de façon ordonnée et contrôlée.

Voici deux exemples très typiques en prélecture, que nous avons recueillis en grande section de maternelle, au mois de mai. Dans le premier il faut retrouver des lettres suivant un modèle. Il faut donc parcourir toute la collection des lettres pour retrouver les lettres *u* et *n* du modèle. Dans le

second, il faut parcourir toute la collection des mots pour retrouver le mot du modèle *maman*. Cette deuxième fiche cache en fait une autre activité d'énumération, car les enfants ne savent pas lire. Quand ils considèrent un mot, ils doivent comparer les lettres de ce mot avec les lettres du modèle, une par une, dans l'ordre.

Dans nos observations en maternelle, nous avons remarqué que, pour les élèves les plus faibles, pour lesquels la reconnaissance de la lettre ou du mot est déjà difficile, le parcours de la collection des lettres ou des mots ne va pas de soi non plus. Ils sont confrontés à une double difficulté : celle de la lecture, qui est repérée par le professeur, et celle de l'énumération, qui n'est souvent pas considérée.

Maintenant que vous avez cette clé d'observation, vous allez voir de l'énumération partout... Effectivement, énumérer est une activité très courante, combinée avec toute sorte d'autres activités, qu'elles soient ou non mathématiques. »

Notre démarche vis-à-vis du professeur

Dans le cédérom, nous avons alors dévoilé une partie de nos intentions, de la façon suivante :

« Nous sommes partis de difficultés observées. Vous pouvez maintenant associer un nom, l'énumération, à certaines difficultés. Nous allons maintenant chercher et analyser des situations dans lesquelles l'énumération intervient de manière isolée.

Il ne s'agit pas de vous faire devenir des spécialistes de l'énumération, mais de vous donner des clés d'analyse qui vous permettront de concevoir l'existence de choix dans des situations où l'énumération intervient et donc de prendre des décisions d'enseignement. »

Cette question des choix possibles, pour le professeur, nous paraît très importante. Il nous semble que le professeur dispose à l'heure actuelle d'une documentation potentiellement très riche, par les manuels, par les sites Internet, par les documents d'accompagnement des programmes, etc. Par ailleurs, chaque professeur, du fait de sa formation, de son histoire, de son expérience, de ses convictions, de ses conceptions de l'enseignement, s'est forgé des modes de travail qui lui sont propres. Notre enquête (Margolinas et al. *op. cit.*) nous a montré une grande stabilité, pour chaque professeur, dans l'usage de la documentation, notamment.

Notre idée, en écrivant ce cédérom, est de permettre au professeur, sur les points que nous abordons, de mieux construire ses choix et ses décisions, non pas en transformant radicalement ses manières de faire, mais en fondant de façon plus rationnelle, au quotidien, la façon dont il répond à certains élèves, les choix qu'il opère dans son manuel de référence, les variables qu'il pourrait manipuler à son insu, etc. C'est pourquoi nous partons de difficultés que le professeur peut voir sans nécessairement les observer, pour les porter à sa connaissance, et que nous attachons une importance particulière aux *variables* des situations.

Variables et stratégies d'énumération

Dans la suite du cédérom, nous développons l'analyse d'une situation qui fait intervenir l'énumération et pas le comptage. Nous avons construit une situation simple, qui est bien adaptée pour des observations fines des stratégies des élèves, dans une utilisation hors classe. Nous n'avons pas cherché une situation qui pourrait être utilisée telle quelle en classe. Il ne s'agit pas d'une maladresse de notre part mais d'un choix. En effet, quand le professeur importe une situation, même réputée « clé en main » dans sa classe, il produit toujours des adaptations, dont certaines modifient totalement le sens de la situation et donc son effet possible au plan cognitif. Nous proposons donc une situation qu'il faudra nécessairement adapter – dans le cas où le professeur pense qu'il faut travailler l'énumération seule, ce qui ne nous semble pas toujours judicieux – avec l'idée que ces adaptations vont résulter de choix délibérés et donc éventuellement mieux contrôlés.

Le problème pour construire une telle situation (rien ne vous empêche d'y réfléchir avant de lire la suite !) est de trouver un moyen de valider le parcours. La situation que nous avons utilisée est la suivante – dans le cédérom la consigne est montrée sur une vidéo qui montre l'expérimentatrice en train de l'expliquer aux élèves, ici nous sommes réduits à expliquer la situation –.

Sur une table, nous disposons au départ une feuille sur laquelle sont dessinées des croix selon une disposition « en désordre ». Avec l'aide des élèves, nous installons un sucre sur chaque croix. Pour réussir la tâche, il faudra prendre tous ces sucres et les poser dans la petite boîte. Mais c'est trop facile ! Pour que cela soit plus compliqué, on cache chaque sucre sous un petit chapeau. [La suite de la consigne est montrée sur une feuille à part, sur laquelle il n'y a qu'un sucre sur une seule croix, caché sous un chapeau, pour éviter de soulever un chapeau particulier sur la feuille de travail] Pour réussir, il va falloir soulever les chapeaux pour prendre les sucres. On soulève le chapeau, on pose le sucre dans la boîte, on remet le chapeau sur la croix. Mais attention, il ne faut pas soulever le même chapeau deux fois. [L'expérimentatrice le fait] Qu'est-ce que qui se passe ? Il n'y a pas de sucre ? Ah oui, il est déjà dans la boîte. Dans ce cas on a perdu, parce qu'on a soulevé un chapeau plusieurs fois.



Figure 3

Le fait de disposer d'une grille de lecture en terme de stratégie transforme le regard que l'on porte sur ce que font les élèves, au lieu de les trouver « plus ou moins bien organisés » il est possible de comprendre qu'ils adoptent, de façon plus ou moins bien contrôlée, telle ou telle stratégie. Nous pouvons alors examiner quelques réalisations d'élèves qui, sans réussir, mettent bien en place une amorce d'organisation. Nous passons sur cette partie, qui permet de comprendre quelles sont les variables des situations d'énumération, c'est-à-dire les choix, dans l'organisation des points, qui facilitent, compliquent, voire empêchent, telle ou telle stratégie.

L'organisation peut se travailler

Voici comment nous amorçons la conclusion de notre premier chapitre dans le cédérom.

« Pour faire un chemin, il faut organiser mentalement la collection des objets à parcourir. Les stratégies que nous avons présentées reprennent des organisations spatiales très générales lignes - colonnes, qui peuvent s'appliquer à toute collection, mais plus ou moins bien selon ce qui va pouvoir en conséquence apparaître comme des variables. Dans les situations que nous avons vues, « la capacité à s'organiser » apparaît comme quelque chose que l'on peut travailler à l'école dans des situations où intervient l'énumération et pas comme une « donnée » psychologique. »

Nous avons intitulé (provisoirement peut-être) notre ouvrage « Les dessous du numérique ». En fait, cette idée d'examiner ce qui est considéré comme « en dessous » des connaissances enseignées et apprises à l'école nous semble très importante. Il nous semble que, parfois, ce qui est considéré comme ne relevant pas de l'école, comme ce qui ne s'enseigne pas et qui laisse les maîtres démunis, pourrait être susceptible d'un travail dans le cadre scolaire. Nous concluons le premier chapitre sur les choix possibles pour le professeur.

« Nous avons vu qu'il existe des situations dans lesquelles l'énumération intervient seule ou principalement. Nous pensons que vous avez maintenant les moyens d'en choisir dans des documents existants, ou bien d'en construire. Mais la connaissance des variables permet aussi de neutraliser certaines difficultés d'énumération, quand on ne souhaite pas les travailler. Par exemple, si l'on veut travailler sur l'association entre comptine et pointage, on peut mettre des points en ligne, ce qui donne le chemin, et focalise bien sur l'objectif d'enseignement voulu.

La question qui se pose maintenant est celle de la place possible de l'énumération dans une progression. Bien sûr, cela dépend beaucoup du niveau auquel vous enseignez et des élèves auxquels vous vous adressez. Cela dépend aussi de la manière dont vous avez l'habitude de procéder avec votre classe. Nous vous avons montré qu'il est possible de travailler l'énumération seule, ce qui peut être justifié notamment au cycle 1.

À d'autres niveaux, l'énumération est parfois cause de difficultés, mais il n'est pas sûr qu'elle soit à traiter comme une nouvelle séquence, puisqu'elle

apparaît fréquemment. Sans mettre en place de situation spécifique, il vous est possible d'aider les élèves en décrivant les difficultés, voire les stratégies possibles, tout au long des situations, mathématiques ou non, dans lesquelles se présentent des difficultés d'énumération. Vous pouvez être attentif, comme pour les autres contenus enseignés, à laisser aux élèves le temps de résoudre les problèmes d'énumération, quand ils existent, ce qui peut vous permettre de valoriser leurs solutions. Rendre plus explicites les problèmes liés à l'énumération et leurs solutions peut suffire, pour beaucoup d'élèves, à mieux les surmonter. Par contre, pour des élèves très en difficulté avec l'énumération, des situations spécifiques peuvent être mises en place, à tout niveau. »

L'organisation des collections

Le chapitre 1 – l'énumération des collections – était centré, sans que nous l'ayons dévoilé, sur les collections d'objets non déplaçables, avec ou sans dénombrement. Le chapitre 2 – l'organisation des collections – aborde les collections d'objets déplaçables, avec ou sans dénombrement.

Nous partons de nouveau d'une difficulté observée en grande section de maternelle, représentée par un clip vidéo interprété par l'un d'entre nous. Nous y voyons quelqu'un qui compte des ballons, contenus au départ dans un récipient profond. Il prend un premier ballon dans ses bras, énonce un, un deuxième énonce deux, un troisième énonce trois, à ce moment, un des ballons lui échappe et retombe dans le récipient, malgré cela, imperturbable, il prend un autre (?) ballon, énonce quatre et ainsi de suite.

Cette nouvelle difficulté va nous permettre de comprendre ce qui est à l'œuvre quand on réussit à compter et plus généralement à organiser, une collection d'objets déplaçables. Dans l'ouvrage, nous montrons qu'il faut introduire d'une part la notion de partition d'une collection, bien connue des mathématiciens mais peu des professeurs du primaire, ainsi que différents espaces (espace initial, espace final, espace de traitement, voir (Margolinas & De Redon, 2006)) pour comprendre les stratégies en jeux.

Les films, la réalité, le droit à l'image

Avant de nous engager plus avant dans la description du cédérom, nous aimerions évoquer quelques-uns des choix que nous avons faits concernant les images. La possibilité d'inclure des films ou des animations a en effet dicté notre choix d'écrire un cédérom et non un livre, nous l'avons déjà évoqué.

Néanmoins, il est essentiel pour nous que le professeur fasse appel à ses propres observations de ses élèves et que notre cédérom ne se substitue pas à la réalité de ce qu'il peut observer. Ainsi, ce n'est pas seulement pour des raisons de facilité que nous faisons jouer à l'un ou l'autre d'entre nous le rôle des « élèves » dans nos vidéos, mais aussi parce que l'intervention d'un adulte crée un effet de distanciation : c'est au professeur de remplacer l'acteur adulte par des élèves qu'il aura observés,

dans d'autres situations similaires. La similarité, comme l'observation, reste à sa charge.

D'autre part, les observations qui sont à la source des vidéos reconstituées ont été effectivement observées dans des classes réelles, le plus souvent dans le cadre de recherches sur les pratiques ordinaires des professeurs. Parfois, il s'agit d'ailleurs d'observations qui ont été filmées, mais pour lesquelles nous avons demandé un droit à l'image limité à l'utilisation dans un groupe très restreint de chercheurs. Il s'agit d'un choix déontologique et pas seulement d'une difficulté d'obtention d'un droit plus étendu. En effet, d'une part ce sont les parents qui donnent le droit pour leurs enfants, mais que diront les enfants, à l'âge adulte, s'ils découvrent leur image dans un ouvrage du commerce ? D'autre part, que sait le professeur qui dit « oui » de l'effet que lui fera, des années plus tard, le fait de retrouver son image (mais aussi ses choix, ses anciennes façons de faire) dans un ouvrage du commerce ? Pour notre part, il ne nous semble pas possible de demander un tel droit et c'est pourquoi nous avons pris la peine de reconstituer les vidéos que nous utilisons, ou bien de ne pas filmer les visages et de ne donner aucune façon de reconnaître les personnes filmées.

De plus, reconstruire des vidéos permet de focaliser l'attention sur les phénomènes précis que nous voulons travailler. Dans une situation de classe, il se passe toujours beaucoup de choses en même temps, l'analyse devient vite très complexe, elle est intéressante pour le chercheur, mais pas nécessairement dans un ouvrage qui s'adresse aux professeurs.

Actions spontanées ou délibérées du professeur

Après avoir analysé ce qui est sous-jacent aux situations de dénombrement d'objets déplaçables, nous revenons à la situation des ballons.

Nous avons reconstitué dans un clip vidéo l'action du professeur qui intervient auprès de l'élève qui compte les ballons. Nous voyons le professeur se déplacer, sans commenter son action, pour aller chercher un autre récipient. Les ballons sont remis dans le premier récipient puis le professeur saisit les ballons un à un, l'élève n'ayant plus qu'à énoncer la comptine au moment où le professeur le sollicite en lui montrant un ballon, le professeur place les ballons déjà comptés, un à un, dans le nouveau récipient.

Pour résoudre de façon pratique le problème des ballons, le professeur apporte un autre récipient, ce qui permet de contrôler les partitions successives de la collection des ballons. Il s'agit bien d'une solution à un problème, alors que l'intervention du deuxième récipient aurait sans doute pu passer inaperçue, tant elle semble « naturelle ».

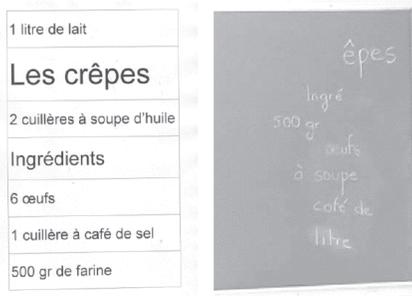
Le fait que le professeur n'implique pas les élèves, même par la parole, dans la procédure d'usage de deux récipients montre qu'il ne considère pas cet usage comme cognitivement important, mais simplement comme une solution pratique au problème (remarquons qu'une simple verbalisation pendant son déplacement ne lui aurait pas pris plus de temps). Ce que nous espérons, c'est que le professeur reconnaîtra maintenant cette action comme déterminante dans la procédure

d'organisation de la collection nécessaire au comptage et que, au minimum, il pourra la mettre en scène pour les élèves, voire même qu'il pourra poser le problème – par exemple en leur demandant : Y a-t-il un problème ? Comment le résoudre ? –. En laissant les élèves chercher une solution (ce qui dépend des intentions du professeur à ce moment précis, il n'est pas toujours possible de le faire).

Une situation et une façon de la faire partager

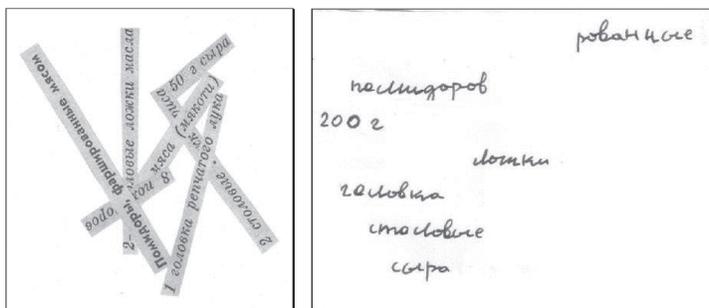
Nous nous éloignons maintenant, dans ce court article, de la succession adoptée dans le cédérom, pour « sauter » directement à la description d'une situation qui conclut nos deux premiers chapitres. Il ne s'agit pas d'une situation mathématique mais d'une situation de prélecture, observée en grande section de maternelle.

Les élèves, qui ont fait des crêpes la veille avec leur professeur, disposent chacun d'une feuille dans laquelle la recette a été écrite mais les lignes (titre et ingrédients) ont été mélangées. Les élèves doivent découper les lignes et obtenir ainsi des étiquettes et reconstituer la recette. Au tableau, après avoir montré la recette complètement reconstituée dans le bon ordre comme ci-dessous à gauche, la maîtresse a un peu compliqué la situation et tronqué les phrases, voire les mots, constituant la recette, comme ci-dessous à droite.



Figures 6 et 7

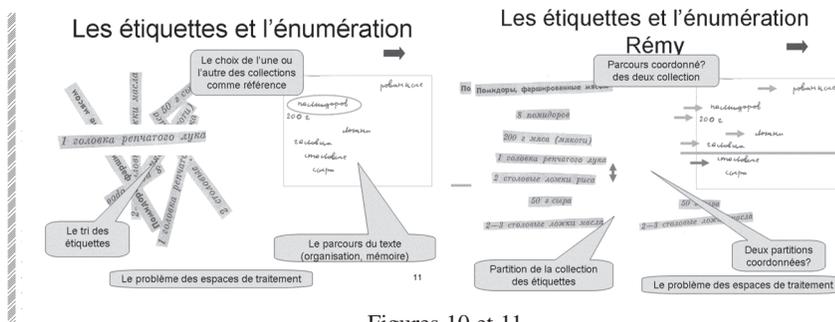
Pour faire partager la difficulté de la situation, nous avons un peu modifié la situation...



Figures 8 et 9

Les élèves ne savent pas lire... les non russophones non plus ! (Les russophones s'étonneront qu'il ne s'agisse pas d'une recette de crêpes, dans notre livre de cuisine familial, nous avons cherché une recette dont les caractéristiques formelles soient les mêmes !). Cette astuce nous permet de montrer au professeur que, quand on ne sait pas lire, les difficultés d'énumération et d'organisation des collections augmentent de façon très importante.

Du point de vue de l'énumération et de l'organisation des collections, la situation de la recette est particulièrement complexe, sans même prendre en compte le problème de lecture lui-même. Il faut en effet trier les étiquettes et les organiser en liste, en prenant comme référence soit les étiquettes non triées, soit le texte modèle. La collection des étiquettes est une collection déplaçable. Se pose donc le problème des espaces d'origine, de traitement et final. La « collection » des lignes de la recette est une collection non déplaçable, il faut l'énumérer et garder la mémoire de la position



Figures 10 et 11

Nous n'avons pas cherché ici à vous faire partager toute la complexité de cette situation apparemment banale, ce que vous pourrez trouver dans le cédérom, mais simplement insister sur le déplacement qui est parfois à faire pour que certaines connaissances totalement intégrées, comme la lecture, puissent être momentanément mises de côté.

Construire des collections

Pour conclure cet article, nous allons analyser rapidement deux situations qui sont présentées dans un ouvrage pour le CP (ERMEL, 1991 : série qui présente un autre type d'ouvrages basés sur des recherches) : les tours de couleurs et triangles colorés, dans le thème « Des problèmes pour apprendre à chercher ». Les objectifs de ces deux situations sont les suivants : « construire un ensemble de possibles, contrôler que tous les cas ont été envisagés ». Les principes sont les suivants :

Pour les tours de couleurs, on construit des empilements de quatre cubes de quatre couleurs de manière qu'une couleur ne soit utilisée qu'une seule fois, les tours peuvent être représentées verticalement, on peut considérer chaque « tranche » de la tour.

Pour les triangles colorés, on construit des triangles équilatéraux colorés, une couleur peut se retrouver plusieurs fois sur chaque partie du triangle coloré, par

exemple on peut avoir un triangle d'une seule couleur. La situation des triangles colorés est d'abord proposée avec trois couleurs puis avec quatre.

Le problème des tours de couleurs est apparenté à une structure arborescente, si l'on nomme les tranches des tours en partant du haut, on peut considérer que l'on a choisi la couleur de la première tranche, on a alors un choix de moins pour la deuxième tranche, etc. Ce problème, qui n'est pas facile pour les élèves de CP, est néanmoins facilité par le fait que la tour elle-même donne une structure et que celle-ci est pertinente pour structurer la collection. Au passage, il nous paraît symptomatique que cette situation soit classée dans les « problèmes pour chercher » : il n'est pas prévu d'institutionnaliser la recherche par arbre, qui n'est pas considérée comme un savoir à apprendre. Ce phénomène a déjà été mis en évidence par (Grenier, 1995) : « Ces objets de savoir [qui relèvent de la combinatoire] ne sont pas explicites dans l'enseignement, soit qu'ils sont évacués (le problème est posé aux élèves de telle manière que la modélisation n'est pas en question), soit qu'ils sont considérés comme allant de soi » (p. 249). Il est d'ailleurs possible de remarquer que beaucoup de problèmes considérés comme « pour chercher », à l'école primaire et au collège, relèvent de savoirs combinatoires qui, jamais enseignés, ne sont jamais appris...

Le problème des triangles colorés est d'une toute autre nature. En effet, la situation ne se représente pas simplement par un arbre, car il n'y a pas de position privilégiée pour un triangle. La représentation de type arborescence produit des doublons. Dans Ermel, on trouve d'ailleurs : « La recherche des triangles colorés est plus problématique : certains enfants ont du mal à identifier des triangles identiques : découpages et rotations sont toujours nécessaires pour convaincre », ce qui montre bien que les auteurs connaissent les difficultés de la mise en œuvre de la situation. Par contre, la difficulté mathématique du passage d'une structure de type « arbre » à une structure de type « graphe », pour des élèves de collège et lycée, qui a été mise en évidence par (Bessot & Richard, 1980), n'est pas évoquée. En fait, la manière de structurer la collection est la question clé dans le problème des triangles colorés et non pas le nombre de couleurs, comme on pourrait le penser au départ. En ce sens, mettre n à la place de 4, c'est seulement jouer sur l'habillage pour l'adapter à un niveau scolaire donné. Une solution consiste à structurer la collection suivant le nombre de couleurs (monocolores, bicolores, tricolores), puis à dénombrer le nombre de triangles correspondants (monocolores : n , bicolores : $n(n-1)$, tricolores :

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3}, \text{ la division par 3 provenant de l'invariance par rotation de } 120^\circ.$$

C'est ici la partition de la collection qui donne la clé permettant de trouver une solution.

Nous voyons donc ici comment un problème, qui peut être donné au CP, peut également être problématique pour des élèves de lycée, voire au-delà.

Bibliographie

- Bessot, A., & Richard, F. (1980). Une étude sur le fonctionnement du schéma arbre par la commande de variable d'une situation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1 (3), 387-422.
- Briand, J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (1), 41-76.
- Briand, J., Loubet, M., & Salin, M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Paris : Hatier.
- ERMEL. (1991). *Apprentissages numériques, CP*. Paris : Hatier.
- Grenier, D. (1995). Savoirs mis en jeu dans des problèmes de combinatoire. In G. Arzac, J. Gréa, D. Grenier & A. Tiberghien (Éds.), *Différents types de savoirs et leur articulation* (p. 235-251) : La pensée sauvage.
- Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances : Analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Éds.), *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (p. 141-156). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Margolinas, C., Canivenc, B., De Redon, M.-C., Rivière, O., & Wozniak, F. (2004). Que nous apprend le travail mathématique hors classe pour la formation des maîtres. *Actes du 30ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres*.
- Margolinas, C., & De Redon, M.-C. (2006). Connaissances naturalisées dans le champ du numérique à l'articulation école maternelle / école primaire. *Actes de la 13ème école d'été de didactique des mathématiques*, Sainte Livrade. La pensée sauvage.
- Margolinas, C., Mercier, A., & René de Cotret, S. (2006). Développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire. Actes de *Quelles ressources pour l'enseignement des mathématiques*, INRP, Lyon.
http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/math_inrp/jmj06/.