Exercices de-ci, de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Serge PARPAY

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer à :

Serge Parpay
22 rue Rougier
79000 NIORT
ou par Mél à : jeanfromentin@wanadoo.fr

Rectificatifs (Bulletin n° 470)

1°) Dans le corrigé de l'exercice 468-3, à la fin de la page 414, remplacer B par A dans la formule $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BJ}$, et donc écrire $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AJ}$, et pour l'ordonnée de J et de C, remplacer le + par ±. À la 3ème ligne de la page 415, écrire :

$$2\cos(2t) - 1 = a(1 \pm 2\sin(t)).$$

Page 416, dans « Autre construction », inverser les rôles de A et B.

2°) Pour ce même exercice 468-3 de Raymond Raynaud, nous avons omis de signaler les solutions de l'auteur et de Olivier Ayassou (Saint-Laurent-de-Maroni), Richard Beczkowski (Chalon-sur-Saône), Georges Lion (Wallis), Pierre Renfer (Ostwald).

Exercices

Exercice 473-1 (Michel-Hébraud - Toulouse)

Au sujet de l'exercice 469-2 (Bulletin nº 472, page 776), Michel Hébraud propose : « *Pour aiguiser la curiosité, compléter la figure en définissant l'intersection des droites* (DE) *et* (BC) *en* V. *Le quadrangle ainsi défini a des propriétés intéressantes. Mais il y a bien d'autres pistes…* ».

Exercice 473-2 (Denis Page - Bourg-en Bresse)

Déterminer les extremums de $\cos a + \cos b + \cos c$, $\sin a + \sin b + \sin c$ et $|e^{ia} + e^{ib} + e^{ic}|$ quand a, b et c sont les angles d'un triangle.

Exercice 473-3 (Raymond Raynaud - Digne)

Soit deux triangles du plan ABC et A′B′C′.

Si les perpendiculaires menées des points A, B, C respectivement sur les droites (B′C′), (C′A′) et (A′B′) sont concourantes, en est-il de même des perpendiculaires menées respectivement des points A′, B′, C′ sur les droites (BC), (CA) et (AB) ?

Exercice 473-4 (Michel Lafond - Dijon)

Dans le plan, un triangle ABC a une aire de 1344 m². Un point P du plan vérifie PA = 25 m, PB = 33 et PC = 39 m.

Calculer les côtés de ABC.

Solutions

Exercice 470-1 (Corol'aire n° 41)

Démontrer que, pour tout ensemble $\{x, y, z\}$ de trois nombres réels quelconques, on a :

$$|x + y| + |y + z| + |z + x| \leq |x| + |y| + |z| + |x + y + z|.$$

À quel moment a-t-on l'égalité ?

Solution de Nicolas Pin (Saintes)

Remarquons tout d'abord que, pour tous réels x, y, z, α, β, γ :

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ x+z=\beta \\ y+z=\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)=x \\ \frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)=y \\ \frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)=z \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{aligned} &|x+y|+|y+z|+|z+x| \leq |x|+|y|+|z|+|x+y+z| \\ &\Leftrightarrow |\alpha|+|\beta|+|\gamma| \leq \frac{1}{2}\left(|\alpha-\beta+\gamma|+|-\alpha+\beta+\gamma|\right)+\frac{1}{2}\left(|\alpha+\beta-\gamma|+|\alpha+\beta+\gamma|\right) \end{aligned}$$

Nous allons montrer cette dernière inégalité.

Pour cela, quelques propriétés algébriques de la fonction « valeur absolue » nous seront utiles.

La première est la suivante : pour tous réels a et b, $|a - b| + |a + b| = 2\cdot\max(|a|, |b|)$.

D'où l'on déduit que, pour tous réels α, β, γ :

$$\begin{aligned} \mathrm{E} &= \frac{1}{2}\left(|\alpha-\beta+\gamma|+|-\alpha+\beta+\gamma|\right)+\frac{1}{2}\left(|\alpha+\beta-\gamma|+|\alpha+\beta+\gamma|\right) \\ &= \max\left(|\gamma|,|\alpha-\beta|\right)+\max\left(|\gamma|,|\alpha+\beta|\right) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tous réels α, β, γ :

$$\mathrm{E} \geq |\gamma|+|\alpha-\beta| \text{ et } \mathrm{E} \geq |\gamma|+|\alpha+\beta| \qquad (1)$$

Or, une autre propriété (cas particulier de la précédente…) de la valeur absolue nous dit que, pour tous réels α, β :

$$|\alpha|+|\beta| = \begin{cases} |\alpha-\beta| \text{ si } \alpha \text{ et } \beta \text{ ont des signes contraires} \\ |\alpha+\beta| \text{ si } \alpha \text{ et } \beta \text{ ont le même signe} \end{cases}$$

Il résulte alors de (1) que, pour tous réels α, β, γ :

$$E \geq |\alpha| + |\beta| + |\gamma|.$$

Ce qui prouve l'inégalité souhaitée.

Cas d'égalité. D'après (1) :
– Si α et β ont des signes contraires, on aura égalité si et seulement si :

$$|\alpha + \beta| \leq |\gamma| \leq |\alpha - \beta|.$$

– Si α et β ont le même signe, on aura égalité si et seulement si :

$$|\alpha - \beta| \leq |\gamma| \leq |\alpha + \beta|.$$

Autrement dit, on a égalité si et seulement si $|\gamma|$ est compris entre $|\alpha - \beta|$ et $|\alpha + \beta|$, c'est-à-dire si et seulement si $|y + z|$ est compris entre $|y - z|$ et $|2x + y + z|$.

Solution de Georges Lion (Wallis)
L'égalité est évidente si les trois nombres sont du même signe large ou bien si l'un d'eux est nul.

Sinon, éventuellement par permutation des lettres et changement des trois signes, on se ramène au cas suivant : x et $y > 0$, $z < 0$. Alors l'intervalle d'extrémités $x + z$ et $y + z$ est contenu dans $]z\,,\, x + y + z[$ et a le même milieu.
La fonction « valeur absolue » est convexe et non constante sur tout intervalle non ponctuel. La partie de sa courbe représentative pour t dans $]z\,,\, x + y + z[$ est contenue dans le demi-plan ouvert situé en dessous de la droite joignant les points d'abscisses z et $z + x + y$ de cette courbe.
D'où l'on déduit :

$$\frac{1}{2}\left(|x+z| + |y+z|\right) < \frac{1}{2}\left(|z| + |x+y+z|\right).$$

On termine en multipliant par 2 et en ajoutant $x + y$ des deux côtés.

Autres solutions : Olivier Ayassou (Cayenne), Robert Bourdon (Tourgeville), Jean-Claude Carrega (Lyon), Alain Corre (Moulin), René Manzoni (Le Havre), Raymond Raynaud (Dijon), Pierre Samuel (Hossegor).
Michel Lafond (Dijon) complète par l'inégalité :

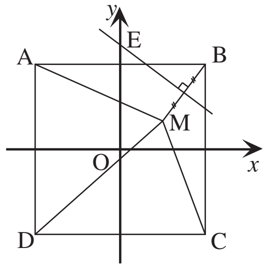
$$\begin{aligned} &|a+b| + |a+c| + |a+d| + |b+c| + |b+d| + |c+d| \\ &\quad \leq |a| + |b| + |c| + |d| + |a+b+c| + |a+b+d| + |a+c+d| + |b+c+d| + |a+b+c+d|. \end{aligned}$$

Pierre Renfer (Ostwald) étend l'inégalité à tout triplet de nombres complexes avec les modules,
Georges Vidiani (Dijon) précise que vous obtiendrez des renseignements plus complets en demandant « Hlawka inequality » sur votre moteur de recherche préféré.

Exercice 470-2 (Raymond Raynaud – Digne)
Étant donné un carré ABCD, quel est le lieu L du point M de son plan tel que les deux cercles ABM et CDM aient le même rayon ?

Solution de Pierre Samuel (Hossegor)

Prenons un repère orthonormé dont les axes sont ceux du carré ABCD.
Les coordonnées de ses sommets sont de la forme :
A $(-a\ ;\ a)$, B $(a\ ;\ a)$, C $(a\ ;\ -a)$, D $(-a\ ;\ -a)$.
Soient $(u\ ;\ v)$ les coordonnées d'un point M.
La médiatrice de [MB] a pour équation :



$$(u-a)\left(x-\frac{u+a}{2}\right)+(v-a)\left(y-\frac{v+a}{2}\right)=0.$$

Son intersection E avec la médiatrice de [AB] ($x = 0$), a pour ordonnée :

$$y=\frac{u^2+v^2-2a^2}{2(v-a)}.$$

Le point E est le centre du cercle circonscrit au triangle AMB dont le carré du rayon est donc :

$$\mathrm{R}^2=\mathrm{EB}^2=a^2+\left(\frac{u^2+v^2-2a^2}{2(v-a)}-a\right)^2=a^2+\left(\frac{u^2+v^2-2av}{2(v-a)}\right)^2.$$

Pour le cercle circonscrit au triangle CMD, on passe par la médiatrice de [MD], ce qui revient à changer a en $-a$; d'où le carré du rayon :

$$\mathrm{R}'^2=a^2+\left(\frac{u^2+v^2+2av}{2(v+a)}\right)^2.$$

L'égalité R = R′ se décompose en deux équations :

1) $$\frac{u^2+v^2-2av}{2(v-a)}=\frac{u^2+v^2+2av}{2(v+a)},$$

c'est-à-dire

$$(v+a)(u^2+v^2-2av)=(v-a)(u^2+v^2+2av)\ ;$$

$$2a(u^2+v^2)-4av^2=0\ ;$$

$$u^2-v^2=0.$$

On obtient la réunion des deux bissectrices $u = v$ et $u = -v$.
2) L'autre équation donne :

$$(v+a)(u^2+v^2-2av)-(v-a)(u^2+v^2+2av)=0,$$

c'est-à-dire :

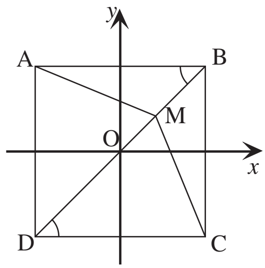
$$2v(u^2+v^2)-4a^2v=0.$$

On obtient la réunion de la droite $v = 0$ et du cercle circonscrit au carré ABCD.

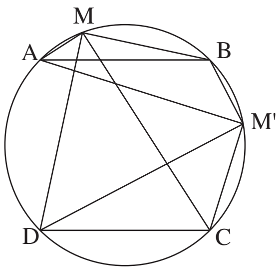
Complément :

Il est facile de voir directement que, si M appartient à l'une de ces trois droites ou à ce cercle, les cercles AMB et CMD ont même rayon. Pour cela, on note (F) la formule de la géométrie du triangle :

$$2\,\mathrm{R} = \frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{c}{\sin \mathrm{C}}.$$



Si M est sur l'axe $v = 0$, les deux triangles sont symétriques.
Si M est sur la diagonale $u = v$, les longueurs AM et CM sont égales par symétrie et les angles $\widehat{\mathrm{ABM}}$ et $\widehat{\mathrm{MDC}}$ sont égaux. On conclut par (F). De même si M est sur la diagonale $u = -v$.

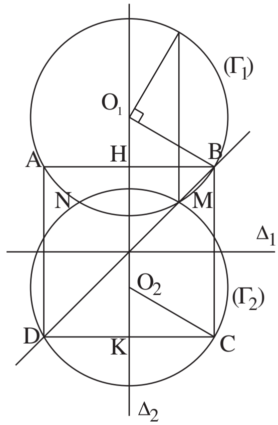


Si M est sur l'arc du cercle circonscrit au carré, le théorème sur l'angle au centre et l'angle inscrit montre que les angles $\widehat{\mathrm{AMB}}$ et $\widehat{\mathrm{DMC}}$ ont pour somme π et ont donc même sinus. Comme AB = DC, on conclut par (F).

Si M est sur l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ ou $\overset{\frown}{\mathrm{DA}}$, les angles sont égaux et on aboutit à la même conclusion.

Le calcul ci-dessus a cependant l'intérêt de montrer que le lieu cherché ne comprend rien d'autre que les trois droites et le cercle.

Solution de Jean-Claude Carrega (Lyon)

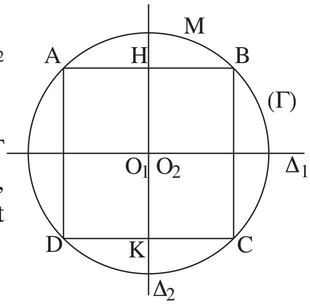


On note Δ_1 et Δ_2 les axes de symétrie du carré ABCD qui sont médiatrices des côtés. Δ_2 coupe [AB] en H et [CD] en K. Si M est un point du lieu L, on note Γ_1 le cercle ABM de centre O_1 et Γ_2 le cercle CDM de centre O_2. Ces cercles ont le même rayon R et leurs centres O_1 et O_2 sont sur l'axe Δ_2. Les cercles Γ_1 et Γ_2 peuvent être confondus ou tangents, sinon ils ont un autre point commun N symétrique de M par rapport à Δ_2. Le point N appartient aussi au lieu L. On a $\mathrm{BO}_1 = \mathrm{CO}_2 = \mathrm{R}$; il en résulte que les triangles rectangles BHO_1 et CKO_2 sont isométriques. On distingue deux cas suivant que $\overline{\mathrm{KO}_2} = \overline{\mathrm{HO}_1}$ ou $\overline{\mathrm{KO}_2} = -\overline{\mathrm{HO}_1}$.

Premier cas : $\overline{\mathrm{KO}_2} = \overline{\mathrm{HO}_1}$. On a alors $\overrightarrow{\mathrm{O}_2\mathrm{O}_1} = \overrightarrow{\mathrm{KH}}$ et le cercle Γ_1 est l'image du cercle Γ_2 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{KH}} = \overrightarrow{\mathrm{CB}}$. On raisonne sur le point noté M sur la figure. Il y a un raisonnement analogue pour le point N. On note M′ le point de Γ_1, image de M dans la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$. On a donc $\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \overrightarrow{\mathrm{CB}}$, d'où MM′ = CB = AB. Les cordes [AB] et [MM′] du cercle Γ_1 sont perpendiculaires et de même longueur. On passe de la corde [AB] à la corde [MM′] par la rotation de centre O_1 et d'angle $\pi/2$. Il en résulte que $\widehat{BO_1M'} = \dfrac{\pi}{2}$; cet angle au centre correspond à l'angle inscrit $\widehat{BMM'} = \dfrac{\pi}{4}$. Il en résulte que M est situé sur la droite (BD).

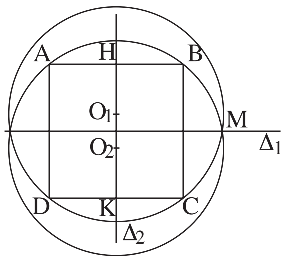
Réciproquement, soit M un point quelconque de la droite (BD) distinct de B et D. Comme dans la partie directe, on note Γ_1 et Γ_2 les cercles ABM et CDM. On a en angles de droites : $\left(\widehat{(MA),(MB)}\right) = \left(\widehat{(MA),(MD)}\right) = \left(\widehat{(MD),(MC)}\right)$, la dernière égalité s'obtenant par la symétrie par rapport à (BD). On note M′ le translaté de M dans la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$. On a alors $\left(\widehat{(M'A),(M'B)}\right) = \left(\widehat{(MD),(MC)}\right)$, d'où $\left(\widehat{(MA),(MB)}\right) = \left(\widehat{(M'A),(M'B)}\right)$. Ainsi les quatre points A, B, M et M′ sont cocycliques, donc $M' \in \Gamma_1$. Il en résulte que Γ_1 est l'image de Γ_2 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$; donc Γ_1 et Γ_2 ont le même rayon. Ainsi $M \in L$.
Au début de l'étude du premier cas, on a raisonné sur le point noté M sur la figure pour obtenir que la droite (BD) privée des points B et D fait partie du lieu L. En raisonnant sur le point N symétrique de M par rapport à Δ_2, on obtient aussi que la droite (AC) privée des points A et C fait partie du lieu L.

Deuxième cas : $\overline{KO_2} = -\overline{HO_1}$. Dans ce cas, on a $\Gamma_1 = \Gamma_2$ ou Γ_1 et Γ_2 distincts et symétriques par rapport à Δ_1.



– Si $\Gamma_1 = \Gamma_2$, alors Γ_1 et Γ_2 coïncident avec le cercle Γ circonscrit au carré ABCD et $M \in \Gamma$. Réciproquement, il est clair que tout point M de Γ, distinct de A, B, C et D, est dans L.

– Si Γ_1 et Γ_2 sont distincts et symétriques par rapport à Δ1, on a $M \in \Delta_1$. Réciproquement, soit M un point quelconque de Δ_1. Les cercles ABM et CDM sont alors symétriques par rapport à Δ_1.



Conclusion : le lieu L est la réunion de la droite Δ_1, du cercle circonscrit au carré ABCD, des droites (AC) et (BD), réunion privée des points A, B, C et D.

Autres solutions : Robert Bourdon (Tourgeville), Alain Corre (Moulin), René Manzoni (Le Havre), Albert Marcout (Sainte-Savine), Christian Perroud (Habère-Lullin), Raymond Raynaud (Dijon), Pierre Renfer (Ostwald).

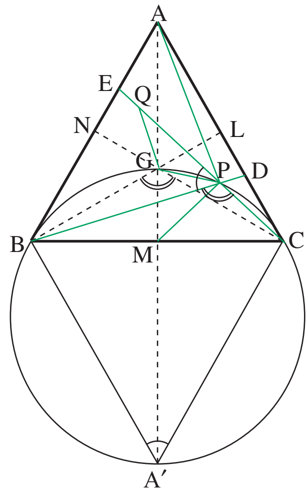
Marc Roux (Nîmes) propose un prolongement : *Étant donné un rectangle* ABCD, *quel est le lieu* L *du point* M *de son plan tel que les deux cercles* ABM *et* CDM *aient le même rayon ?* Il encourage à l'exploration du problème avec Géogébra.

Exercice 470-3 (Miguel Amengual Covas – Espagne)

Soient un triangle équilatéral ABC, les points D et E situés respectivement sur les côtés [AB] et [AC] et tels que les segments [AE] et [CD] soient de même longueur. Soient M le milieu du côté BC et P l'intersection de BD et CE.

Montrer que les angles $\widehat{\mathrm{APE}}$ et $\widehat{\mathrm{BPM}}$ sont égaux.

Solution de Raymond Raynaud (Digne)



Soit G le centre de gravité du triangle ABC. La rotation de centre G et d'angle 120° envoie le triangle BCD sur le triangle CAE, la droite (BD) sur la droite (CE), et le point P de (BD) sur le point Q de (CE).

L'angle aigu $\widehat{\mathrm{BPE}}$ des droites (BD) et (CE) vaut 60°, et comme l'angle $\widehat{\mathrm{P}}$ du triangle GPQ vaut 30°, la droite (PG) apparaît comme la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{BPE}}$.

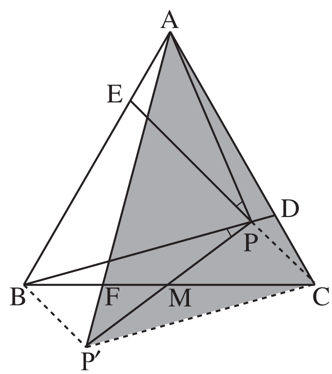
Pour démontrer que les angles $\widehat{\mathrm{APE}}$ et $\widehat{\mathrm{BPM}}$ sont égaux, il suffit donc de prouver que la droite PG est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{APM}}$.

Soit A′ le symétrique du point A par rapport à la droite (BC).

Le quadrilatère PBA′C dont les angles $\widehat{\mathrm{P}}$ et $\widehat{\mathrm{A'}}$ sont supplémentaires est inscrit dans le cercle de diamètre [GA′], lieu des points dont le rapport des distances aux points A et M est égal à 2. En particulier PA/PM = 2.
Dans le triangle APM, GA/GM = 2. Donc GA/GM = PA/PM.

La droite PG est la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{APM}}$.

Solution de Isabelle Lallier-Girot (Créteil)



ABC est équilatéral, D est sur [AC], E sur [AB], AE = CD, P est l'intersection de (BD) et de (CE), M est le milieu de [BC].
On construit P′ symétrique de P par rapport à M, donc BPCP′ est un parallélogramme. $\widehat{\mathrm{PBC}} = \widehat{\mathrm{BCP'}}$; de plus les triangles BCE et ABD sont isométriques : BE = AD, BC = AB, $\widehat{\mathrm{CBE}} = \widehat{\mathrm{BAD}} = 60^\circ$. On en

déduit $\widehat{EBD} = \widehat{BCE}$; or $\widehat{EBD} = \widehat{EBP}$ et $\widehat{BCE} = \widehat{BCP}$; donc $\widehat{EBP} = \widehat{BCP}$.

D'où $\widehat{P'CP} = \widehat{P'CB} + \widehat{BCP} = \widehat{P'CB} + \widehat{EBP}$.

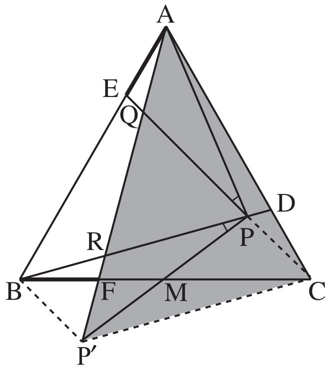
Comme (BP) // (P′C), on a $\widehat{P'CB} = \widehat{CBP}$; d'où $\widehat{P'CP} = \widehat{CBP} + \widehat{EBP} = 60°$.
Le parallélogramme BPCP′ a des angles de 60° et 120° ; A, B, C et P′ sont donc cocycliques d'où $\widehat{AP'C} = 60°$.

F est le point d'intersection de (AP′) et (BC).

Dans le triangle ABP′, on a $\widehat{ABP'} = \widehat{ABD} + \widehat{PBP'} = \widehat{ABD} + 60°$ et $\widehat{BP'A} = 60°$;
donc $\widehat{BAP'} = 60° - \widehat{ABD} = \widehat{DBC}$.

Comme $\widehat{BAP} = \widehat{BAF}$, on a $\widehat{DBC} = \widehat{BAF}$. De plus BC = AB et $\widehat{DCB} = \widehat{ABF} = 60°$.
Donc les triangles BCD et ABF sont isométriques. On en déduit que BF = DC.

On construit Q comme intersection de (EC) et (AF) et R comme intersection de (BD) et (AF). Comme $\widehat{BPC} = 120^\circ$, on a $\widehat{BPE} = 60^\circ$. Par permutation, on a $\widehat{CQF} = 60^\circ$ et $\widehat{ARD} = 60^\circ$; le triangle PQR est donc équilatéral.



La bissectrice de $\widehat{RPQ}$ est la médiatrice de [QR].

Les angles $\widehat{PRQ}$ et $\widehat{RPQ}$ sont opposés par le sommet, donc $\widehat{BRP'} = 60°$; comme $\widehat{RBP'} = 60°$, le triangle RBP′ est équilatéral. On en déduit que BR = RP′ ; or par permutation AQ = BR. On a donc AQ = RP′ ; le milieu de [AP′] est donc celui de [QR], les segments [QR] et [AP′] ont la même médiatrice passant par P, le triangle APP' est isocèle en P ; d'où la bissectrice de $\widehat{RPQ}$ est aussi celle de $\widehat{APP'}$.

Les angles $\widehat{APQ} = \widehat{APE}$ et $\widehat{RPP'} = \widehat{BPM}$ sont égaux.

Autres solutions : Jean-Claude Carrega (Lyon), Alain Corre (Moulin), René Manzoni (Le Havre), Albert Marcout (Sainte-Savine), Christian Perroud (Habère-Lullin), Pierre Renfer (Ostwald),

Exercice 470-4 (Georges Lion - Wallis)

Soit C (de rayon R) et Γ deux cercles de centres O et Ω, orthogonaux en A et B. Une droite menée par O coupe [AB] en P et Γ en M et N respectivement intérieur et extérieur à C.
1) Exprimer la longueur OP en fonction de la longueur OM ; si [A′B′] est une corde

non diamétrale de C, passant par P, que dire du cercle circonscrit au triangle A′MB′ ?
2) Exprimer le rapport PA/PB en fonction du rapport MA/MB.

Solution de Robert Bourdon (Tourgeville)

1) Les cercles sont orthogonaux, donc $\widehat{\mathrm{OA\Omega}} = \dfrac{\pi}{2}$. Soit $\mathrm{O\Omega} = d$, $\widehat{\Omega\mathrm{OM}} = \alpha$, $\Omega\mathrm{A} = \rho$ et $(\Omega\mathrm{K}) \perp (\mathrm{MN})$.

$\Omega\mathrm{K} = d\sin\alpha$; $\rho^2 = d^2 - \mathrm{R}^2$; $\mathrm{MK}^2 = \rho^2 - d^2\sin^2\alpha = d^2\cos^2\alpha - \mathrm{R}^2$;

$\mathrm{MK} = \sqrt{d^2\cos^2\alpha - \mathrm{R}^2}$. Or $\mathrm{OK} = d\cos\alpha$; d'où

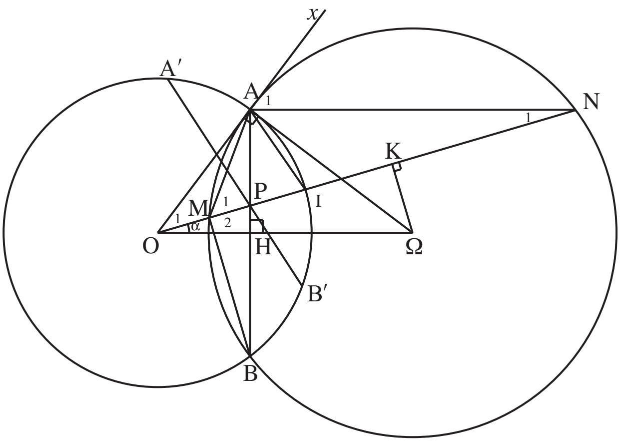
$$\mathrm{OM} = d\cos\alpha - \sqrt{d^2\cos^2\alpha - \mathrm{R}^2} \qquad (1)$$

Dans le triangle $\mathrm{OA\Omega}$, $\mathrm{OA}^2 = \mathrm{OH}\times\mathrm{O\Omega}$; $\mathrm{OH} = \dfrac{\mathrm{R}^2}{d}$.

Dans le triangle OHP, $\mathrm{OP} = \dfrac{\mathrm{OH}}{\cos\alpha} = \dfrac{\mathrm{R}^2}{d\cos\alpha}$. D'où $d\cos\alpha = \dfrac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{OP}}$, et en remplaçant dans (1), $\mathrm{OM} = \dfrac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{OP}} - \sqrt{\dfrac{\mathrm{R}^4}{\mathrm{OP}^2} - \mathrm{R}^2}$ ou $\mathrm{OM}\times\mathrm{OP} = \mathrm{R}^2 - \sqrt{\mathrm{R}^4 - \mathrm{R}^2\times\mathrm{OP}^2}$, ou

$$\mathrm{OP}^2\left(\mathrm{OM}^2 + \mathrm{R}^2\right) - 2\mathrm{R}^2\times\mathrm{OM}\times\mathrm{OP} = 0 .$$

$\mathrm{OP} = 0$ n'a pas de sens. Il reste $\mathrm{OP} = \dfrac{2\mathrm{R}^2\times\mathrm{OM}}{\mathrm{OM}^2 + \mathrm{R}^2}$.



2) Soit la corde A′B′. $\left.\begin{array}{l}\text{Dans (C)}, \mathrm{PA'}\times\mathrm{PB'} = \mathrm{PA}\times\mathrm{PB} \\ \text{Dans } (\Gamma),\ \mathrm{PA}\times\mathrm{PB} = \mathrm{PM}\times\mathrm{PN}\end{array}\right\}$, d'où $\mathrm{PA'}\times\mathrm{PB'} = \mathrm{PM}\times\mathrm{PN}$.

Le cercle circonscrit à A′B′M passe par N. En outre, $OA^2 = OM \times ON$. Or OA = OA′, d'où $OA'^2 = OM \times ON$. Donc le cercle MA′NB′ est orthogonal au cercle (C).

3) Dans le triangle AMP, $\dfrac{AP}{\sin \widehat{M_1}} = \dfrac{AM}{\sin \widehat{APM}}$; dans le triangle BMP, $\dfrac{AP}{\sin \widehat{M_2}} = \dfrac{MB}{\sin \widehat{BPM}}$. Or $\widehat{APM} = \pi - \widehat{BPM}$; leurs sinus sont donc égaux, d'où $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AM}{MB} \times \dfrac{\sin \widehat{M_1}}{\sin \widehat{M_2}}$. Dans le triangle AMN, $\dfrac{AN}{\sin \widehat{M_1}} = \dfrac{MN}{\sin \widehat{MAN}}$; dans le triangle BMN, $\dfrac{BN}{\sin \widehat{M_2}} = \dfrac{MN}{\sin \widehat{MBN}}$. Or $\widehat{MAN} = \pi - \widehat{MBN}$, leurs sinus sont donc égaux, d'où

$\dfrac{\sin \widehat{M_1}}{\sin \widehat{M_2}} = \dfrac{AN}{BN}$.

Soit I l'intersection de (OP) avec (C), on mène (AI) et (BI). $\widehat{MAI} = \widehat{OA\Omega} - \widehat{OAM} - \widehat{IA\Omega}$. Or $\widehat{OAM} = \widehat{ANM}$ et $\widehat{IA\Omega} = \dfrac{\widehat{IOA}}{2}$.

D'où $\widehat{MAI} = 90° - \widehat{N_1} - \dfrac{\widehat{O_1}}{2}$.

$\widehat{IAN} = \widehat{IA\Omega} + \widehat{\Omega AN} = \widehat{IA\Omega} + 90° - \widehat{NAx}$. Or, comme angle extérieur à $\widehat{OAN}$, on a $\widehat{NAx} = \widehat{O_1} + \widehat{N_1}$; d'où $\widehat{IAN} = 90° - \widehat{O_1} - \widehat{N_1} + \dfrac{\widehat{O_1}}{2} = 90° - \dfrac{\widehat{O_1}}{2} - \widehat{N_1}$.

Donc $\widehat{IAN} = \widehat{IAM}$. (IA) est bissectrice de $\widehat{MAN}$, d'où $\dfrac{IM}{IN} = \dfrac{AM}{AN}$.

On démontre de même $\dfrac{IM}{IN} = \dfrac{BM}{BN}$; d'où $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{BM}{BN}$; $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{AN}{BN} = \dfrac{\sin \widehat{M_1}}{\sin \widehat{M_2}}$.

D'où $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AM}{MB} \times \dfrac{AM}{MB} = \left(\dfrac{AM}{BM}\right)^2$.

Autres solutions : Jean-Claude Carrega (Lyon), Alain Corre (Moulin), René Manzoni (Le Havre), Albert Marcout (Sainte-Savine), Christian Perroud (Habère-Lullin), Raymond Raynaud (Digne), Pierre Renfer (Ostwald).