Exercices de ci, de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

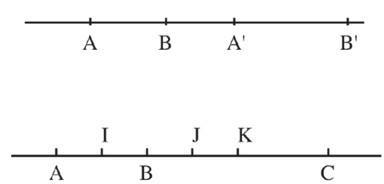
Serge Parpay

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer à :
APMEP (Groupe du Clain)
IREM, Faculté des Sciences,
40 avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS cedex
ou par Mél à : jeanfromentin@wanadoo.fr

Exercices

Exercice 472-1 Olympiades suédoises (Supplément au Corol'aire n° 18)
Quelle est la circonférence du plus grand cercle que l'on peut tracer dans les carrés noirs d'un échiquier dont les carrés ont 4 cm de côté ?

Exercice 472-2 Petits exercices pour amateurs (Supplément au Corol'aire n° 23)
a) Soient quatre points alignés A, B, A′, B′, avec AB < A′B′. Construire le centre d'homothétie transformant [AB] en [A′B′].
b) Sur une droite, trois points A, B et C, le milieu I de [AB], le milieu J de [AC] et le milieu K de [BC]. Montrer que [CI] et [JK] ont même milieu.

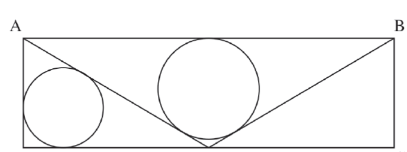


Exercice 472-3* (Serge Parpay – Niort, Corol'aire n° 61)
On désigne par E(x) la partie entière du nombre fractionnaire x.
1) Si x est une fraction irréductible, montrer que x – E(x) l'est aussi.
2) Montrer que l'on a :

$$\mathrm{E}(x)+\mathrm{E}\left(x+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\mathrm{E}\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\mathrm{E}(nx).$$

* Extrait du livre « Arithmétique, classe de mathématiques », Maillard et Millet (Hachette 1960).

Exercice 472-4 (Daniel Reisz – Auxerre)
Une unité de longueur étant choisie, on demande de déterminer les dimensions du rectangle ABCD. Le point M étant le milieu



de [CD], on sait que les rayons des cercles inscrits aux triangles ABM et ADM mesurent respectivement 4 et 3.

Solutions

Exercice 469-1 (Louis Rivoallan (La Rochelle) – Corol'aire n° 59)

On considère les nombres à n chiffres (en base dix) tels que leur carré se termine par les mêmes n chiffres. On accepte que contrairement à l'usage, les chiffres « de gauche » soient égaux à 0. Il y a à l'évidence deux nombres qui répondent à la question : 0 et 1, que l'on fait précéder de $(n - 1)$ zéros avec la convention précédente. Montrer, que pour tout n, il y a exactement deux autres nombres écrits avec n chiffres qui répondent à cette condition.

Solution de Christian Dufis (Limoges)

Avec la convention d'écriture de l'énoncé, il s'agit de démontrer la propriété P(n) suivante :

Pour tout entier $n > 0$, il existe quatre nombres de n chiffres tels que leur carré se termine par les mêmes n chiffres. Ce sont :

- $\underbrace{0\ldots\ldots0}_{n \text{ chiffres}}$,
- $\underbrace{0\ldots\ldots0}_{n-1 \text{ chiffres}}1$,
- *deux autres nombres, l'un se terminant par* 5 *et l'autre par* 6.

On raisonne par récurrence pour $n \geq 1$. Un calcul élémentaire montre que :
P(1) est vraie : les solutions sont 0, 1, 5 et 6,
P(2) est vraie : On obtient 00, 01, 25 et 76.
Supposons la propriété vraie à l'ordre n et démontrons la à l'ordre $n + 1$.

Soit donc $\mathrm{N} = \overline{u_n u_{n-1} \ldots u_1 u_0}$ un nombre de $n + 1$ chiffres tel que son carré se termine par les mêmes $n + 1$ chiffres et posons $\mathrm{A} = \overline{u_{n-1} \ldots u_1 u_0}$. On a $\mathrm{A} = \mathrm{N} - u_n 10^n$, d'où $\mathrm{A}^2 = \mathrm{N}^2 - 2u_n \mathrm{N} 10^n + u_n^2 10^{2n}$. De cette dernière égalité résulte que les n derniers chiffres de A^2 sont les mêmes que les n derniers chiffres de N^2. Or les n derniers chiffres de N^2 sont les mêmes que les n derniers chiffres de N, c'est-à-dire les chiffres de A.

Ainsi A est un nombre de n chiffres dont le carré se termine par les mêmes n chiffres.

D'après l'hypothèse de récurrence, A est donc $\underbrace{0\ldots\ldots0}_{n \text{ chiffres}}$, $\underbrace{0\ldots\ldots0}_{n-1 \text{ chiffres}}1$, ou un nombre de n chiffres se terminant par 5 ou 6.

Par ailleurs, on a $\mathrm{N} = u_n 10^n + \mathrm{A}$; d'où $\mathrm{N}^2 = u_n^2 10^{2n} + 2\mathrm{A} u_n 10^n + \mathrm{A}^2$. Or d'après ce qui vient d'être dit sur A, il existe un entier naturel q et un seul tel que $\mathrm{A}^2 - \mathrm{A} = q 10^n$.

On en déduit :

$$N^2 - N = u_n^2 10^{2n} + u_n(2A-1)10^n + q10^n,$$

ou encore :

$$N^2 - N = 10^n\left(u_n^2 10^n + u_n(2A-1) + q\right).$$

Cela étant, pour que les $n + 1$ derniers chiffres de N^2 soient les mêmes que les $n + 1$ chiffres de N, il faut et il suffit que $N^2 - N$ soit un multiple de 10^{n+1} et donc il faut et il suffit que $u_n(2A-1)+q$ soit multiple de 10. Posons $E = u_n(2A-1)+q$.
Nous allons prouver que pour chacune des quatre valeurs possibles de A il existe une valeur et une seule de u_n telle que E soit multiple de 10.

- $A = \underbrace{0\ldots\ldots0}_{n \text{ chiffres}}$. Comme $A^2 - A = q10^n$, alors $q = 0$ et donc $E = -u_n$. Par suite, E sera un multiple de 10 si et seulement si $u_n = 0$. Dans ce cas $N = \underbrace{0\ldots\ldots0}_{n+1 \text{ chiffres}}$.
- $A = \underbrace{0\ldots\ldots0}_{n-1 \text{ chiffres}}1$. On a encore $A^2 - A = 0$, d'où $q = 0$ et $E = u_n$. Par suite, E sera multiple de 10 si et seulement si $u_n = 0$ et on a ici $N = \underbrace{0\ldots\ldots0}_{n \text{ chiffres}}1$.
- **A se termine par 5.** Reprenons l'expression $E = u_n(2A-1)+q$ et soit v_0 le chiffre des unités de q. On a : $q \equiv v_0 \bmod(10)$ et $u_n(2A-1) \equiv -u_n \bmod(10)$. Donc $E \equiv v_0 - u_n \bmod(10)$. Comme $-9 \leq v_0 - u_n \leq 9$, , alors E est multiple de 10 si et seulement si $u_n = v_0$.
- **A se termine par 6.** On a ici $q \equiv v_0 \bmod(10)$ et $u_n(2A-1) \equiv u_n \bmod(10)$. Donc $E \equiv u_n + v_0 \bmod(10)$. Pour que E soit multiple de 10, il faut et il suffit que $u_n = 0$ si $v_0 = 0$ et que $u_n = 10 - v_0$ si $v_0 \neq 0$.

Ainsi, dans les quatre cas ci-dessus, il existe une valeur de u_n et une seule telle que E soit multiple de 10. P(n + 1) est donc vraie, ce qui prouve la propriété de l'énoncé.
Voici les 15 premières solutions autres que les solutions triviales 0 et 1 données par un programme informatique calqué sur le raisonnement ci-dessus.

5 ; 6
25 ; 76
625 ; 376
0625 ; 9376
90625 ; 09376
890625 ; 109376
2890625 ; 7109376
12890625 ; 87109376
212890625 ; 787109376
8212890625 ; 1787109376
18212890625 ; 81787109376

918212890625 ; 081787109376
9918212890625 ; 0081787109376
59918212890625 ; 40081787109376
259918212890625 ; 740081787109376

Autres solutions : Christine Fenoglio (Lyon), René Manzoni (Le Havre) et Alain Corre (Moulins).

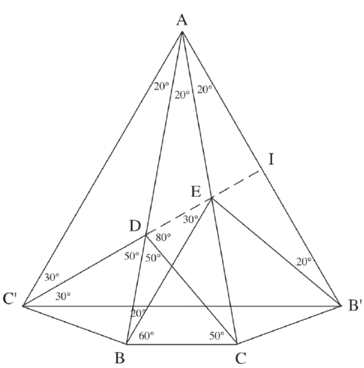
Exercice 469-2 (Jean Raynier – Marseille), relayé par Henri Bareil.

On donne un triangle isocèle ABC (AB = AC) tel que $\widehat{BAC} = 20°$. Sur [AC] on prend le point E tel que $\widehat{EBC} = 60°$. Sur [AB] on prend le point D tel que $\widehat{DCB} = 50°$. Que valent, en degrés, les angles $\widehat{EDC}$ et $\widehat{DEB}$?

Le texte de ce problème qui a intrigué notre collègue Jean Raynier figure dans le livre « Géométrie classique et mathématiques modernes » de Brigitte Sénéchal aux éditions Hermann (1976).

Solution de Jean Lefort – Wintzenheim qui a ajouté le commentaire suivant :

J'ai hésité à ajouter un commentaire permettant de savoir comment on peut imaginer une telle solution qui ne demande que des connaissances de collège.
L'idée c'est d'abord de faire une figure précise et de mesurer les angles. On se doute alors de leurs valeurs rondes et l'apparition d'un angle de 30° peut faire penser à mettre en place un triangle équilatéral. Mais c'est loin d'être évident pour un collégien !
Personnellement j'avais vu ce problème il y a une vingtaine d'année et je me souvenais de l'astuce.



• On note les valeurs des angles du triangle BCD : 80° en B, 50° en C, 50° en D. L'angle en C du triangle ACD vaut donc 30°.
• On note les valeurs des angles du triangle BCE : 60° en B, 80° en C. L'angle en B du triangle ABE vaut donc 20° et le triangle ABE est isocèle.
• Soit B′ le symétrique de B par rapport à (AC) et C′ le symétrique de C par rapport à (AB). Le triangle AB′C′ est équilatéral car isocèle ayant un angle de 60° en A.

On en déduit que l'angle $\widehat{B'C'B}$ vaut 20° (80° de $\widehat{BC'A}$ – 60° de $\widehat{B'C'A}$).

Par suite l'angle $\widehat{B'C'D}$ vaut 30°.
• Nous voyons donc que (C′D) est la bissectrice de l'angle en C′ du triangle AB′C′. C'est donc aussi la médiatrice de [AB′] qu'elle coupe en son milieu I.
• Le triangle AB′E est isocèle comme symétrique du triangle ABE. Par conséquent la médiatrice de [AB′] est la droite (IE).

Conclusion : Les droites (C′D) et (IE) sont identiques ; les points C′, D, E et I sont alignés. Il est alors facile de calculer les angles $\widehat{EDC}$ et $\widehat{DEB}$ qui valent respectivement 80° et 30°.

Solution de Bruno Alaplantive – St Jean du Falga

Solution qui utilise uniquement des « outils » de Troisième.

Figure 1 : Selon les données, on peut calculer les angles indiqués sur la figure. On en déduit particulièrement que le triangle BCD est isocèle et que BC est égale à BD.

Figure 2 : Le cercle de centre B passant par C et par D coupe le côté [AC] en F. Le triangle CBF est isocèle avec un angle de 80° à la base.

Figure 3 : Le triangle BFD est isocèle avec un angle de 60°, c’est donc un triangle équilatéral. Le triangle BFE qui a deux angles égaux est isocèle, et FD est égale à FE. Finalement, FB = FD = FE et les trois points B, D et E sont sur un même cercle de centre F.
Pour la corde [BD] l’angle au centre vaut 60° et donc l’angle inscrit en E vaut lui 30°.

Il s’ensuit que l’angle $\widehat{EDC}$ vaut 80°.

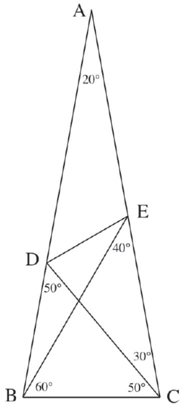


Figure 1

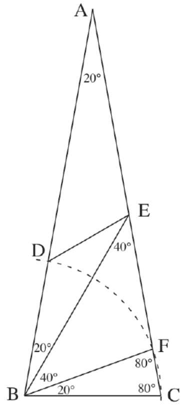


Figure 2

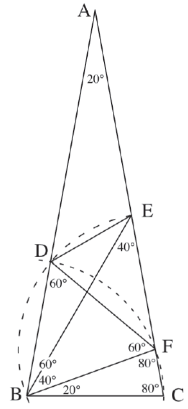


Figure 3

Autres solutions qui font appel à la trigonométrie : Henri Bareil (Toulouse), Alain Corre (Moulins), Christian Dufis (Limoges), Christine Fenoglio (Lyon), René Manzoni (Le Havre), A. Marcout (Sainte-Savine), Christian Perroud (Habère-Lullin), Raymond Raynaud (Digne).
Signalons aussi une solution que Monique Maze (Clermont-Ferrand) propose dans le livre du professeur du manuel Transmath de 5ème.

Exercice 469-3 (Laurent Rouzière - Albi)

J’ai eu une question l’an passé en classe de seconde à propos de la construction de « l’escargot de Pythagore », voir figure page suivante.
Les longueurs AB, BC, CD, DE, … valent 1.

La question posée par un élève était la suivante : « Est-ce que, si on continue la construction, on peut trouver un point aligné avec A et B ? »

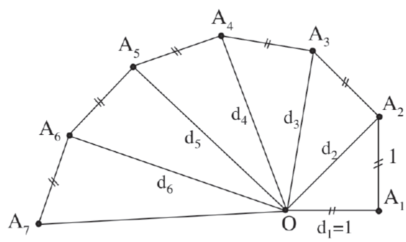
Solution de Fabrice Laurent (Provins)

Notations

Je change un peu les notations du problème afin d'en faciliter la mise en équation.

Pour tout $n \geq 1$, les triangles OA_nA_{n+1} sont tous rectangles en A_n et tels que $A_nA_{n+1} = 1$.

On pose $d_n = OA_n$ et $\theta_n = (OA_n\ ;\ OA_{n+1})$.



Dans un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ avec $\vec{u}=\overrightarrow{OA_1}$, on appelle Z_n l'affixe du point A_n : $Z_n = X_n + iY_n$ ($X_1 = 1$ et $Y_1 = 0$).

Expression de d_n

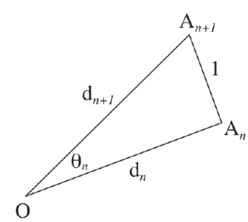
On peut facilement montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :

$d_n = \sqrt{n}$.

Expression de Z_{n+1} en fonction de Z_n

Soit S_n la similitude de centre O telle que

$A_{n+1} = S_n\left(A_n\right)$. On a : $Z_{n+1} = a_n \times Z_n$, avec $\left|a_n\right| = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$



et $\operatorname{Arg}\left(a_n\right) = \theta_n$.

θ_n est tel que : $\cos\left(\theta_n\right) = \dfrac{d_n}{d_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$; $\sin\left(\theta_n\right) = \dfrac{1}{d_{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Donc $a_n = \left|a_n\right| \times \left[\cos\left(\theta_n\right) + i\sin\left(\theta_n\right)\right] = \dfrac{\sqrt{n}+i}{\sqrt{n}}$.

Donc $Z_{n+1} = a_n \times Z_n = \dfrac{\sqrt{n}+i}{\sqrt{n}} \times \left(X_n + iY_n\right) = \dfrac{X_n\sqrt{n}-Y_n}{\sqrt{n}} + i\dfrac{Y_n\sqrt{n}+X_n}{\sqrt{n}}$.

$$\begin{cases} X_{n+1} = \dfrac{X_n\sqrt{n}-Y_n}{\sqrt{n}} \\ Y_{n+1} = \dfrac{Y_n\sqrt{n}+X_n}{\sqrt{n}} \end{cases}$$ (ce qui permet de tracer la suite des points A_n)

Recherche des points A_n alignés avec O et A_1

O, A_1 et A_n sont alignés si et seulement si $X_n = \sqrt{n}$ et $Y_n = 0$, ou $X_n = -\sqrt{n}$ et

$Y_n = 0$, soit encore $X_{n+1} = \dfrac{n}{\sqrt{n}}$ et $Y_{n+1} = 1$ ou $X_{n+1} = -\dfrac{n}{\sqrt{n}}$ et $Y_{n+1} = -1$.

Or : $d_{n+1} = \sqrt{X_{n+1}^2 + Y_{n+1}^2} = \sqrt{n+1}$, ce qui conduit à l'unique solution $n = 1$.

Conclusion : il n'existe aucun point A_n qui soit aligné avec O et A_1.

Solution de Pierre Renfer (Ostwald)

Comme nous-mêmes, Pierre Renfer constate avec plaisir qu'« *il existe encore des élèves de seconde curieux qui posent des questions pertinentes pour faire réfléchir leurs professeurs* ».

Il n'existe pas de point de l'escargot aligné avec A et B.

1) Pour la démonstration, on va montrer d'abord un lemme intéressant en soi :
Soient p_1, p_2, …, p_n des nombres premiers distincts.

Les corps $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$, $\mathbb{Q}\left(\mathrm{i}, \sqrt{p_1}\right)$, $\mathbb{Q}\left(\mathrm{i}, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}\right)$, …, $\mathbb{Q}\left(\mathrm{i}, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}\right)$ obtenus en adjoignant au corps $\mathbb{Q}$ le nombre complexe i *puis les racines des nombres premiers p_1, p_2, …, p_n successivement, forment une suite strictement croissante (au sens de l'inclusion).*

On peut généraliser l'énoncé en remplaçant p_1, p_2, …, p_n par des rationnels dont les numérateurs et dénominateurs sont $2n$ entiers deux à deux premiers entre eux et quadratfrei (sans diviseur carré).
On va démontrer l'énoncé général par récurrence sur n :

Pour $n = 1$, si $\mathbb{Q}\left(\mathrm{i}, \sqrt{p_1}\right)$ était égal à $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$, il existerait des rationnels a et b tels que :

$\sqrt{p_1} = a + \mathrm{i}b$. Alors $b = 0$ et $\sqrt{p_1} = a$, ce qui est absurde.

Supposons le résultat vrai pour n. Alors si $K' = \mathbb{Q}\left(\mathrm{i}, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}\right)$ était égal à $K'' = \mathbb{Q}\left(\mathrm{i}, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}, \sqrt{p_{n+1}}\right)$, il existerait des éléments a et b du corps $K = \mathbb{Q}\left(\mathrm{i}, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_{n-1}}\right)$ tels que : $\sqrt{p_{n+1}} = a + b\sqrt{p_n}$.

Alors : $p_{n+1} = a^2 + b^2 p_n + 2ab\sqrt{p_n}$.

Donc $ab = 0$, sinon $\sqrt{p_n}$ appartiendrait à K, ce qui est contraire à l'hypothèse de récurrence.

Ou bien $b = 0$ et $\sqrt{p_{n+1}} = a$ appartiendrait à K, ce qui est contraire à l'hypothèse de récurrence.

Ou bien $a = 0$ et $\sqrt{\dfrac{p_{n+1}}{p_n}}$ appartiendrait à K, ce qui est contraire à l'hypothèse de récurrence.

2) Revenons à l'escargot de Pythagore.

Soit α_n l'angle en A du n-ième triangle. Alors $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n} = \dfrac{\sqrt{n}+\mathrm{i}}{\sqrt{n+1}}$.

Si la somme des n premiers angles α_1, α_2, …, α_n était l'angle nul ou plat, alors on aurait : $\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_k} = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{\sqrt{k}+\mathrm{i}}{\sqrt{k+1}} = \pm 1$, ce qui peut aussi s'écrire : $\prod_{k=1}^{n} \dfrac{\sqrt{k}+\mathrm{i}}{\sqrt{k}} = \pm\sqrt{n+1}$ ou encore :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}\right) = \pm\sqrt{n+1} \qquad (1)$$

Soient p_1, p_2, …, p_n les facteurs premiers, dans l'ordre croissant, intervenant dans les décompositions des $n + 1$ premiers entiers 1, 2, …, n, $n + 1$.
Le plus grand nombre premier p_n ne divise qu'un seul des entiers 1, 2,…, n, $n + 1$, car d'après le théorème de Tchebichev, il existe un nombre premier strictement compris entre tout nombre supérieur ou égal à 2 et son double.
Le nombre premier p_n figure donc sous un et un seul radical de l'égalité (1).

On déduit ainsi de (1) que $\sqrt{p_n}$ appartient à $\mathbb{Q}\left(\mathrm{i}, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_{n-1}}\right)$, ce qui contredit le lemme.

Autre solution : René Manzoni (Le Havre).