Calcul mental

Gilles Bourdenet(*)

1. Introduction

Nous avons tous constaté que les élèves qui arrivent maintenant au collège sont moins familiers avec les nombres, les tables de multiplication, les opérations mentales sur les nombres, ils ont beaucoup moins d'expérience que ces mêmes élèves il y a 10 ans… En effet, même en dehors de l'école, la calculatrice est présente presque partout et là où, auparavant, on posait des opérations sur papier, on entretenait le calcul mental de base, maintenant, c'est la calculatrice qui prend le relais.

De même, là où auparavant on faisait fonctionner sa tête pour des raisonnements et calculs liés à la proportionnalité (prix de 2 kg, de 300g de pommes, …), les machines s'en chargent automatiquement. L'usage de la calculatrice est déjà présent dans les programmes de cycle 2 de l'école primaire. Il peut renforcer ainsi l'idée que, devant un calcul qui pose des difficultés, la solution est de prendre cet outil, sans se poser trop de questions.

Différentes évaluations confirment l'impression ressentie à l'entrée en sixième, impression qui se confirme ou s'amplifie tout au long du collège : les compétences relatives au calcul, en particulier au calcul mental sont de moins en moins bien maîtrisées.

- En 1996, à l'entrée en sixième, 25% des élèves ne maîtrisent pas les compétences de base concernant les opérations élémentaires sur les nombres entiers et décimaux.
- En 2001, $57 - 9$ est réussi à 75%, le quart de 100 à 66% , $2{,}3 \times 10$ à 56% et $4 \times 2{,}5$ à 49%.
- En 2002, lors de l'évaluation en sixième, les mécanismes de calcul des additions et soustractions posées semblent bien maîtrisés, mais les erreurs qui apparaissent lors du calcul mental montrent que le sens de l'écriture des nombres décimaux n'est pas encore acquis.
- En 2002, lors de l'évaluation en Cinquième, on observe des scores de réussite allant de 11,1% à 57,9% pour les items de calcul mental.
- En 2003, lors de l'évaluation d'entrée en Sixième, les calculs comme 37 :10 ou $3 \times 0{,}5$ ne sont réussis qu'à 40%

Dans les nouveaux programmes de l'école primaire, les compétences sur le calcul mental, posé et automatisé sont explicitement exigibles. Un document d'accompagnement de ces programmes est d'ailleurs consacré au calcul mental.

(*) IREM de Strasbourg.

Dans les nouveaux programmes du collège, on précise dans l'introduction générale « poursuivre l'apprentissage du calcul sous toutes ses formes ; mental, posé, instrumenté », dans la partie sixième, « développer le calcul mental et l'utilisation rationnelle des calculatrices ». On précise alors que « la maîtrise des tables est consolidée par une pratique régulière du calcul mental sur des entiers et des décimaux simples », « la capacité à calculer mentalement est une priorité et fait l'objet d'activités régulières ». Plus loin, il est alors écrit que « l'entretien et le développement des compétences en calcul mental sont indispensables, ces compétences étant nécessaires dans de nombreux domaines ».

2. Argumentaire pour le calcul mental

Ce que nous appellerons calcul mental déborde le calcul mental traditionnel, ou calcul automatisé : nous y englobons le calcul réfléchi ou raisonné, celui qui permet de reconstruire les calculs par des raisonnements appropriés, ainsi que le calcul mental littéral.

Les procédures seront donc diverses et leur diversité devra être prise en compte dans la correction, en évitant de privilégier trop rapidement l'une d'elles. On insistera alors sur l'importance de la méthode plutôt que sur la rapidité d'exécution qui ne doit cependant pas être négligée. Si nécessaire, l'élève écrit certains calculs et résultats intermédiaires.

La pratique régulière (au début de chaque heure de mathématiques) du calcul mental nous semble nécessaire à tous les niveaux de classe du collège pour les raisons suivantes :

- Une certaine familiarité avec les nombres et les opérations est nécessaire à tout niveau, en classe et dans la vie courante.
- De bonnes compétences en calcul mental sont indispensables pour prévoir un ordre de grandeur d'un résultat, pour permettre une utilisation raisonnée de la calculatrice et pour rendre l'élève critique face à un résultat, plus particulièrement face à un résultat affiché par la calculatrice.
- Le calcul mental permet à l'élève de travailler régulièrement les changements de registre de représentation des nombres : pour que le calcul $24 \times 0{,}25$ soit simple à effectuer mentalement, le nombre 0,25 doit être vu comme 1/4.
- Le moment de calcul mental dans la classe est un moment où on compare des procédures, on réfléchit, on raisonne, on conjecture, on analyse les erreurs, on développe l'esprit critique, c'est un moment intense de débat. Ces moments de correction répétés quotidiennement ou presque permettent une construction plus solide de certains savoirs, les erreurs sont réellement et efficacement prises en compte. De plus, comme les calculs sont immédiatement corrigés avec prise en compte des erreurs, l'élève est rapidement rassuré, sa confiance en lui augmente.
- La pratique régulière du calcul mental littéral, à partir de la classe de Cinquième pour certains types de calcul, permet de rencontrer presque quotidiennement des expressions comme $2x + 3x$ ou $2x \times 3x$, de dégager les propriétés en jeu pour les simplifier, d'analyser les erreurs, de leur donner du

sens en remplaçant la variable par une valeur numérique. La familiarité avec ces expressions littérales « basiques » va permettre d'alléger la charge mentale de calculs plus complexes comprenant ces calculs élémentaires.

- La pratique régulière du calcul mental permet un entretien régulier des connaissances, un étalement sur l'année de certains apprentissages, c'est un moyen important pour asseoir une progression spiralée, chaque notion pouvant être régulièrement revisitée.
- Certaines notions peuvent être introduites puis consolidées en calcul mental, comme le produit de deux décimaux en sixième, la comparaison et la somme des relatifs en Cinquième, les puissances en Quatrième ou la racine carrée en Troisième. Nous développerons ces introductions possibles plus loin.

Pratiquer le calcul mental comme il a été envisagé plus haut et comme il est ensuite décrit permet ainsi de changer profondément notre façon d'envisager la progression des apprentissages dans le domaine numérique, à l'intérieur d'un chapitre et sur une année scolaire. Chaque notion est vue et revue dans ces séances : on laissera cependant des pauses pour chaque apprentissage, elles sont nécessaires et permettent de mieux y revenir.

Dans ces séances, l'élève sent que, plus qu'ailleurs, il a le droit à l'erreur, que cette erreur sera prise en compte lors de la correction, qu'elle n'est pas dramatique, qu'il n'a pas à en avoir honte. Il sent que ce qui lui est demandé est à sa portée et comprend alors mieux le travail qu'il lui reste à faire pour qu'elle ne se reproduise pas régulièrement. On y développe ainsi son sens de l'observation, de l'anticipation, l'intelligence du calcul.

3. Notre expérience

Plusieurs pratiques sont possibles. Ce qui nous semble fondamental est la rencontre quotidienne avec le calcul mental, afin de faire prendre conscience à l'élève qu'il est capable de progrès et de l'amener à faire un vrai choix au moment de l'utilisation de la calculatrice, un choix d'élève libre et non d'élève « esclave », ce choix pouvant dépendre de l'élève en question.

La pratique que nous avons testée consistait à donner cinq calculs chaque début d'heure en utilisant une grille comme celle ci-dessous :

Question					
Réponse					
Question					
Réponse					

Dans notre pratique, les questions sont écrites, l'élève peut, dans certains cas, écrire une étape intermédiaire.

Il est important que chaque série de calculs comporte au moins un calcul suffisamment simple pour qu'il soit traité par la quasi totalité des élèves de la classe.

Il faut prévoir entre cinq et dix minutes en début d'heure, ce temps « perdu » est largement gagné par la suite, diverses notions étant consolidées ou introduites par ce biais.

Le rôle fondamental de la correction

La correction de chaque calcul devra prendre en compte les différentes procédures possibles, analyser les erreurs commises par chaque élève et donner alors plusieurs méthodes possibles pour chaque calcul en revenant chaque fois que c'est nécessaire sur le sens du calcul. Beaucoup de notions peuvent alors être fréquemment revues. Il est nécessaire de pouvoir donner à chaque élève (dans la mesure du possible, il y a des « classes d'erreurs ») une explication à l'erreur commise, que cette explication ne se limite pas à la réponse juste.

Ainsi, par exemple, pour traiter une erreur du type $0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}6$, on pourra questionner l'élève sur le résultat de $0{,}2 \times 3$ et lui demander le lien opératoire entre $0{,}2 \times 3$ et $0{,}2 \times 0{,}3$, sur le lien opératoire entre 2×3 et $0{,}2 \times 3$, entre 2×3 et $0{,}2 \times 0{,}3$. Parallèlement, on pourra rappeler que le résultat de $0{,}3 + 0{,}8$ n'est pas $0{,}11$, car l'addition ne fonctionne pas comme la multiplication : 3 dixièmes + 8 dixièmes donnent 11 dixièmes et non 11 centièmes (dans ce cas l'utilisation de la langue naturelle dans la lecture orale du calcul permet une meilleure compréhension).

Pour traiter une erreur du type $2x \times 3x = 6x$, on pourra proposer de remplacer x par 10 pour vérifier, questionner l'élève sur $2x \times 3$, sur $x \times x$ et sur les propriétés de la multiplication en jeu dans ce calcul, à savoir l'associativité et la commutativité, et montrer parallèlement que l'égalité $2x + 3x = 5x$ repose sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. On travaille ainsi sur des erreurs fréquentes dans le calcul littéral, erreurs qui sont très gênantes dans la gestion d'expressions plus complexes et dont le traitement est une condition nécessaire à une bonne entrée dans le calcul littéral.

4. Un exemple d'apprentissage d'une notion par le biais du calcul mental : la définition de la racine carrée

La notion de racine carrée constitue en général un chapitre, souvent indigeste, en classe de Troisième où les propriétés succèdent trop rapidement à la définition encore bien floue pour les élèves et où la place donnée à la technique est souvent trop importante, le sens étant alors bien lointain. Une introduction en douceur, un travail régulier sur des calculs liés à la définition permettent de mieux entrer dans cette notion et de bien différencier définition et propriétés. Voici un exemple de progression possible, avec, en général, un seul calcul relatif à cette notion par séance de calcul mental, calcul sur lequel on passera le temps nécessaire à sa compréhension, avec, en particulier, une analyse la plus fine possible des erreurs commises.

Types de calcul	*Objectifs, méthodes, commentaires*
Encadrer $\sqrt{5}$, $\sqrt{32}$, … entre deux entiers consécutifs	Donner du sens à $\sqrt{5}$, apprendre aux élèves à voir $\sqrt{5}$ comme un nombre. Lors du premier encadrement demandé, il peut y avoir beaucoup d échecs, c'est l'occasion de poser la question « qu'est-ce-que $\sqrt{5}$? ». De nombreuses réponses sont alors proposées, souvent fausses. On peut alors donner une indication en demandant, par exemple, à quel nombre est égal $\sqrt{16}$ et pourquoi, afin de relier l'égalité $\sqrt{16}$ = 4 à 4^2 = 16, de faire plus généralement le lien entre racine carrée et carré. On peut alors leur demander de formuler, en français, une définition de $\sqrt{5}$ et, à partir de là, en utilisant la propriété que deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés, trouver l'encadrement demandé : $2^2 = 4$, $\sqrt{5}^2 = 5$ et $3^2 = 9$, donc $2 < \sqrt{5} < 3$. Il convient alors de proposer à chaque séance suivante la recherche d'un tel encadrement et de demander régulièrement de formuler en français la définition de la racine carrée utilisée. Petit à petit, la notion de $\sqrt{a}$ prend alors du sens.
$\sqrt{5}\times\sqrt{5}$ $\left(\sqrt{7}\right)^2$ $3\sqrt{5}\times2\sqrt{5}$ $\left(2\sqrt{3}\right)^2$	On commence par proposer lors d'une séance $\sqrt{5}\times\sqrt{5}$, on compare alors les réponses obtenues (ainsi on peut éliminer le toujours gênant $\sqrt{25}$, puisque la propriété $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ n'a pas encore été vue), le lien est alors fait avec ce qui a été vu précédemment et on peut continuer lors des séances suivantes par les calculs proposés qui ont pour but de travailler la définition de $\sqrt{a}$. Conjointement, on continue à travailler les propriétés de la multiplication. Ces rencontres régulières avec la notion de racine carrée semblent plus efficaces qu'un « bombardement » d'exercices lors d'une séance classique d'une heure de cours.
$\sqrt{2}^3$ $\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+4\right)$ $\sqrt{5}\left(2\sqrt{5}+4\right)$	Parallèlement au travail sur la définition, la simplification de telles expressions peut se faire régulièrement. Lors de la correction, on insistera sur les priorités opératoires et sur la distributivité.
$x=\sqrt{5}, x^2=\ldots$ $x=\sqrt{5}, 2x^2=\ldots$ $x=2\sqrt{5}, x^2=\ldots$ $x=2\sqrt{5}, 2x^2=\ldots$	On travaille également le sens de certaines expressions littérales. La priorité au carré dans l'expression $2x^2$ n'est, en général, pas très bien maîtrisée (voire inconnue) en début de Troisième, ce qui entraîne des erreurs du type, pour $x = \sqrt{5}$, $2x^2 = 20$, pour $x = 3\sqrt{5}$, $2x^2 = 4\sqrt{3^2}$ = 48 ou 12.

$5\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ $4\sqrt{3}-\sqrt{3}\dots$	Ici, il faut d'abord avoir des mots sur les erreurs liées au non respect des priorités, pour ensuite parler de distributivité, factoriser la racine carrée, celle-ci se comportant comme x ou a dans une expression littérale similaire.
Résoudre des équations se ramenant à une équation du type $x^2 = a$: $3x^2 = 6$	Nous avons tous remarqué que la plupart des élèves oublient une solution dans le cas $a > 0$. Rencontrer régulièrement ce type d'équations permet d'avoir moins d'oublis.

Après ce travail qui peut s'étaler sur les trois premiers mois de l'année scolaire, la notion de racine carrée a pris du sens, l'élève est mieux préparé à affronter le chapitre racine carrée, à distinguer la définition des différentes propriétés.

5. Des exemples de calculs qui peuvent être traités dans les séances de calcul mental

La liste donnée n'est, bien sûr, pas exhaustive, chacun pourra la modifier, la compléter, en fonction de sa façon d'appréhender le programme. Les calculs sont donnés suivant un ordre qui peut être chronologique, chaque calcul pouvant être repris autant que l'enseignant le juge nécessaire. Dès que l'occasion se présente, en lien avec le sens qui leur a été donné en cours, travailler les calculs suivants puis les entretenir régulièrement.

Dès la classe de Sixième, à entretenir dans les niveaux de classe suivants :

Types de calcul	***Objectifs, méthodes, commentaires***
Dès le début de l'année, travailler des calculs sur les entiers :	
Additions et soustractions : $72 + 18$ $70 - 32$	Consolider les acquis sur les entiers en évitant des révisions le plus souvent fastidieuses. $70 - 32 = 70 - 30 - 2 \dots$ Ces types de calculs sont fondamentaux, par la suite, pour calculer $7{,}2 + 1{,}8$ et $7 - 3{,}2$.
Multiplication : 13×8 35×4 20×80	On entretient la distributivité intuitive et les tables de multiplication : $(35 \times 2) \times 2$ Commutativité et « associativité », gestion de zéros, prépare $2x \times 8x$.
$4 \times 7 \times 25$ $125 \times 12 \times 8$	Ces écritures n'ont aucun sens à l'entrée en Sixième : il faudra d'abord expliquer pourquoi le parenthésage est inutile ici, que $(4 \times 7) \times 25 = (4 \times 25) \times 7 = \dots$ et qu'ainsi, l'écriture $4 \times 7 \times 25$ a un sens. On utilise alors $4 \times 25 = 100$ et $8 \times 125 = 1000$ en même temps que les propriétés de la multiplication. Le lien $4 \times 25 = 100$ est fondamental pour l'approche de $0{,}25 = \frac{1}{4}$. Il est donc important de le travailler régulièrement, dans des situations différentes, pour qu'il puisse s'installer.

Divisions : 54 : 6 720 : 90 7200 : 90 91 : 7	On travaille ici le lien entre division et multiplication et on poursuit l'entretien des tables. Pour répondre à l'erreur 720 : 90 = 80, on pourra demander le résultat de 80 × 90 qui pourra être … 720, d'où la nécessité d'entraîner les élèves aux multiplications proposées précédemment. Le traitement de 91 : 7 se fait en lien avec la distributivité intuitive : 7 × 10 = 70 et 7 × 3 = 21 donc 7 × 13 = 91.
Écriture des décimaux Écrire sous forme de fraction : 1,3…, 0,75…, 0,006 Écrire sous forme décimale : $\frac{17}{100}$, $\frac{152}{10}$	La numération décimale est loin d'être acquise à l'entrée en Sixième, elle doit être régulièrement travaillée. Passer de l'écriture décimale à l'écriture fractionnaire, utiliser la langue naturelle (dixième, centième, …) permettent de donner du sens à l'écriture décimale. Pour la correction, on pourra utiliser parallèlement un registre géométrique (comme par exemple un carré de 100 carreaux où un centième peut être assimilé à un carreau et un dixième à une ligne) pour représenter les nombres considérés.
Addition et soustraction des décimaux avec deux chiffres significatifs : 1,8 + 0,15 7,4 − 3, 7 − 2,3	Voir régulièrement ce genre de calculs en s'attachant à passer le temps nécessaire sur le traitement des erreurs commises est plus efficace que de donner une grosse batterie d'exercices. Dans la correction, on utilisera les mots unité, dixième, centième : on trouve 1,23 en ajoutant 8 dixièmes et 15 centièmes. La langue naturelle aide à repérer et à analyser l'erreur.
Multiplication et division par 10, 100, 10000 : 15 : 1000 0,07 × 10. 0,05 : 10	Voir régulièrement ce genre de calculs en s'attachant à passer le temps nécessaire sur le traitement des erreurs commises est plus efficace que de donner une grosse batterie d'exercices. On peut aussi proposer conjointement des conversions d'unités de longueurs, de capacité, …
Multiplication d'un décimal par un entier : 11 × 0,2 1,9 × 8 3,2 × 2000	Voir régulièrement ce genre de calculs en s'attachant à passer le temps nécessaire sur le traitement des erreurs commises est plus efficace que de donner une grosse batterie d'exercices. Certaines erreurs peuvent être traitées en utilisant la langue naturelle : 11 × 0,2 ne peut pas être égal à 0,22, puisque 11 × 2 dixièmes valent 22 dixièmes…
4 × 7 × 0,25 8 × 12 × 0,125	Utiliser 4 × 25 = 100 et 8 × 125 = 1000 en même temps que les propriétés de la multiplication. Prolonger le travail de début d'année sur la distributivité.
Écrire sous forme décimale : $\frac{17}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{11}{4}$: des fractions ayant pour dénominateur 2, 4, 5 voire 6 ou 8.	Un des objectifs de la classe de Sixième est de voir la fraction en temps que nombre. Ces calculs permettent d'appréhender régulièrement une fraction comme un quotient. Il sera important de détecter les erreurs avec les produits correspondants, d'amener les élèves à être critiques sur leurs productions : $\frac{7}{5}$ n'est pas égal à 1,2 car 5 × 1,2 = 6…

$\frac{18}{9}$, $\frac{36}{12}$: des quotients entiers.	En liaison avec le cours, on pourra voir que $\frac{7}{5}=\frac{14}{10}$ et donc que l'écriture décimale de est 1,4. En lien avec la droite graduée, on pourra voir que $\frac{11}{4}=\frac{8}{4}+\frac{3}{4}=2+0,75=2,75$. Une autre façon d'aborder $\frac{11}{4}$ est de le faire en liaison avec la division euclidienne et la langue naturelle : en 11, il y a 2 fois 4 et il reste 3 que l'on doit diviser en 4. Donc $\frac{11}{4}$ = 2,75.
Compléter : $5=\frac{\dots}{3}$, $\frac{\dots}{4}=7$, …	L'objectif de ces calculs est de faire le lien entre écriture fractionnaire d'un quotient, division et multiplication. Ces calculs peuvent être dictés en langue naturelle : écrire 7 en quarts, 5 en tiers, … Ces calculs seront utiles pour l'apprentissage de la somme des fractions.
Équations à trous : $60\times\dots=3{,}6$ $4\times\dots=7$ $6\times\dots=7$	Dans la première on se réfère à 6 × 6 = 36, dans la deuxième, on attend deux réponses possibles, 7/4 et 1,75 et dans la dernière l'écriture fractionnaire est la seule possibilité. Elle surprend les élèves et leur permet de prendre conscience que le résultat attendu peut être une fraction : une fraction désigne un nombre.
Produit d'un entier ou d'un décimal par une fraction : $12\times\frac{7}{3}$, $12\times\frac{15}{5}$	Ici, la fraction est vue comme opérateur et les stratégies varient selon les calculs. Un des objectifs est de montrer aux élèves quelle est la stratégie la plus simple (c'est souvent celle qui commence par une division, alors que nos élèves ont tendance à commencer par une multiplication, cette opération leur posant moins de difficulté).
$12\times0{,}25$, $12\times0{,}75$ $112\times0{,}5$	Changer le registre d'écriture d'un nombre pour pouvoir effectuer plus simplement un calcul.
3% de 120 36% de 200 10% de 15. 25% de 36 50% de 128	Voir régulièrement ce genre de calculs en s'attachant à passer le temps nécessaire sur le traitement des erreurs commises est plus efficace que de donner une grosse batterie d'exercices. La stratégie varie selon le pourcentage : pour le premier, on peut commencer par 3 × 120, pour le deuxième, il est important de repérer que 200 est divisible par 100 ; pour les deux suivants, on travaille les égalités $\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$ et $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$.
Quotients dont le dénominateur peut-être décomposé : $\frac{6}{200}=(6:2):100$	Comprendre que diviser successivement un entier par deux autres revient à diviser cet entier par le produit des deux autres. Ceci peut être justifié par les opérations inverses : pour multiplier un nombre par 200, on peut le multiplier par 2 puis le résultat par 100.

Quotient d'un décimal par un entier : 2,4 : 4 0,24 : 4. 9,1 : 7 0,1 : 2	On continue à travailler le lien entre multiplication et division, avec un dividende décimal. On peut aussi proposer l'écriture décimale de ces quotients. Traiter les erreurs en considérant les produits correspondants. On peut alors fonctionner par « essai- erreur » : 0,24 : 4 = ??? ; 4 × 6 = 24 ; 4 × 0,6 = 2,4 ; 4 × 0,06 = 0,24 donc 0,24 : 4 = 0,06
Travail sur les unités de durées : 1,25 h en …h …min, 640 min en …h ...min, etc. Conversions d'unités de longueurs, capacités, aires.	Voir régulièrement ce genre de calculs en s'attachant à passer le temps nécessaire sur le traitement des erreurs commises est plus efficace que de donner une grosse batterie d'exercices. Pour le premier on retrouve la nécessité de savoir que $0,25=\frac{1}{4}$. En ce qui concerne les conversions, on peut, dans un premier temps, laisser écrit au tableau l'alignement des unités : kilo-hecto-déca-unité-déci-centi-milli, pour que l'élève retrouve ses repères de primaire et que la seule difficulté soit le décalage de la virgule. Dans un deuxième temps, on travaille sans cette aide.
Produits de deux décimaux : 3,4 × 0,2 2,4 × 0,1 1,2 × 0,25 3,8 × 0,02	Cette notion peut être introduite en calcul mental : connaissant le résultat 3,4 × 2 (le produit d'un décimal par un entier a déjà été travaillé), l'élève peut en déduire le résultat de 3,4 × 0,2 : en général, pour le premier calcul de ce type, pratiquement toute la classe trouve 6,8 en appliquant une règle semblable à celle de l'addition. La correction devra prendre en compte plusieurs aspects : • l'ordre de grandeur : 3,4 × 0,2 est plus petit que 3,4 × 2. • $0{,}2 = \frac{2}{10}$ donc $3{,}4 \times 0{,}2 = 3{,}4 \times \frac{2}{10} = (3{,}4 \times 2) : 10$. • On pourra alors constater et justifier que 3,4 × 0,2 = (34 × 2) : 100, en s'appuyant sur le fait que diviser un nombre par 10 puis le résultat obtenu par 10 revient à diviser le nombre par 100 : 3,4 × 0,2 = (34 × 2) : 10 : 10 = (34 × 2) :100. Pour 2,4 × 0,1 et 1,2 × 0,25, on peut privilégier les écritures fractionnaires de 0,1 et de 0,25. Il s'agira ensuite de voir régulièrement ce genre de calculs en s'attachant à passer le temps nécessaire sur le traitement des erreurs commises. Le chapitre « produit de décimaux » pourra commencer plus tardivement et plus simplement.
Utilisation d'un quotient intermédiaire égal pour le calcul de certains quotients : $\frac{12}{24}$, $\frac{11}{44}$	Ici, la simplification de l'écriture fractionnaire a une motivation, celui de rendre le calcul du quotient plus simple à effectuer. $\frac{12}{24}=\frac{1}{2}=0,5\ldots$

Problèmes simples de proportionnalité : 4 kg 12 € 7 kg … 4 kg 5 € 6 kg … 1kg 3 € 300 g … 4,2 kg 6 € … kg 4 €	Dès que la notion de quotient a été travaillée, certains problèmes de proportionnalité peuvent être régulièrement traités. Il est important de prendre en compte les différentes procédures existant dans la classe, de ne pas rejeter a priori une procédure correcte, mais qui peut nous paraître plus compliquée. Il faut la prendre en compte, et la comparer aux autres, afin que l'élève puisse lui-même faire son jugement. Pour le premier exemple, le passage à l'unité est la procédure la plus experte. Pour le deuxième, on pourra encourager l'élève à voir le rapport entre 4 et 6. 6, c'est une fois et demie 4, ou $\frac{6}{4}$ fois 4. Pour le troisième, certains élèves chercheront d'abord le prix de 100 g puis celui de 300 g. Il faudra faire le lien avec la procédure plus experte consistant à multiplier par 0,3 : diviser par 10 puis multiplier par 3 revient à multiplier par $\frac{3}{10}$ ou 0,3. Pour le quatrième, plus difficile, une des procédures consiste à voir que de 6 à 4, on multiplie par $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$: 4 représentent deux tiers de 6 €, la quantité cherchée est donc $4{,}2 \times \frac{2}{3}$.

Dès la classe de Cinquième, à entretenir dans les niveaux de classe suivants :

Types de calcul	***Objectifs, méthodes, commentaires***
D'une façon générale, reprendre régulièrement ce qui a été vu en sixième, et plus particulièrement en début d'année : • ***sommes, différences et produits de décimaux, quotients d'entiers.*** • ***changements de registre d'écriture dans les calculs.*** • ***application d'un opérateur fractionnaire, d'un pourcentage*** • ***écriture décimale de fractions, écriture d'un entier en tiers, en quart, …*** ***Ne pas laisser trop de temps sans revoir une connaissance.***	
Comparaisons de relatifs : Compléter par < ou > – 17 … – 10. – 90 …. – 105 – 4,5 … – 4 – 2,15 … – 2,3	L'introduction, la motivation et les premiers calculs sur les nombres relatifs commencent maintenant en Cinquième. Les premiers contacts avec ces nombres peuvent se faire par le biais du calcul mental. Un préalable important et fondamental pour donner du sens à ces nombres : leurs places sur la droite graduée. Une fois que la droite graduée a été présentée, il est possible de travailler régulièrement sur ces nombres, sur toute l'année scolaire, contrairement à ce qui se passe dans la plupart des manuels scolaires qui ne leur consacrent que deux chapitres, ce qui favorise un émiettement des savoirs : beaucoup d'élèves arrivent en Quatrième avec des difficultés sur la somme, voire la comparaison des nombres relatifs. On commencera par comparer des nombres entiers proches de zéro,

	facilement localisables sur la droite graduée, puis on s'éloignera de plus en plus de ce zéro en intégrant des nombres décimaux dans ces comparaisons.
Sommes de relatifs (–5) + (–7) (+5) + (–7) (–5) + (+7) (–7) + (+5) (–32) + (–17) (–32) + (+17) (–17) + (–32)	C'est à l'aide de déplacements verticaux ou horizontaux sur la droite graduée que la somme de relatifs peut prendre du sens : on commencera par apprendre aux élèves à se déplacer sur cette droite et à interpréter une somme de deux relatifs comme deux déplacements successifs. Ainsi, il est important, pour ces premiers calculs, de laisser les deux nombres entre parenthèses, afin que les deux déplacements correspondants soient bien identifiés. On se contentera, dans un premier temps, d'un ou deux calculs par séance. Comme pour la comparaison, on commencera par des nombres entiers proches de zéro, puis on s'éloignera de plus en plus de ce zéro, on laissera les élèves construire leurs algorithmes et on pourra les interroger sur leur façon de faire. La correction devra toujours s'appuyer sur la droite graduée, pour rester dans le sens. Progressivement, les élèves se détachent alors de cette droite graduée et sont à la recherche d'opérations. Le premier chapitre « nombres relatifs » pourra alors commencer.
Trouver la valeur décimale ou une valeur approchée de certains quotients tels que $\frac{1}{3}$ ou $\frac{5}{4}$, $\frac{1}{6}$, …	On cherche toujours à donner du sens à l'écriture fractionnaire. Savoir que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal mais que si l'on divise 1 par 3, on obtient 0,33333… donne du sens à ce nombre et le place entre 0,3 et 0,4.
Quotients de décimaux : 3,4 : 0,1 21 : 0,03 $\frac{1}{0,4}$	Le calcul du quotient de deux décimaux est maintenant un objectif de la classe de Cinquième. Il convient de donner du sens à ces quotients : pour le premier, on pourra poser la question : Combien de fois 1 dixième y a-t- il dans 34 dixièmes ? Autrement dit : $\frac{3,4}{0,1} = \frac{34\,\text{dixièmes}}{1\,\text{dixième}}$. On peut procéder par essai-erreur et vérifier avec les produits correspondants : $\frac{21}{0,03}$ n'est pas égal à 0,07 car $0,07 \times 0,03 = 0,0021$. $7 \times 0,03 = 0,21$; $70 \times 0,03 = 2,1$; $700 \times 0,03 = 21$, donc $\frac{21}{0,03} = 700$.
Utilisation de la distributivité dans les calculs : 34 × 101 ; 34 × 99 34 × 1,02 ; 24 × 2,5	On peut commencer avant le chapitre distributivité proprement dit, cette propriété étant intuitive chez les élèves. Il reste à mettre un nom sur cette propriété lorsque le chapitre est abordé. On veillera à varier les calculs, on en profitera pour travailler en même temps les changements de registre d'écriture et à le faire régulièrement tout au

$12 \times 3{,}25$; $12 \times 3{,}75$ $1{,}2 \times 3{,}4 - 1{,}2 \times 3{,}3$ $12 \times 99 + 12$	long de l'année.
Simplifier des expressions littérales simples : $a \times 3$; $3a \times 2$	Voir régulièrement ce genre de calculs en s'attachant à passer le temps nécessaire sur le traitement des erreurs commises est plus efficace que de donner une grosse batterie d'exercices.
Développer des expressions littérales simples : $3(a + 5)$; $2(3a - 4)$	Voir régulièrement ce genre de calculs en s'attachant à passer le temps nécessaire sur le traitement des erreurs commises est plus efficace que de donner une grosse batterie d'exercices. Lors de la correction, on insistera sur les propriétés en jeu : distributivité, commutativité et associativité. On n'hésitera pas à remplacer a par une valeur numérique pour repérer les erreurs.
Simplifier des expressions littérales simples : $2a + 3a$; $2a \times 3$ $2a \times 3a$; $2a + a$ $2a + 5 + 3a$	Dans les cas d'applications de factorisations, on se limitera à des expressions simples, mais, lors de la correction, on sera très attentif à l'interprétation des erreurs commises et aux propriétés en jeu pour obtenir le bon résultat. La confrontation de $2a \times 3$ et de $2a \times 3a$, en remplaçant a par une valeur numérique, permet de bien ancrer que $2a \times 3a = 6a^2$, ce qui n'est pas un luxe pour les classes suivantes…
Simplifications de fractions : $\frac{15}{25}$, $\frac{12}{24}$, $\frac{24}{36}$ $\frac{75}{100}$.	Voir régulièrement ce genre de calculs en s'attachant à passer le temps nécessaire sur le traitement des erreurs commises est plus efficace que de donner une grosse batterie d'exercices. C'est une occasion d'utiliser les caractères de divisibilité. En général, le taux de réussite est satisfaisant, les techniques sont plutôt bien assimilées, ce qui ne veut pas pour autant dire que tout est compris : après qu'ils aient simplifié $\frac{15}{25}$ et trouvé $\frac{3}{5}$, si on demande aux élèves combien de fois $\frac{3}{5}$ il y a dans $\frac{15}{25}$, la réponse nettement majoritaire est 5 !! L'élève écrit donc $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ mais ne comprend pas vraiment cette égalité. Une mise au point est alors nécessaire pour leur faire comprendre qu'il y a une fois $\frac{3}{5}$ dans $\frac{15}{25}$, et que ce 1 provient de $\frac{5}{5}$.
Transformations de fractions en pourcentages : $\frac{7}{25}$; $\frac{7}{20}$; $\frac{21}{60}$.	Voir régulièrement ce genre de calculs en s'attachant à passer le temps nécessaire sur le traitement des erreurs commises est plus efficace que de donner une grosse batterie d'exercices. Dans les deux premiers types de calcul, le pourcentage se trouve directement, alors que dans le troisième, il faut simplifier au préalable.

Utilisations de simplifications. Écrire sous forme décimale certains quotients : $\frac{54}{12}$; $\frac{49}{70}$.	Le calcul d'un quotient peut être fait de diverses façons : pour diviser 54 par 12, on peut se ramener à diviser 9 par 2…
Calculs du type : $\frac{11}{0,5}$; $\frac{11}{0,25}$; $\frac{11}{5}$. Le dénominateur est 5 ou 0,5 ou 50, … Le dénominateur est 25 ou 0,25, …	Chaque quotient peut se ramener à un quotient dont l'écriture fractionnaire a un dénominateur égal à une puissance de 10 : $\frac{11}{0,5}=\frac{22}{1}$ ou $\frac{11}{5}=\frac{22}{10}$. On peut alors conjecturer après expérimentation que diviser par 0,5, c'est multiplier par 2 et diviser par 0,25, c'est multiplier par 4, et faire le lien avec la multiplication par 0,5 ou 0,25.
Fraction et entier : Calculer $2+\frac{3}{7}$. Écrire sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 : $\frac{27}{7}$.	Ce type de calcul peut être vu tout au long de l'année. Pour corriger l'erreur $2+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$, on peut faire appel à la droite graduée et y placer ces nombres. On peut aussi parler d'ordre de grandeur : $2+\frac{3}{7}$ est supérieur à 2, mais $\frac{5}{7}$ est inférieur à 1. Pour l'écriture de $\frac{27}{7}$ sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1, on pourra faire le lien avec la division euclidienne : en 27 , il y a 3 fois 7, le reste est 6, ce reste est à diviser par 7.
Sommes de fractions : $\frac{2}{7}+\frac{3}{14}$.	L'utilisation de la langue naturelle au moment de la correction est importante : les septièmes s'ajoutent aux septièmes, les quatorzièmes aux quatorzièmes, … On peut même aller jusqu'à proposer des calculs du type $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, et, pour traiter l'erreur $\frac{2}{5}$, faire remarquer que $\frac{1}{2}=0,5$ et donc que le résultat de la somme ne peut pas être égal à 0,4…
Produits de fractions : $\frac{3}{4}\times\frac{4}{17}$; $\frac{33}{4}\times 4$; $\frac{33}{4}\times 8$.	Dans les calculs de produits, de nombreux élèves effectuent sans penser à simplifier. On préférera alors des multiplications où la simplification est immédiate ou presque et où elle peut éviter des calculs plus compliqués, pour éviter que les élèves ne se lancent automatiquement dans des calculs inutiles.
Conversions de durées :24 min en fraction d'heure ou heure décimale ; 1,1 h en heure-minute…	Il est intéressant de voir régulièrement ce genre de calculs qui permet d'utiliser des simplifications de fractions dans un autre objectif que celui habituellement envisagé.

Compléter des schémas du type : $6 \xrightarrow{\times\cdots} 9$ $8 \xrightarrow{\times\cdots} 6$ $3 \xrightarrow{\times\cdots} 4$ $10 \xrightarrow{\times\cdots} 12$ $16 \xrightarrow{\times\cdots} 4$	Savoir compléter ce genre de schémas est fondamental pour les problèmes liés à la proportionnalité. On acceptera toutes les réponses possibles et on discutera de chacune d'elles. Au départ, les élèves cherchent des nombres décimaux. Ainsi la solution 1,5 apparaît assez naturellement. Voir que 9, c'est une fois 6 et la moitié de 6 est une première approche. Le nombre qui, multiplié par 6, donne 9 est le quotient de 9 par 6, à savoir $\frac{9}{6}$, qui, simplifié, donne $\frac{3}{2}$. Pour le second calcul, le lien est de nouveau fait entre 3/4, 6/8 et 0,75. Le troisième offre comme particularité de n'avoir de solution qu'un nombre en écriture fractionnaire. Après avoir compris que trouver le nombre en écriture fractionnaire est une technique finalement simple, certains élèvent s'arrêtent dès l'obtention de cette écriture : ainsi, ils auront tendance à proposer $\frac{12}{10}$ pour le quatrième calcul. À nous de répertorier les autres réponses dans la classe pour les convaincre que 1,2 est une solution meilleure. De même, pour le dernier calcul, $\frac{1}{4}$ ou 0,25 sera préféré à la solution $\frac{4}{16}$. Il est cependant important de préciser que la solution $\frac{4}{16}$ est juste !
Recherche d'une quatrième proportionnelle : $20 \longrightarrow 12$ $5 \longrightarrow \ldots$ $6 \longrightarrow 9$ $10 \longrightarrow \ldots$ $30 \longrightarrow 12$ $100 \longrightarrow \ldots$	Avant de se lancer dans de tels calculs, il est important de préciser aux élèves en quoi consistent de tels schémas, ce qui y est attendu, les rapprocher de problèmes concrets. (comme $\begin{matrix} 4\,\text{kg} & 12€ \\ 7\,\text{kg} & \ldots \end{matrix}$). On variera les cas, et on veillera à récolter toutes les procédures possibles et à en discuter avant de parler d'une éventuelle procédure experte. Ainsi dans le deuxième cas, on passe de 6 à 9 en multipliant par 1,5 ou 3/2, de 6 à 10 en multipliant par 10/6 ou 5/3 ou en divisant par 0,6 (car de 10 à 6, on multiplie par 0,6). Dans le dernier cas, on passe de 30 à 12 en multipliant pas 0,4 ou 12/30 ou 2/5, de 30 à 100 en multipliant par 10/3 ou en divisant par 0,3. C'est la fréquence de rencontres de telles situations qui permettra à l'élève de progresser.

Problèmes liés à la proportionnalité : 40 km ⟶ 60 min … km ⟶ 45 min 60 km ⟶ 40 min … km ⟶ 60 min	Les stratégies utilisées sont souvent différentes suivant les élèves et il est intéressant lors de la correction de prendre en compte chacune d'elles. Ainsi, pour le premier cas, certains élèves vont chercher combien de km sont parcourus en 30 min, puis en 15 min et enfin en 45 min. Il faudra comparer cette méthode à celle qui consiste à voir 45 min comme 3/4 de 60 min. De même ; pour le deuxième cas, une méthode consiste à d'abord chercher le nombre de km en 10 min, puis à conclure. Ainsi, on divise par 4 puis on multiplie par 6, on multiplie donc par 6/4 ou 3/2 ou 1,5.
Conversions d'unités de volumes et de capacités.	Voir régulièrement ce genre de calculs en s'attachant à passer le temps nécessaire sur le traitement des erreurs commises est plus efficace que de donner une grosse batterie d'exercices. Il est aussi intéressant de travailler ces conversions chaque fois que les cours de physique ou de S.V.T. en ont besoin.
Sommes et différences de relatifs : $-7 - 2,8$ $-7 - (-2,8)$ $3,7 - 7,3$	Ces types de calculs interviennent après avoir abordé les simplifications d'écriture. Insister sur la correction des erreurs, questionner les élèves sur l'opération qu'ils ont faite pour arriver au résultat. Ainsi, pour un calcul tel que 3,7 – 7,3, beaucoup d'élèves trouvent 4,4. Une des raisons est qu'ils procèdent par « complétion », comme pour les entiers, séparant partie décimale et partie entière. Il convient alors de leur faire dire qu'une opération transitoire à effectuer est 7,3 – 3,7.

Dès la classe de Quatrième, à entretenir en Troisième :

Types de calcul	***Objectifs, méthodes, commentaires***
D'une façon générale, reprendre régulièrement ce qui a été vu en Sixième et en Cinquième, et plus particulièrement en début d'année : • ***sommes, différences et produits de décimaux, quotients d'entiers.*** • ***sommes et différences de nombres relatifs.*** • ***calcul fractionnaire.*** • ***schémas de proportionnalité à compléter.*** • ***simplifications et développements d'expressions littérales simples.*** • ***changements de registre d'écriture dans les calculs.*** ***Ne pas laisser trop de temps sans revoir une connaissance.***	
Produits de nombres relatifs et priorités : $-3 \times (-0,6)$ $-0,3 \times 1,1$ $-5 \times (-1) \times (-2,1)$ $7 - 3 \times (-2)$ $4 - 6^2$ $(4 - 6)^2$	Le produit de deux nombres relatifs est à reprendre tout au long de l'année, il intervient dans le calcul littéral. On y ajoute des calculs demandant un respect des priorités. Le travail sur la priorité des carrés est souvent négligé dans les manuels scolaires.
$x = -5$ $-2x = \ldots$ $x = -3$ $x^2 = \ldots$ $x = 5$ $2x^2 = \ldots$ $x = -1$ $3 - x = \ldots$	Travailler dès le début de l'année les notations de base du calcul littéral permet de réduire les difficultés en arrivant dans le chapitre. L'élève est familiarisé avec la simplification d'écriture des produits. On travaille également la priorité du carré.

Résoudre des équations du type : $4x = -7$ $4 + x = -6{,}1$ $3x - 5 = 7$ $\dfrac{x}{7} = -4$	Il est important de travailler tout au long de l'année les résolutions d'équations. Celles qui sont proposées ici peuvent rapidement être abordées. Les schémas fléchés permettent de leur donner du sens, en lien avec les opérations inverses : Voici, par exemple, pour la première équation : $x \underset{:4}{\overset{\times 4}{\rightleftarrows}} -7$ On procédera régulièrement à la vérification de ces équations, afin d'y donner le sens nécessaire.
Sommes et produits de nombres en écriture fractionnaire : $-7+\dfrac{2}{3}$; $-3\times\left(-\dfrac{7}{5}\right)$ $-\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{5}$; $-\dfrac{3}{4}\times\dfrac{7}{5}$	Voir régulièrement ce genre de calculs en s'attachant à passer le temps nécessaire sur le traitement des erreurs commises est plus efficace que de donner une grosse batterie d'exercices. On reprend ainsi les calculs de début d'année, on y ajoute des signes « – ».
Sommes et produits de nombres en écriture fractionnaire : $-7+\dfrac{2}{3}$; $-3\times\left(-\dfrac{7}{5}\right)$ $-\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{5}$; $-\dfrac{3}{4}\times\dfrac{7}{5}$ $-\dfrac{7}{6}\times(-6)$ $-\dfrac{4}{7}\times\dfrac{7}{5}$; …	Voir régulièrement ce genre de calculs en s'attachant à passer le temps nécessaire sur le traitement des erreurs commises est plus efficace que de donner une grosse batterie d'exercices. On reprend ainsi les calculs de début d'année, on y ajoute des signes « – ».
Quotients de nombres en écriture fractionnaire : $12:\dfrac{3}{5}$ ou $\dfrac{12}{\frac{3}{5}}$ $\dfrac{7}{3}:\dfrac{3}{5}$ ou $\dfrac{\frac{7}{3}}{\frac{3}{5}}$ $\dfrac{12}{7}:3$; $-\dfrac{7}{3}:5$	C'est une nouveauté du programme de Quatrième. Pour un calcul du type $\dfrac{12}{7}:3$, on peut insister sur l'apport de la langue naturelle : 12 septièmes divisés en 3 donnent 4 septièmes. Voir régulièrement ce genre de calculs en s'attachant à passer le temps nécessaire sur le traitement des erreurs commises est plus efficace que de donner une grosse batterie d'exercices.
Quotients : $\dfrac{12}{0{,}25}$; $\dfrac{12}{0{,}02}$	Plusieurs stratégies sont possibles : $\dfrac{12}{0{,}02}=\dfrac{1200}{2}$; $\dfrac{12}{0{,}02}=12:\dfrac{2}{100}=12\times\dfrac{100}{2}$; …

Produits de nombres « avec des zéros » : $0{,}03 \times 2000$ $0{,}003 \times 0{,}02$	Ces types de calculs préparent les puissances de 10. Ces écritures sont souvent dépourvues de sens pour nos élèves : plus il y a de zéros, moins il y a de sens. Il est alors important de parler de dixièmes, de centièmes, …, de millionièmes, de milliardièmes (certains ignorent l'existence du milliardième…) et d'utiliser l'écriture fractionnaire des décimaux.
Quotients de nombres « avec des zéros » $\dfrac{3}{0{,}001}$; $\dfrac{0{,}06}{200}$ $\dfrac{0{,}006}{0{,}002}$	Les remarques précédentes s'appliquent aussi pour ces calculs. On vérifiera les résultats en effectuant les produits correspondants.
$x = -\dfrac{2}{3}$ $\quad -2x = \ldots$ $x = -\dfrac{2}{3}$ $\quad x^2 = \ldots$ $x = \dfrac{2}{3}$ $\quad 2x^2 = \ldots$ $x = -\dfrac{2}{3}$ $\quad 3 - x = \ldots$ $x = \dfrac{2}{3}$ $\quad \dfrac{x}{5} = \ldots$	Continuer le travail entrepris en début d'année, l'étendre à des nombres fractionnaires. Faire jouer à x son rôle de variable. Reprendre très régulièrement ce genre de calculs, pour que les automatismes puissent s'installer.
Résoudre des équations du type : $\dfrac{2}{3}x = -7$ $\dfrac{2}{3} + x = -6$ $\dfrac{2}{3}x - 5 = 7$ $3x = \dfrac{2}{3}$	Les schémas fléchés, comme ils ont été décrits dans un précédent paragraphe, permettent de donner du sens aux équations. On poursuit le travail régulier sur les résolutions d'équations. On traite ici les équations du type $ax + b = c$, qui ne nécessitent pas d'autre traitement que ceux liés à la compréhension des opérations en jeu.
Calculs de puissances : 3^2 $\quad 3^{-1}$ 10^{-1} $\quad 3^{-}4$ $0{,}7^2$ $\quad (-2)^4$	Dans la plupart des manuels scolaires, un seul chapitre est consacré à cette notion, et on n'y revient que très rarement. Nous proposons une approche en plusieurs temps, et une reprise régulière dans les séances de calcul mental. L'intérêt supplémentaire des deux derniers calculs est de travailler en même temps une autre règle (produit de deux décimaux, produit de deux relatifs).

Écrire sous forme décimale : 15×10^3 ; 15×10^{-3} $0{,}15 \times 10^3$ $0{,}15 \times 10^{-3}$ $\frac{15}{10^3}$; $\frac{1{,}5}{10^3}$ $\frac{15}{10^{-3}}$; $\frac{1{,}5}{10^{-3}}$	On apprend ici à multiplier et à diviser par une puissance de 10. Lors de la correction, il est fondamental de revenir au sens de la puissance de 10, particulièrement pour la puissance négative, de travailler avec les différents registres d'écriture : 10^{-3} est l'inverse de 10^3 donc $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$. Multiplier par 10^{-3}, c'est donc multiplier par $\frac{1}{1000}$ et donc diviser par 1000… Il est également intéressant reprendre ces calculs en concertation avec le professeur de physique : intégrer dans les séances de calcul mental des puissances de 10 lorsque celles-ci sont utilisées dans le cours de physique.
Écrire un nombre comme 15 000 ou 0,000 24 en utilisant une puissance de10, donner l'écriture scientifique de ces nombres.	On continue le travail précédent, dans l'autre sens.
Produits et quotients de puissances de 10 : $10^3 \times 10^5$ $10^3 \times 10^{-5}$ $10^{-3} \times 10^{-2}$ $\frac{10^3}{10^6}$ $\frac{10^2}{10^{-1}}$	Une utilisation prématurée des règles de calcul est souvent préjudiciable à la compréhension de la notion. Lors de la correction, il est important de retourner au sens de la puissance, d'écrire les zéros et d'utiliser les différents registres d'écriture (décimale, fractionnaire). Pour les calculs de quotients comme $\frac{10^2}{10^{-3}}$, on pourra utiliser des égalités du type : $\frac{10^2}{10^{-3}} = 10^2 \times 10^3$ (diviser par 10^{-3}, c'est multiplier par son inverse, 10^3) ou $\frac{10^2}{10^{-3}} = \frac{100}{\frac{1}{1000}} = 100 \times 1000 = 10\ 000$ ou $\frac{10^2}{10^{-3}} = \frac{100}{0{,}001} = \frac{10\ 000}{1} = 10\ 000$. Les différentes approches sont nécessaires, dans le but de répondre à un maximum d'élèves.
Calculs avec puissances de 10 : $3 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-4}$ $3 \times 10^3 \times 2 \times 10^4$ $\frac{8}{2 \times 10^3}$; $\frac{8 \times 10^2}{2 \times 10^3}$	Ces calculs prolongent les produits et quotients de nombres avec des zéros, vus en début d'année. Lors de la correction il est intéressant de noter les différentes méthodes utilisées dans la classe.

Développement d'expressions simples : $3\,(2a - 5)$ $-\,4\,(4a + 2)$ $a\,(2a - 7)$ $3a\,(2a + 1)$	Graduer les difficultés (signes, coefficients) pour amener l'élève à être rapidement à l'aise sur ce type de développement, tant dans la reconnaissance de la forme que dans l'application de la règle.
Simplifier des expressions littérales du type : $3a + 4a$ $-\ 3a + a$ $7a - a + 1$	L'utilisation de la langue naturelle permet de débloquer certains élèves, mais il est important que les élèves comprennent que la propriété en jeu est la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Lors de la correction on pourra remplacer a par une valeur numérique pour détecter les erreurs. Revoir régulièrement $a = 1a$.
Simplifier des expressions littérales du type : $3a \times 4$ $3a \times 4a$ $3a \times (-\,a)$	Utiliser les propriétés de la multiplication pour écrire $3 \times 4 \times a \times a$, montrer la différence avec les calculs précédents. La confrontation de $3a \times 4$ et de $3a \times 4a$, en remplaçant a par une valeur numérique, permet de bien ancrer que $3a \times 4a = 12a^2$, ce qui n'est pas un luxe pour les classes suivantes… Il reste à intégrer des calculs demandant également une gestion de signes : $3a \times (-\,a) = 3 \times a \times (-1) \times a$.
Simplifier des expressions littérales du type : $3a^2 + 2a^2$; $3a \times 2a$ $2a^2 \times a$	On poursuit les objectifs précédents pour différencier l'utilisation de la distributivité et autres propriétés de la multiplication, avec comme difficulté supplémentaire la gestion de termes en a^2.
Simplifier des expressions littérales du type : $3a - 7 + 4a - 2$ $12 - a + 5a$	Une étape supplémentaire : regroupement des termes semblables.
Simplifier des expressions littérales du type : $a \times 3 - 5 \times 5 + a \times 7$ $-\,3 \times a + a$ $2a \times a + 3a$	On ajoute une difficulté supplémentaire aux calculs précédents, celle consistant à respecter les règles de priorité dans le calcul littéral.
Simplifier des expressions littérales du type : $a + \frac{a}{3}$; $\frac{a}{5} + \frac{a}{3}$ $a \times \frac{a}{3}$; $\frac{a}{5} \times \frac{a}{3}$	On reprend les précédents objectifs avec des coefficients fractionnaires.

Développements et réductions : $7\,(2 - a) + 3a$ $x\,(2x + 5) + 3x$	On reprend les développements cités plus haut et on y ajoute une difficulté consistant à réduire l'expression obtenue.
Simplifications d'expressions littérales après « suppressions » de parenthèses : $8 + (x - 7)$ $8 - (x + 7)$	Nous n'insisterons jamais assez sur la prise en compte des erreurs lors de la correction et sur le rôle fondamental de la vérification : ainsi, lorsque l'élève trouve $8 - x + 7$ puis $15 - x$ pour le deuxième calcul, on peut l'inviter à remplacer x par une valeur numérique pour vérifier, puis le ramener à la règle vue en cours.
Utilisation de la double distributivité : Développer et réduire : $(x + 5)(x + 3)$ $(x + 5)(x - 3)$	Le deuxième exemple pose des difficultés : il faut gérer l'utilisation de la distributivité en même temps que la détermination des signes.
Résolutions de certaines équations du type $ax + b = cx + d$: $3x - 1 = 2x$ $3x = 7x + 1$	L'objectif est de poursuivre le travail commencé en début d'année (et, grâce au calcul mental, jamais abandonné…) en y ajoutant la nouvelle technique vue dans ce chapitre qui consiste à ajouter ou à soustraire le même nombre aux deux membres d'une égalité ou à multiplier ces deux membres par le même nombre non nul. Toujours penser à vérifier pour rester dans le sens de l'équation.
Problèmes de durée, distance, vitesse : à 40km/h, 100km en … ? à 90km/h, 2h 40min pour … km 20km en 40min, vitesse en km/h	Il faut auparavant avoir revu le passage des « heures minutes » aux heures, ainsi que les schémas de proportionnalité comme c'est décrit dans le paragraphe Cinquième.
120 € $\downarrow$ 20% Prix final ? 90 € $\uparrow$ 30% Prix final ? $x \downarrow$ 3% Résultat ? $x \uparrow$ 25% Résultat ?	Les deux premiers calculs sont des objectifs de Sixième (calculer 20% de 140, ajouter le résultat à 140). Pour que ces objectifs soient atteints, il est important de les avoir régulièrement revus (et d'avoir aussi régulièrement demandé des calculs du type 20% de 140…). Les deux suivants visent à préparer ce qui va être vu en Troisième.
Écrire $\frac{9}{15}$ sous forme de pourcentage. De 300 à 303, augmentation de …% ?	On travaille le passage d'une fraction à une fraction de dénominateur 100, et la compréhension de la phrase « pourcentage d'augmentation ». On peut envisager, pour le deuxième calcul, un raisonnement du type : le pourcentage d'augmentation est de $\frac{3}{300}$ soit $\frac{1}{100}$ ou 1%.

Dès la classe de Troisième à entretenir au lycée :

Types de calcul	*Objectifs, méthodes, commentaires*
D'une façon générale, reprendre régulièrement ce qui a été vu en Sixième, en Cinquième et en Quatrième, et plus particulièrement en début d'année : • ***calculs avec les puissances.*** • ***calcul littéral basique.*** • ***pourcentage d'augmentation et de diminution.*** • ***calcul fractionnaire.*** • ***changements de registre d'écriture dans les calculs.*** • ***remplacer x par une valeur numérique dans des expressions comme $2x^2$, $2x/3$, …*** ***Ne pas laisser trop de temps sans revoir une connaissance.***	
Introduction progressive de la notion de racine carrée.	Voir paragraphe plus haut
Propriétés liées à l'ordre : Si $a < 5$, alors $a - 2$ … Si $a < 5$, alors $-3a$…	Compléter régulièrement ce genre d'inégalités permet une meilleure appropriation. Lors de la correction, remplacer a par des valeurs numériques qui conviennent pour vérifier.
Résoudre des inéquations : $\frac{2}{3}x < 5$; $-2x < 5$	Les objectifs sont les mêmes que dans le paragraphe précédent.
Effectuer des calculs du type : $3,1 \times 2,3$	Ce type de calcul est déjà un objectif de la classe de Sixième, mais beaucoup d'élèves donnent encore 6,3 comme résultat en Troisième. C'est le moment de les rendre critiques de leurs résultats ($3,1 \times 2,3$ est supérieur à $3 \times 2,3$, donc à 6,9) et de revoir les propriétés en jeu.
Calculs de carrés de nombres : 21^2, 42^2, $1,3^2$	Ces calculs peuvent être commencés avant l'étude des produits remarquables, pour faire prendre conscience aux élèves que 21^2 n'est pas égal à $20^2 + 1^2$: par ordre de grandeur, 21^2 est supérieur à 21×20 ou 420. On utilise alors la distributivité : $21 \times 21 = 21 \times 20 + 21$.
Développements d'expressions littérales utilisant les produits remarquables : $(x + 4)^2$; $(3x - 4)^2$; $(3x - 4)(3x + 4)$	Un entraînement régulier permet une bonne reconnaissance et une application plus rapide de ces différentes règles. Bien sûr, on vérifiera à l'aide de tests numériques. On veillera à faire varier les différents coefficients, entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs.
Calculs de carrés en utilisant les produits remarquables, calculs de produits tels que : $2,3^2$; 19×21	On investit les produits remarquables dans le calcul numérique, après le travail fait préalablement à l'aide de la distributivité. On doit traiter l'erreur récurrente $2,3^2 = 4,9$. Pour cela, on peut rendre l'élève critique face au nombre de chiffres après la virgule du produit, utiliser pour cela l'écriture fractionnaire.

$(4-9)^2$ $\left(2-\frac{7}{3}\right)^2$	Montrer que dans ce genre de calculs, il est préférable de ne pas utiliser les produits remarquables.
Factorisations : x^2+6x+9 ; $9x^2-16$; $(x+4)^2-25$; $3x^2-6x$	Les objectifs restent les mêmes que pour les développements : une bonne reconnaissance et une application plus rapide des différentes règles de factorisations. Ce travail est à poursuivre tout au long de l'année scolaire. Il s'ensuivra une meilleure aisance et la charge de travail face à des expressions plus complexes sera ainsi allégée.
$\left(\sqrt{5}+2\right)^2$; $\left(3\sqrt{5}-4\right)\left(3\sqrt{5}+4\right)$	On poursuit le travail commencé sur les racines carrées, on y ajoute l'objectif précédent.
Écrire des nombres sous la forme $a\sqrt{b}$, simplifier des sommes avec radicaux : $\sqrt{50}$; $\sqrt{12}-\sqrt{3}$ $\sqrt{50}-\sqrt{18}$ $\sqrt{48}+75$	Le chapitre racine carrée est vu en cours, on peut maintenant appliquer les propriétés. Demander d'écrire $\sqrt{12}-\sqrt{3}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ permet de voir que $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ n'est pas, en général, égal à $\sqrt{a-b}$. En effet, la plupart des élèves vont répondre, dans un premier temps, $\sqrt{9}$, soit 3. Il faudra alors tirer parti de cette erreur. Voir régulièrement des nombres comme 48 et 75, les écrire sous la forme16 × 3 et 25 × 3 est aussi un enjeu important de la classe de Troisième. On aura à expliquer aux élèves la maladresse d'une décomposition comme 6 × 8 pour 48 ou 5 × 10 pour 50.
$\sqrt{54}\times\sqrt{6}$ $\sqrt{54}\times\sqrt{\frac{1}{6}}$	Le principal objectif est d'habituer les élèves à décomposer ($\sqrt{54}\times\sqrt{6}=\sqrt{9}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}$ …), plutôt que d'effectuer 54 × 6.
$\sqrt{19^2}$ $\sqrt{(-17)^2}$	Les programmes entraînent les élèves à écrire que $\sqrt{a^2}$ est égal à a pour a positif. Il est cependant important que le cas de a négatif soit abordé sur des exemples : ici, on pourra justifier que $\sqrt{(-17)^2}$ n'est pas égal à -17.
Équations dont la résolution nécessite deux étapes de calcul : $4x=2x+5$	Le calcul mental et l'approche régulière permettent de développer l'aisance des élèves dans ce domaine.
Équations se ramenant à des équations produits : $x^2-5x=0$ $4x^2-25=0$	On se limitera à des cas simples de factorisation.

$x \downarrow 3\%$ Résultat ? $x \uparrow 25\%$ Résultat ? $x \uparrow 100\%$ Résultat ?	Les flèches de hausse et de baisse n'ont pas de signification universelle mais, après en avoir fixé l'usage avec les élèves, elles permettent de faciliter l'écriture de ce qui est demandé. Ce travail sur les pourcentages doit aussi être régulièrement repris, complété avec ce qui a été vu en Quatrième.
$x \mapsto 0,89x$ $\downarrow$ de … % ?	On reprend le paragraphe précédent avec un travail dans le sens inverse.
f fonction linéaire $f(x) = \dfrac{2}{3}x \quad f(4) = \ldots$ $f(3) = 5 \quad f(x) == \ldots$	Le concept de fonction linéaire pose des difficultés à de nombreux élèves. Il faut régulièrement faire le lien entre cette connaissance nouvelle et les acquis sur la proportionnalités, acquis parfois très fragiles. Voici, par exemple, un procédé permettant de donner du sens à cette notion, pour le deuxième calcul : $\begin{array}{l} 3 \longrightarrow 5 \\ x \longrightarrow \cdots \end{array}$ On retrouve ici les schémas de proportionnalité vus dans les classes précédentes. Ainsi, se poser la question « par quel nombre multiplie-t-on 3 pour obtenir 5 » est fondamental, et l'élève doit comprendre que c'est ce nombre qui détermine le coefficient de la fonction linéaire, puis appliquer ce coefficient à x. Le travail sur la notation $f(x)$ doit aussi être régulier. C'est le principal objectif du premier type de calcul.
Diverses formules d'aires, de volumes. Conversions.	De nombreuses formules sont maintenant connues en Troisième. Il est important de les visiter régulièrement en essayant, lorsque c'est possible, de leur redonner du sens.

Bibliographie

« Le calcul numérique en question » de Rémi Jost, Bulletin APMEP 452.
Document d'accompagnement des programmes de l'école primaire : le calcul mental.
Document d'accompagnement des programmes de l'école primaire : articulation école-collège.
Rapport de l'Inspection Générale : le calcul au collège. 2004.
Rapport d'étape sur le calcul, Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques.
Brochure « Ressources pour le programme de Sixième », IREM de Strasbourg, 2002.
Brochure « Ressources pour le programme de Cinquième », IREM de Strasbourg, à paraître.
Apprentissages mathématiques en Cinquième, équipe ERMEL, INRP.
Les débuts de l'algèbre au collège, Gérard Combier, Jean-Claude Guillaume, André Pressiat, INRP.
L'algèbre par des situations problèmes au début du collège, Joëlle Vlassis et Isabelle Demonty, Éditions De Boeck.