Les décimaux, de l'École au Collège

Groupe de travail
« Activités mathématiques au collège »

Voici le dernier texte du Groupe « Activités mathématiques au collège » de l'APMEP. Nous avions commencé notre travail par « *Fractions au collège* » (BV n° 419) et poursuivi par : « *Des fiches pour la classe : Quadrilatères au collège* » (BV n° 422). Ont suivi : « *Sections de solides au Collège* » (BV n° 427), « *Observer… Expliquer… Justifier… Démontrer… à partir de la Cinquième* » (BV n° 430) et « *À propos des aires* (1), (2) et (3) » (BV n^{os} 438, 445 et 446).
Ont participé à ce groupe de travail à un moment ou à un autre : Henri Bareil, Catherine Brunet, François Colmez, Robert Delord, Jacques Germain, Valérie Larose, Maryvonne Le Berre, Michel Rousselet, Nicole Toussaint.

Jean Fromentin, coordonnateur

Les décimaux posent un problème d'enseignement à l'École et au Collège et les programmes de l'École (2002) et du Collège (2005) insistent très fortement sur la continuité de ces apprentissages entre les deux niveaux. Signalons tout de suite que le principal changement concernant les décimaux porte sur la division d'un décimal par un entier (cf. § Multiplication et division).
Le document d'application du programme du cycle 3 réserve tout un chapitre sur « Connaissances des fractions et des nombres décimaux » (pages 21 à 24) sans considérer les opérations sur les décimaux qui se trouvent dans la partie « Calcul ». Il est un outil essentiel pour le professeur de mathématiques de Collège. Notons que, dans les précédents programmes du Collège, certaines compétences qui étaient censées être acquises à l'entrée en sixième ou seulement évoquées dans la colonne des commentaires, sont maintenant explicitées dans la colonne « Compétences ». Citons, à titre d'exemple, la compétence suivante : « *Encadrer un nombre, intercaler un nombre entre deux autres* ».
Les objectifs conceptuels sur les décimaux dont il était déjà fait état dans la brochure de l'APMEP nº 61 de février 1986 : « Aides pédagogiques pour le cycle moyen – Nombres décimaux » sont, bien sûr, toujours d'actualité :

– *se rendre compte de l'insuffisance des entiers naturels pour résoudre certains problèmes ;*
– *créer de nouveaux nombres pour résoudre des problèmes qui n'avaient pas de solution dans les entiers ;*
– *prolonger aux nouveaux nombres l'ordre qu'on avait sur les entiers ;*
– *concevoir qu'entre deux nouveaux nombres, on peut toujours en intercaler un autre ;*
– *prolonger aux nouveaux nombres les quatre opérations ;*
– *utiliser les nouveaux nombres dans des situations d'approximation.*

Ce sont ces objectifs qui doivent guider notre enseignement et c'est ce que nous

avons essayé de faire au travers des activités que nous vous proposons ci-après.
Il ne s'agit pas, dans ces activités, de refaire en classe de sixième un apprentissage complet des décimaux, mais de proposer des situations où les décimaux prennent tout leur sens pour permettre aux élèves d'entretenir, d'enrichir ou de corriger les connaissances élaborées antérieurement.

Quelques constats

Les évaluations à l'entrée en Sixième ont permis aux enseignants de prendre conscience que la principale erreur faite par les élèves est le traitement séparé des parties entières et décimales dans l'écriture à virgule. Cette erreur se rencontre dans plusieurs situations :

– Dans les additions ou soustractions en ligne de deux décimaux : $30{,}3 + 15{,}8 = 45{,}11$; $21{,}15 + 7{,}6 = 28{,}21$ ou $39{,}12 - 6{,}4 = 33{,}8$.
– Dans les multiplications par 10, 100 ou 1 000, on observe une constance dans l'erreur qui est donc bien liée à une mauvaise conception du décimal. Un même élève opérera sur la partie entière ou sur la partie décimale, voire sur les deux !
  Élève A : $35{,}2 \times 10 = 35{,}20$ ou $23{,}56 \times 100 = 23{,}5600$.
  Élève B : $35{,}2 \times 10 = 350{,}2$ ou $23{,}56 \times 100 = 2300{,}56$.
  Élève C : $35{,}2 \times 10 = 350{,}20$ ou $23{,}56 \times 100 = 2300{,}5600$.
– Dans le rangement des décimaux, ce traitement séparé des parties entière et décimale se manifeste de la façon suivante bien connue : $3{,}5 < 3{,}24 < 3{,}123$. La partie entière étant la même, les parties décimales sont lues comme des entiers.
– En quatrième ou en troisième, il arrive encore de trouver : $2{,}4^2 = 4{,}16$.

Quelles réponses ?

La lecture avec sens est fondamentale

L'usage des expressions « complexes » (3 m 25 cm ; 15 € 35 centimes) et des écritures décimales qui en découlent (3,25 m ; 15,35 €) peut induire en effet la conception erronée (deux entiers séparés par une virgule) du nombre décimal et donc un traitement séparé des parties entière et décimale. Il ne faut pourtant pas négliger les mesures de grandeurs. À l'exception des durées, elles sont l'occasion, par l'intermédiaire des conversions, de calculer sur les décimaux, ces calculs donnant du sens à ces derniers.
C'est en tant que valeurs approchées de rationnels ou de réels que les décimaux ont leur utilité et prennent vraiment leur sens. À l'occasion d'un calcul qui donne par exemple comme résultat 3 214 m, il est important que l'élève se représente cette valeur en mettant en évidence le chiffre significatif par choix de l'unité ad hoc, par exemple 3 214 m = 3,214 km c'est-à-dire 3 km et quelque. Plus l'unité est petite, plus la mesure est grande. De la même façon, plus l'unité est grande, plus la mesure est petite, ce qui est plus difficile pour les élèves car cela nécessite de mettre en œuvre le concept en cours d'élaboration. Une mesure de grandeur inférieure à 1, c'est nouveau !

À l'École, les décimaux ont été introduits à partir des fractions décimales, la notion de fraction ayant été abordée le plus souvent sur des partages simples. Les derniers programmes de l'École et du Collège insistent aussi sur « Parler, lire et écrire en mathématiques »[1]. Ainsi, pour construire peu à peu une bonne représentation des décimaux, il est important de dire, de lire en « compréhension » les fractions décimales ou les nombres décimaux. Par exemple 0,4 et 4/10 sont deux notations du même nombre qu'on devrait lire « quatre dixièmes » et non pas « zéro virgule quatre » ou « quatre sur dix ». Le nombre ayant pour écriture décimale : « 3,45 » peut se lire « 3 unités et 45 centièmes » ou encore « 3 unités 4 dixièmes et 5 centièmes ». Il peut aussi être lu « 345 centièmes » et peut être écrit 3 + 45/100 ou 3 + 4/10 + 5/100 ou encore 345/100. La lecture « trois virgule quarante-cinq », bien pratique, pourra être utilisée seulement lorsque le concept de décimal sera bien installé, quitte à faire le lien, quand cela est nécessaire, avec la lecture « Trois unités plus quarante-cinq centièmes ». Les variétés d'écritures (décimales et fractionnaires) et les lectures associées sont primordiales pour une bonne appropriation du nombre décimal.

La division par 0,1 et 0,01 est supprimée dans le programme actuel de sixième. Elle relevait plus du mécanisme que de la compréhension[2]. En revanche, la multiplication et la division par 10 et 100, la multiplication par 0,1 et 0,01 participent à la construction du sens sur les décimaux.

Multiplication et division

Comme dans les programmes précédents, la multiplication de deux entiers et celle d'un décimal par un entier sont des compétences de fin de cycle 3. La multiplication de deux décimaux relevait déjà du programme de sixième. Il y a en effet un saut conceptuel à franchir de la part des élèves à propos de cette dernière compétence. En ce qui concerne la division, seule la division euclidienne reste au programme du cycle 3, avec l'acquisition du sens du quotient et du reste ainsi que la pratique du calcul posé. Mais, pour être tout à fait clair à ce sujet, citons les commentaires du document d'application du programme du cycle 3 :
« *Le calcul de divisions (quotient entier et reste) doit être limité à des cas “ raisonnables ” : dividende ayant au plus 4 chiffres, avec pose effective des soustractions intermédiaires et possibilité de poser des produits partiels annexes pour déterminer certains chiffres du quotient. L'algorithme de la division sera repris dans le programme de sixième et prolongé au cas du quotient décimal.*
Le calcul d'un quotient décimal issu de la division de deux entiers ou d'un décimal par un entier n'est donc pas une compétence exigible au cycle 3. Mais des situations où les élèves sont conduits à chercher ce type de résultat par des procédures personnelles doivent être proposées. Par exemple, s'il s'agit de partager équitablement 203 euros entre 5 personnes, les procédures suivantes peuvent être utilisées :

(1) Document d'application des programmes – mathématiques cycle 3 – pages 8 et 9.
Introduction générale pour le collège – 3.5 : Mathématiques et langages, 3.6 : Différents types d'écrits.
(2) On peut considérer qu'elle est traitée en cinquième par la compétence : « *Ramener une division dont le diviseur est décimal à une division dont le diviseur est entier et savoir l'effectuer* » avec, comme commentaire : « *Ce travail est à conduire en relation avec les égalités d'écritures fractionnaires* ».

– *convertir les 203 euros en 20 300 centimes, puis effectuer la division ;*
– *donner 40 euros à chacun, puis convertir les 3 euros restants en 300 centimes pour terminer le partage ;*
– *“ poser la division de 203 par 5 ”, puis convertir le reste (3 unités) en 30 dixièmes pour poursuivre le calcul.*

Dans tous les cas, on reste au niveau d'un calcul réfléchi explicite, sans viser la mise en place d'un automatisme. La calculatrice peut également être utilisée lorsque, par exemple, le calcul de la division de 203 par 5 a été reconnu comme pertinent, l'attention des élèves devant être attirée sur l'interprétation du résultat affiché, notamment sur les chiffres significatifs de la partie décimale. »

Vous trouverez à la fin de cet article, un texte concernant l'apprentissage de la division : « **La technique de la division de l'École élémentaire au Collège** ». Ce texte n'est pas une activité, mais il décrit de façon précise l'évolution de la technique opératoire de la division en liaison avec le sens de cette opération. Rappelons que c'est dans le cadre de la résolution de problèmes que cette technique est mise en place. Ce texte sera très utile pour assurer la continuité des apprentissages de l'École au Collège.

Activités sur les décimaux(*)

Voici, décrites les unes après les autres, les activités proposées sur les décimaux. Ces activités concernent à la fois l'École et le Collège. À l'École, elles peuvent être utilisées comme activités de construction, de structuration ou de consolidation (pour reprendre les différents niveaux d'études d'une notion présentés dans les éléments d'aide à la programmation du document d'application des programmes du cycle 3), suivant l'année ou le niveau des élèves. Au Collège, elles peuvent être utilisées comme activités de structuration ou de consolidation suivant les difficultés observées chez les élèves.

Rectangles de même périmètre – Rectangles de même aire

La première activité « **Rectangles de même périmètre** » est plutôt destinée aux élèves de l'École. La notion de périmètre peut être abordée assez tôt et les mesures de longueur peuvent donc servir de support aux nombres décimaux. Les changements successifs de cadre (géométrique, numérique, graphique), avec une interaction permanente entre les trois domaines, facilitent la découverte de ces nouveaux nombres et assurent leur « existence ».

La deuxième activité « **Rectangles de même aire** », construite sur le même principe que la précédente, en est un prolongement. Un peu plus complexe, du fait de l'utilisation de la notion d'aire et du non-alignement des points du graphique, elle est toutefois facilitée par l'activité précédente sur les périmètres. La recherche du carré qui a une aire de 12 cm^2 est, bien sûr, le temps fort de ce travail. Les élèves pourront approcher, à l'aide de la calculatrice, la mesure du côté du carré autant qu'ils le souhaiteront (en dépassant la plus petite unité de longueur qu'ils connaissent : le millimètre), ce qui est primordial dans l'acquisition du concept de nombre décimal.

(*) On trouvera les fiches de ces activités en fin d'article.

Cette activité, destinée aussi aux élèves de l'École, trouve également sa place en classe de sixième pour, justement, entretenir, améliorer ou corriger les conceptions que les élèves ont sur les décimaux, comme nous le disions plus haut. Il va de soi que l'utilisation de la touche « racine carrée » ruinerait toute la richesse de cette activité.
Une autre approche possible, à l'occasion de cette activité, est de faire travailler les élèves sur des zones graphiques : colorier en rouge les points qui représentent des rectangles dont l'aire est plus petite que 12 cm^2 ; colorier en vert les points qui représentent des rectangles dont l'aire est plus grande que 12 cm^2 ; apparaîtra alors une zone « frontière » où les élèves pourront situer à peu près le point qui représentera le carré d'aire 12 cm^2.
Pour ces deux activités, ainsi que pour les suivantes, le rétroprojecteur permettra une meilleure communication avec les élèves.

En y regardant de plus près !!

Comme les précédentes, cette activité trouve sa place à la fois en cycle 3 et en classe de sixième. On reste dans le domaine de la mesure ; mais la seconde étant utilisée comme unité de temps, les élèves ne peuvent pas choisir de sous-unités pour se ramener à des entiers. Nous ne pensons pas que la notion de vitesse, en jeu ici, soit un obstacle pour les élèves.
Cette activité a plusieurs objectifs :

- Travailler sur les écritures décimales et fractionnaires et sur l'expression orale de ces écritures ;
- Se rendre compte de la nécessité, pour pouvoir comparer, d'utiliser des graduations plus fines : le dixième, le centième ;
- Construire une bonne représentation mentale, à l'aide des zooms successifs, de l'intercalation toujours possible d'un décimal entre deux décimaux.

Toujours plus près !!

De la droite au plan, la route rectiligne assure le lien avec l'activité précédente. La notion d'échelle mise en jeu ici ne nous semble pas être un obstacle pour les élèves puisqu'il s'agit de rester dans les représentations mentales : 1 cm représentant 1 km. L'objectif principal est la comparaison de décimaux. Contrairement à l'activité précédente, il ne s'agit pas de placer précisément les points sur la carte, ce qui serait d'ailleurs impossible, mais de comparer des décimaux en s'aidant de la situation géométrique proposée. L'interaction entre les cadres géométrique et numérique, par l'intermédiaire de la mesure, facilite la compréhension du problème et la familiarisation avec les décimaux.

La machine infernale

La multiplication et la division par 10 sont bien sûr à la base de notre système de numération décimale. La pratique de ces opérateurs ne peut que faciliter l'appropriation du concept de nombre décimal. Les « passages » de chiffres de la partie entière vers la partie décimale et réciproquement ne peuvent qu'aller à l'encontre de la mauvaise représentation du décimal signalée précédemment : « deux nombres entiers séparés par une virgule ». De plus, cette activité très ludique par les défis à relever ne nécessite pas, contrairement à ce que le début du texte pourrait laisser entendre, l'utilisation de la calculatrice. Au contraire, les multiplications et divisions par 10, par 100, par 1000 font partie du domaine du calcul mental automatisé signalé dans les programmes de l'école primaire.

Pas touche

Cette fiche n'est pas prévue pour un travail totalement autonome des élèves. En particulier, la première partie nécessite un travail collectif.
Ici, la calculatrice est utile. Mais il est évident qu'elle sert essentiellement à valider la série de calculs que l'élève aura trouvée. La recherche se fait obligatoirement mentalement ; c'est la pensée qui précède l'action. Comme dans l'activité précédente, l'élève doit agir sur les fondements même de notre système de numération décimal et c'est cela qui est très formateur.
Dans la troisième partie, les élèves ne sont pas obligés d'utiliser des produits avec les seules puissances de 10. Par exemple, ils peuvent obtenir 300 avec 50×6.

La multiplication des décimaux

Les documents sur la multiplication des décimaux sont organisés en deux parties.
Une première partie concerne les produits de puissances de 10. Il ne s'agit pas ici d'utiliser la notation sur les puissances de 10 ; il s'agit au contraire d'expliquer aux élèves quels sont ces nombres qu'on appelle « puissances de 10 », de travailler sur leurs deux écritures (fractionnaire et décimale) et sur leur dénomination. L'acquisition du sens des nombres décimaux et des capacités à opérer sur les décimaux passe en effet par la faculté de dire, d'écrire ces nombres et de passer d'une écriture à l'autre. C'est pourquoi les trois fiches de travail de cette première partie font lire, écrire et opérer les élèves sur ce que nous appelons les puissances de 10 sous les trois formes énoncées précédemment. La compréhension et la maîtrise du produit de deux nombres décimaux passent par la maîtrise du produit des puissances de 10. Il est bien évident que ces puissances de 10 (unité, dizaines, centaines, … dixièmes, centièmes, …) doivent avoir du sens pour les élèves. Pour cela, une activité telle que « En y regardant de plus près » peut y aider.
La deuxième partie comporte trois fiches. Les deux premières s'adressent plutôt au professeur. Ce dernier peut les utiliser devant les élèves, à l'aide du rétroprojecteur, pour leur expliquer la méthode « per gélosia » décrite ici. Cette méthode est particulièrement intéressante dans une activité de soutien. Elle ne handicape pas les élèves qui ont des difficultés dans la connaissance des tables. Contrairement à la technique habituelle de la multiplication, les produits partiels étant tous écrits complètement, il est facile de repérer les erreurs de tables. La disposition utilisée permet de gérer facilement les différentes unités (unités, dizaines, centaines, … dixièmes, centièmes, …). La première fiche concerne les nombres entiers, la deuxième fiche les nombres décimaux. Dans cette deuxième fiche, le professeur a le choix entre deux méthodes proposées. Une troisième méthode peut consister à faire évoluer les élèves de la première vers la deuxième en veillant toujours à ce qu'ils gardent le sens de ce qu'ils font. La troisième fiche propose quelques exercices en complément de l'une et de l'autre des deux fiches précédentes.

Conclusion

La lecture seule du texte officiel des programmes du cycle 3 de l'École primaire parus au BO hors série n° 1 du 14 février 2002 n'est pas suffisante pour assurer une bonne liaison entre l'École et le collège. Aussi, nous invitons le lecteur à consulter les deux documents suivants qui accompagnent ces programmes et qui nous paraissent essentiels. Ces deux documents édités par le CNDP ont été en principe adressés à tous les collèges. Ils devraient figurer dans chaque CDI.

Le **document d'application** (cycle 3), présenté en deux colonnes, donne en regard de chaque compétence des indications d'ordre pédagogique, des précisions de niveaux d'approfondissements et assure le lien avec le cycle 2 en amont et avec la classe de sixième en aval. Vous trouverez en particulier dans l'introduction de ce document deux thèmes étroitement liés à l'objet de cet article, « *La question du calcul aujourd'hui* » et « *Parler, lire et écrire en mathématiques* ». La dernière partie de ce document propose des éléments d'aide à la programmation des apprentissages sur les trois années du cycle 3. Cette partie intéresse particulièrement le professeur de mathématiques de sixième car cette programmation inclut, en perspective, la classe de sixième. Ainsi, pour chaque compétence, un tableau indique à quel moment chacun des trois types d'activités : approche/préparation, construction/structuration et consolidation/utilisation peut être proposé aux élèves. On peut y observer que la plupart des compétences sur les décimaux sont encore en phase de construction et de structuration en sixième.

Les **documents d'accompagnement** regroupés dans une même brochure traitent différents thèmes sur l'ensemble des deux cycles de l'École Élémentaire. En liaison avec cet article, vous pourrez lire plus particulièrement « *Le Calcul mental à l'École élémentaire* », « *Le calcul posé à l'École élémentaire* », « *Utiliser les calculatrices en classe* », « *Grandeurs et mesure à l'École élémentaire* » et « *Articulation École – Collège* ».

La technique de la division de l'école élémentaire au collège

La division euclidienne

La division euclidienne (dont on ne prononce pas forcément le nom à l'École) est introduite au cycle 3 (toujours en référence à la résolution de problèmes) : *Le calcul de divisions* … cf. pages 26/27 du document d'application des programmes du cycle 3.

La présentation suivante de la technique opératoire est inspirée d'une brochure « Nombres décimaux », liaison École/Collège de l'IREM de Paris 7. Elle s'appuie sur l'encadrement du dividende par deux multiples consécutifs du diviseur, encadrement lié au placement d'une fraction $\frac{a}{b}$ sur une droite graduée. Il s'agit donc de trouver l'entier q tel que $q < a/b < q + 1$, ce qui revient à : $b \times q < a < b \times (q + 1)$; q est alors le quotient entier à une unité près par défaut, et $q + 1$ le quotient entier à une unité près par excès. Le reste de la division : $r = a - b \times q$ est plus petit que b.

Exemple : 436 : 17 = $\dfrac{436}{17}$. Un petit travail sur les ordres de grandeur indique que le quotient est compris entre 10 et 100 (donc un nombre à deux chiffres) et de l'ordre de 20 en écrivant d'abord les multiples de 17 par les dizaines entières successives :

$$17 \times 10 = 170$$
$$17 \times 20 = 340$$
$$17 \times 30 = 510$$

On s'arrête car le multiple rencontré est plus grand que le dividende. Ainsi, le quotient entier est compris entre 20 et 30.

$$436 - (17 \times 20) = 436 - 340 = 96 \text{ et } 96 < 17 \text{ x } 10$$

On prend alors les multiples successifs de 17 jusqu'à en rencontrer un plus grand que 96 :

$$17 \times 1 = 17$$
$$17 \times 2 = 34$$
$$17 \times 3 = 51$$
$$17 \times 4 = 68$$
$$17 \times 5 = 85$$
$$17 \times 6 = 102$$
$$96 = 85 + 11 = (17 \times 5) + 11 \text{ et } 11 < 17$$

On peut profiter de la phase précédente pour rappeler que « réciter la table des 17 » consiste à « compter de 17 en 17 à partir de 0 ».

On a donc :

$$436 = 340 + 85 + 11 = (17 \times 20) + (17 \times 5) + 11 = 17 \times 25 + 11.$$

Dans un premier temps, on adopte la disposition suivante :

<table>
<tr><td rowspan="3">436
– 340
96
– 85
11</td><td>17</td><td rowspan="3">17 × 1 = 17
17 × 2 = 34
17 × 3 = 51
17 × 4 = 68
17 × 5 = 85
17 × 6 = 102</td></tr>
<tr><td>17 × 20 = 340</td></tr>
<tr><td>17 × 5 = 85</td></tr>
</table>

Cette présentation va s'alléger, plus ou moins vite selon les élèves, pour aboutir à une disposition telle que :

<table>
<tr><td>436
– 340
96
– 85
11</td><td>17
20
+ 5
25</td><td>17 × 1 = 17
17 × 2 = 34
17 × 3 = 51
17 × 4 = 68
17 × 5 = 85
17 × 6 = 102</td></tr>
</table>

Puis, à celle, plus connue, tout en maintenant les soustractions écrites et éventuellement, à la disposition habituelle qu'il n'est même pas obligatoire que tous les élèves atteignent. En effet, il est préférable d'entretenir le sens de la division au travers de la technique opératoire enseignée.

Quotients décimaux approchés ou exacts (« Poursuite » de la division d'entiers)

Les élèves arrivant en sixième auront rencontré des quotients décimaux dans des résolutions de problèmes, mais n'auront pas, en principe, la maîtrise de la technique opératoire correspondante.
Reprenons l'exemple précédent, avec la première disposition proposée.

Les élèves savent que $11 = \frac{110}{10}$; donc, en prenant le $\frac{1}{10}$ comme unité, cela revient à situer 110 parmi les multiples de 17, ou encore 11 parmi les produits $17 \times 0{,}1$; $17 \times 0{,}2$; $17 \times 0{,}3$; etc.
On passera ensuite aux centièmes, puis aux millièmes, et ainsi de suite, ce qui permet d'étendre la technique opératoire à la recherche de quotients décimaux.

436	17	17 × 1 = 17
– 340	17 × 20 = 340	17 × 2 = 34
96		17 × 3 = 51
– 85	17 × 5 = 85	17 × 4 = 68
11		17 × 5 = 85
– 10,2	17 × 0,6 = 10,2	17 × 6 = 102
0,8		17 × 7 = 119
– 0,68	17 × 0,04 = 0,68	17 × 8 = 136
0,12		17 × 9 = 153
– 0,119	17 × 0,007 = 0,119	
0,001	20 + 5 + 0,6 + 0,04 + 0,007 = 25,647	

436 = (17 × 25,647) + 0,001

On peut aussi ne pas mettre les virgules dans les opérations successives en changeant à chaque ligne d'unité de référence, ce qui relève de l'habituel « j'abaisse un zéro **après** avoir mis une virgule au quotient dès que je n'ai plus de chiffres à abaisser dans le dividende », mais il faut bien avouer que cela n'a pas beaucoup de sens pour un bon nombre d'élèves.

Quotients d'un décimal par un entier

La technique précédente s'adapte immédiatement si on veut s'arrêter au quotient entier :

436, 207	17	$17 \times 1 = 17$
− 340	$17 \times 20 = 340$	$17 \times 2 = 34$
96, 207		$17 \times 3 = 51$
− 85	$17 \times 5 = 85$	$17 \times 4 = 68$
11, 207		$17 \times 5 = 85$
		$17 \times 6 = 102$

436,207 = 17 × 25 + 11,207

Pour trouver des quotients décimaux, on reprend, là aussi, toujours la même disposition, en passant comme précédemment aux dixièmes, aux centièmes, …, mais en tenant compte cette fois des dixièmes, des centièmes qui figurent dans le dividende, c'est-à-dire en « abaissant » les chiffres successifs de la partie décimale du dividende :

436, 207	17	$17 \times 1 = 17$
− 340	$17 \times 20 = 340$	$17 \times 2 = 34$
96, 207		$17 \times 3 = 51$
− 85	$17 \times 5 = 85$	$17 \times 4 = 68$
11, 207		$17 \times 5 = 85$
− 10, 2	$17 \times 0{,}6 = 10{,}2$	$17 \times 6 = 102$
1, 007		$17 \times 7 = 119$
− 0, 85	$17 \times 0{,}05 = 0{,}85$	$17 \times 8 = 136$
0, 157		$17 \times 9 = 153$
− 0, 153	$17 \times 0{,}009 = 0{,}153$	
0, 004	$20 + 5 + 0{,}6 + 0{,}05$ $+ 0{,}009 = 25{,}659$	

436,207 = 17 × 25,659 + 0,004
25,659 est une valeur approchée au millième du quotient ; on peut obtenir des valeurs approchées plus précises en poursuivant le processus, c'est-à-dire en « ajoutant » des zéros à la partie décimale du dividende.

Quotients d'un décimal par un décimal

Prévu maintenant au niveau Cinquième, ce travail est commenté par la phrase : « *à conduire en relation avec les égalités d'écritures fractionnaires* ».

Ainsi : $436{,}207 : 17{,}08 = \dfrac{436{,}207}{17{,}08} = \dfrac{43\,620{,}7}{1\,708} = 43\,620{,}7 : 1\,708.$

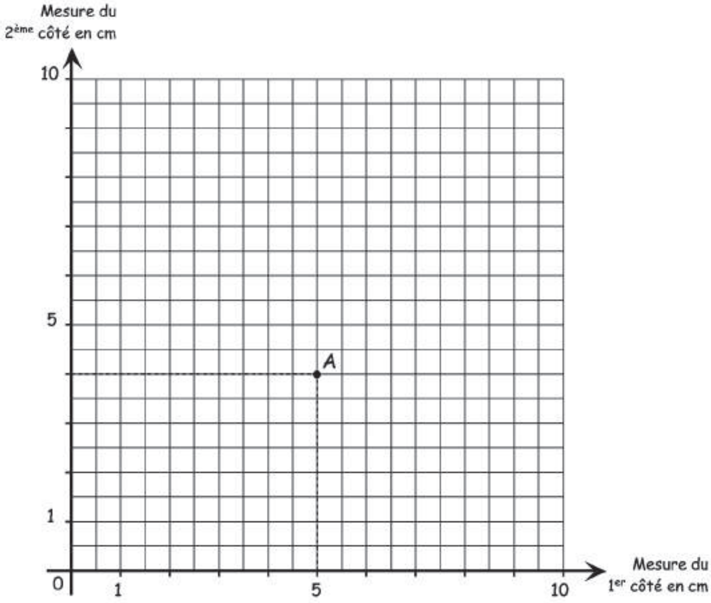
Chercher les quotients décimaux de 436,207 par 17,08 revient donc à chercher les quotients décimaux de 43 620,7 par 1 708, ce qui aura été fait au niveau Sixième et ne devrait nécessiter qu'un entretien, **avec cependant la remarque que si le quotient est le même, le reste ne l'est pas** :
436,207 = 17,08 × 25,53 + 0,1546
43 620,7 = 1 708 × 25,53 + 15,46.

Fiches des activités

Rectangles de même périmètre...

... sur feuille à carreaux 5 x 5.

Sur une feuille à petits carreaux, dessine un rectangle de côtés 4 cm et 5 cm. Quel est le périmètre de ce rectangle ?
Sur la même feuille, dessine au moins quatre autres rectangles de dimensions différentes qui ont le même périmètre. On dira que ces rectangles sont de la même famille.
Représente ces rectangles sur le graphique ci-dessous comme cela a été fait pour le rectangle de dimensions 4 cm et 5 cm. Pour chacun de ces rectangles, nomme le quatrième sommets B, C, D, etc, comme on l'a fait avec le point A



Que remarques-tu ? Place d'autres points sur le graphique en vérifiant que les rectangles qu'ils représentent ont toujours le même périmètre et qu'ils sont donc de la même famille.
Parmi tous ces rectangles, lesquels ont la plus grande aire ?

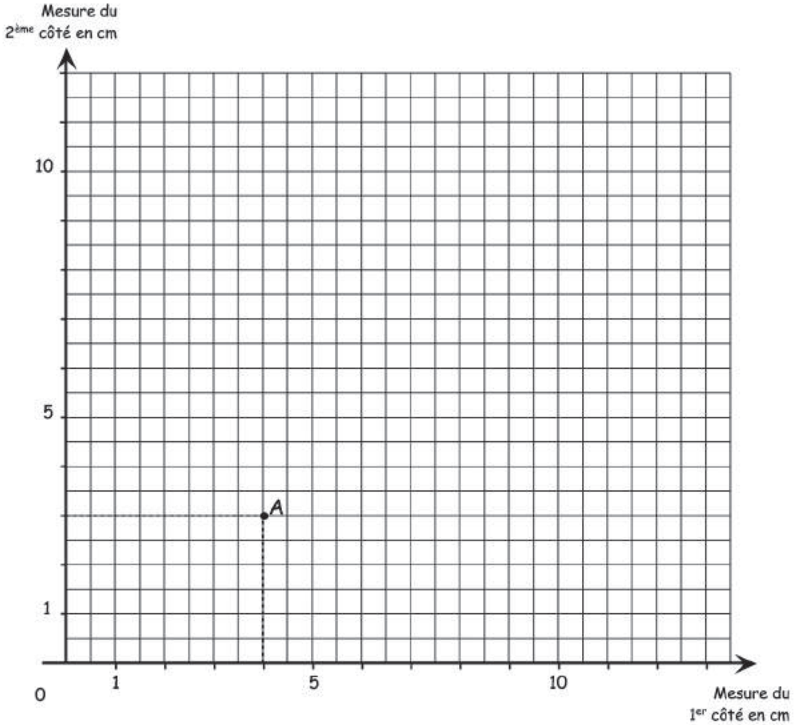
... sur papier millimétré.

Reproduis le graphique ci-dessus sur une feuille de papier millimétré et place tous les points que tu avais obtenus.
Trouve d'autres points qui représentent des rectangles de la même famille. Place-les et vérifie que ces nouveaux rectangles ont bien le même périmètre.
Existe-t-il un rectangle de cette famille dont la longueur d'un côté est comprise entre 3,6 cm et 3,7 cm ? En existe-t-il d'autres ? Place les points correspondants sur le graphique.
Où se trouvent tous les points de cette famille de rectangles ?

Rectangles de même aire...

Des rectangles

On a dessiné, sur le graphique ci-dessous, un rectangle de côtés 4 cm et 3 cm. Quelle est l'aire de ce rectangle ? Ce rectangle est représenté graphiquement par le point A(4 ; 3). Quel lien peux-tu faire entre les coordonnées de A et l'aire du rectangle ?
Trouve d'autres rectangles ayant la même aire. Représente chacun de ces rectangles par un point sur le graphique. Marque ces points en rouge.
À l'aide de la calculatrice, trouve d'autres points qui représentent des rectangles d'aire 12 cm² et place-les sur le graphique ci-dessous. Places-en le plus possible. Trace en rouge, et à main levée, une ligne reliant tous ces points.

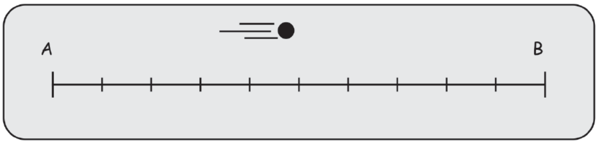


Des carrés

Sur le graphique, place les points qui représentent les carrés d'aires 4 cm², 9 cm², 16 cm², 25 cm². Que remarques-tu ?
Trace en bleu la ligne reliant tous les points qui représentent des carrés.
Que représente le point qui est à la fois sur la ligne rouge et sur la ligne bleue ?
Quelle est l'aire du carré de côté 3,5 cm ? Et celle du carré de côté 3,4 cm ?
À l'aide de la calculatrice, trouve la mesure, à un dixième de millimètre près, du côté du carré qui a une aire de 12 cm².
Peux-tu obtenir une mesure plus précise ?

En y regardant de plus près .... !!

I) Dans un jeu vidéo, un projectile est lancé, à vitesse constante, à partir du point A.
Il arrive au point B en une seconde. Il s'agit de l'intercepter avant qu'il arrive en B.



1°) Claude l'a intercepté en un dixième de seconde, Emmanuelle en quatre dixièmes de seconde, Frédéric en sept dixièmes et Dorothée en trois dixièmes.
Marque sur le segment [AB] la position du projectile au moment où chacun des enfants l'a intercepté et désigne ces positions par les lettres C pour Claude, D pour Dorothée, E pour Emmanuelle et F pour Frédéric.

2°) On peut lire, dans une fenêtre de l'écran de l'ordinateur, les scores des joueurs. Cette fenêtre donne le score, par exemple "deux dixièmes", en écriture décimale : 0,2 et en écriture fractionnaire : $\frac{2}{10}$

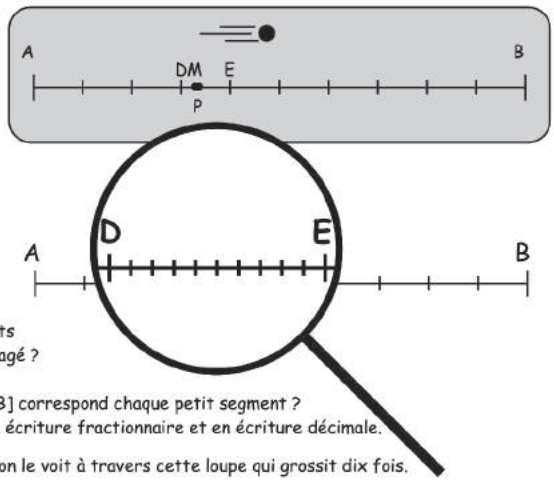
Complète la fenêtre ci-dessous qui donne aussi les scores de trois autres joueurs.

Joueurs	Scores	Écritures	
		fractionnaires	décimales
Claude	Un dixième		
Gwendoline	Deux dixièmes	$\frac{2}{10}$	0,2
Dorothée	Trois dixièmes		
Emmanuelle			
Frédéric			
Louise		$\frac{9}{10}$	
Quentin			0,5

Au fait, comment peut-on écrire le nombre " dix dixièmes " ?

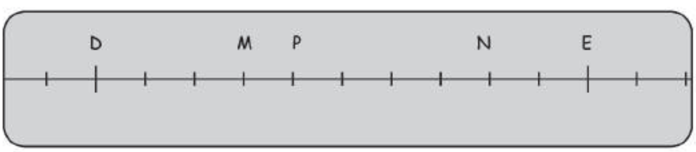
En y regardant de plus près .... !! (suite)

II) Marc et Pauline ont intercepté le projectile entre trois et quatre dixièmes de seconde. Pour savoir lequel a été le plus rapide, le jeu vidéo propose une loupe qui se déplace de A en B.
Cette loupe permet de voir que chacun des dix segments est partagé lui-même en dix petits segments de même longueur.



1°) En combien de petits segments le segment [AB] est-il donc partagé ?
Explique ta réponse.
À quelle fraction du segment [AB] correspond chaque petit segment ?
Donne ce nombre en français, en écriture fractionnaire et en écriture décimale.

2°) Voici le segment [DE] tel qu'on le voit à travers cette loupe qui grossit dix fois.



Sur la feuille précédente, on a donné les temps d'interception du projectile de Dorothée et d'Emmanuelle en dixièmes de seconde ; reécris-les sur la graduation ci-dessus en centièmes de seconde, puis indique les temps d'interception de Marc (M), de Pauline (P) et de Noémi (N).
3°) Complète la fenêtre ci-dessous qui donne à l'écran de l'ordinateur les temps d'interception de Dorothée, Marc, Noémi, Pauline et Emmanuelle.

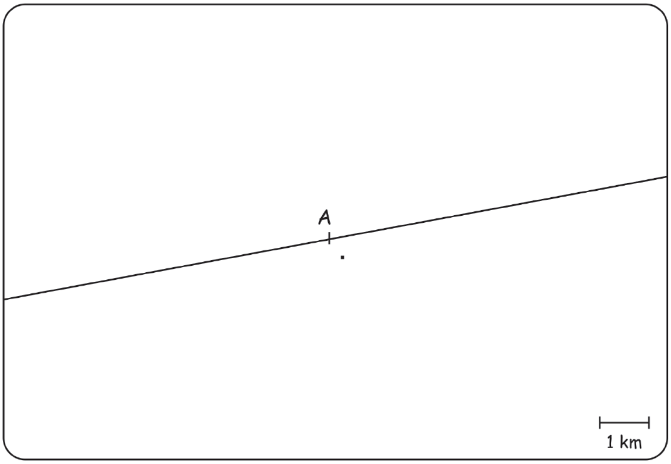
Joueurs	Scores	Écritures	
		fractionnaires	décimales
Dorothée	Trente centièmes		
Marc			
Noémi			
Pauline			
Emmanuelle			

III) Et si on découvrait, à l'aide d'une loupe plus puissante, que chacun des petits segments est lui-même partagé en dix parties d'égale longueur... ?
Donne ton avis.

Toujours plus près !!

Première partie

Le cadre ci-dessous est un morceau de carte sur laquelle 1 cm représente 1 km. Ce cadre est traversé par une route rectiligne passant par le point A.



1°) Marque en rouge, sur la route, trois points situés à moins de 4 km de A et en vert trois points situés à plus de 4 km de A.
2°) Marque en rouge, hors de la route, trois points situés à moins de 4 km de A et en vert trois points situés à plus de 4 km de A.
3°) Colorie en rouge la partie du cadre où les points sont tous à moins de 4 km de A et en vert la partie du cadre où les points sont tous à plus de 4 km de A.
Reste-t-il une zone non coloriée ?

Deuxième partie

Voici des renseignements sur les points E, F, G, H, I, J et K :

E est à 3,8 km de A	F est à 4,12 km de A,	G est à 3,958 km de A,
H est à 4,2 km de A,	I est à 4,045 km de A,	J est à 3,96 km de A,
K est à 3,86 km de A.		

1°) Comment peut-on savoir dans quelle zone (rouge ou verte) se trouve chacun de ces points ?
2°) Parmi ces sept points, lesquels se trouvent à moins de 3,9 km de A ? Quel est le plus près de A ? Explique ta réponse.
3°) Parmi ces sept points, lesquels se trouvent à plus de 4,1 km de A ? Quel est le plus près de A ? Explique ta réponse.
4°) Imagine six autres points qui sont à plus de 4,1 km de A, mais encore plus près de A que les précédents. Donne leurs distances à A.

D'après "les décimaux en Sixième" (IREM de Poitiers).

La machine infernale !

Cette bizarre calculatrice affiche 3.14 quand on la remet à zéro et ne sait faire que les quatre opérations suivantes :

Ajouter 1	+ 1	Multiplier par 10	x 10
Soustraire 1	- 1	Diviser par 10	÷ 10

Exerce-toi avec une telle machine :

Opérations		x 10	x 10	- 1	- 1	÷ 10	÷ 10
Résultats	3,14						
Opérations		x 10	- 1	- 1	÷ 10	+ 1	÷ 10
Résultats	3,14						

Tu peux obtenir les quatre nombres suivants en sept opérations :

Opérations								
Résultats	3,14							300
Opérations								
Résultats	3,14							0,004
Opérations								
Résultats	3,14							297
Opérations								
Résultats	3,14							3,141

À partir des résultats précédents, continue pour obtenir les nombres demandés.

Opérations								
Résultats	300							30,99
Opérations								
Résultats	0,004							600
Opérations								
Résultats	297							0,2
Opérations								
Résultats	3,141							30 421

Défi n° 1

Tu as trouvé 0,2 à partir de 3,14 en 14 opérations. On peut faire mieux :
* Trouve un chemin de 3,14 à 0,2 en 10 opérations.

* Trouve un chemin de 2 à 1,99 en 5 opérations
* Trouve un chemin de 2 à 2,99 en 6 opérations.
* Trouve un chemin de 2 à 1,09 en 7 opérations.

* Tu peux trouver beaucoup d'informations sur π à l'adresse suivante : http://www.pi314.net/

Défi n° 2

Connais-tu le nombre π ? (la lettre grecque se prononce pi). À quel sujet en as-tu entendu parler ? Sais-tu pourquoi on désigne ce nombre par une lettre ?
3,14 est une valeur approchée de π arrondie au centième. 3,142 ; 3,1416 ; 3,14159 sont respectivement les valeurs approchées arrondies au millième, au dix-millième, au cent-millième.
* Trouve un chemin, le plus court possible, de 3,14 à 3,142 ; de 3,14 à 3,1416 ; de 3,14 à 3,14159.

Pas touche !

Première partie

1°) Tu vas utiliser ta calculatrice. Comme celle qui figure ci-contre, les touches "remise à zéro" ON/C et "virgule" • sont interdites.

Pour afficher 0,25 je peux, par exemple, effectuer les opérations suivantes :

25 $\xrightarrow{\div 10}$ 2,5 $\xrightarrow{\div 10}$ 0,25 ou 25 $\xrightarrow{\div 100}$ 0,25

Comment afficher les nombres 0,5 ? 45,6 ? 0,000 78 ?

2°) Les touches "remise à zéro" et "virgule" sont interdites seulement en cours de calcul. Tu peux donc les utiliser pour entrer le premier nombre.

En respectant cette consigne et en utilisant le moins possible d'opérateurs :

a) entre le nombre 2,7 et obtiens le nombre 2,8 ;

b) le premier nombre étant toujours 2,7, passe au nombre 2,07. Recommence à partir de 2,7 pour obtenir 2. Recommence de nouveau pour obtenir tour à tour 3 ; 3,7 ; 27 ; 270 et 0,27 ;

c) de la même manière, à partir du nombre 2,756, passe tour à tour aux nombres 2,8 ; 2,766 ; 2,755 ; 3 ; 3,756 ; 2 756 ; 2,456 et 2,056.

Deuxième partie

Ici, tu ne peux que multiplier par 10 (x 10) ou diviser par 10 (÷10) .

Voici comment on passe de 3,654 à 3654.
(On n'est pas obligé d'utiliser toutes les cases)

3,654 $\xrightarrow{\times 10}$ 36,54 $\xrightarrow{\times 10}$ 365,4 $\xrightarrow{\times 10}$ ~~ ~~ $\xrightarrow{~~ ~~}$ 3654

Complète de la même manière les huit séries de calcul ci-dessous.

3,6				360
98,5				0,985
75				0,075
0,024				240
45,7				4,57
4560				4,56
0,64				6400
5,70				0,0057

Troisième partie

Ici, seule la touche "virgule" de la calculatrice est interdite. Pour chacune des questions suivantes, entre le nombre 50 et obtiens :

1°) le nombre 54,3 en utilisant obligatoirement au moins une **addition** (présente tes calculs comme dans la deuxième partie) ;

2°) le nombre 3,82 en utilisant obligatoirement au moins une **soustraction** ;

3°) le nombre 54,3 en utilisant obligatoirement au moins une **soustraction** ;

4°) le nombre 3,82 en utilisant obligatoirement au moins une **addition**.

La multiplication des décimaux

Produits de puissances de 10 (page 1)

1°) Voici une table de multiplication écrite deux fois, l'une avec des chiffres et l'autre avec des mots :

100	10	1	×
1000	100	10	10
100	10	1	1

centaine	dizaine	unité	×
millier	centaine	dizaine	dizaine
centaine	dizaine	unité	unité

Complète les tables suivantes, l'une avec des chiffres, l'autre avec les mots.
Les noms à utiliser sont dans la liste suivante : unité ; dizaine ; centaine ; millier ; dizaine de mille ; centaine de mille ; million ; dizaine de millions ; centaine de millions ; milliard.

1000	100	10	1	×
		10000		1000
100000				100
		100		10
				1

millier	centaine	dizaine	unité	×
		dizaine de mille		millier
centaine de mille				centaine
		centaine		dizaine
				unité

2°) a) Le dessin rappelle que : $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$,

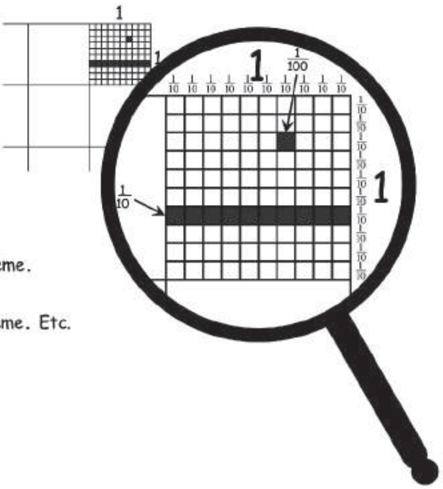
ce qui peut s'écrire aussi : $0,1 \times 0,1 = 0,01$.
La première égalité est écrite avec des fractions ;
la deuxième égalité est écrite avec des virgules.

On peut aussi écrire :

$0,1 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$ ou $\frac{1}{10} \times 0,1 = 0,01$.

Ce qui se lit :
un dixième multiplié par un dixième est égal à un centième.

On peut encore écrire : $0,1 : 10 = 0,01$
qui se lit : un dixième divisé par dix est égal à un centième. Etc.



Produits de puissances de 10 (page 2)

b) Complète les égalités suivantes en écrivant une fraction dans la première colonne, une écriture décimale dans la seconde colonne et écris le nom du nombre dans la troisième colonne.

(Exemple) $10 \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10}$	$10 \times \frac{1}{100} = 0{,}1$	un dixième
$\frac{1}{10} \times \frac{1}{100} =$	$\frac{1}{10} \times \frac{1}{100} =$	
$10 \times \frac{1}{1\,000} =$	$10 \times \frac{1}{1\,000} =$	
$100 \times \frac{1}{10\,000} =$	$100 \times \frac{1}{10\,000} =$	
$0{,}1 \times 0{,}01 =$	$0{,}1 \times 0{,}01 =$	

c) Complète les tables de multiplication ci-dessous,

1°) avec des fractions

1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$	×
		$\frac{1}{10}$		10
			$\frac{1}{1\,000}$	1
	$\frac{1}{100}$			$\frac{1}{10}$
		$\frac{1}{10\,000}$		$\frac{1}{100}$

2°) avec des écritures décimales

1	0,1	0,01	0,001	×
		0,1		10
			0,001	1
	0,01			0,1
		0,000 1		0,01

3°) avec des mots pris dans la liste suivante : unité ; dizaine ; centaine ; millier ; dixième ; centième ; millième ; dix-millième ; cent-millième ; millionième ; dix-millionième.

unité	dixième	centième	millième	×
		dixième		dizaine
			millième	unité
	centième			dixième
		dix-millième		centième

Certains mots de la liste ne sont pas utilisés dans la table précédente.
Ecris ces mots l'un en dessous de l'autre ; pour chacun, écris au moins un produit qui permet de l'obtenir.

nom du nombre	égalité

Produits de puissances de 10 (page 3)

3°) a) Remplis la table de multiplication, en utilisant des écritures décimales.

1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001	×
	1						
			1				
1							
						1	
				1			
		1					
					1		

b) Remplis les tables de multiplication, en prenant la première comme modèle.

$\frac{2}{100}$	0,04	×
$\frac{6}{1\,000}$ 0,006	$\frac{12}{1\,000}$ 0,012	$\frac{3}{10}$
$\frac{100}{100}$ 1	$\frac{200}{100}$ 2	50

$\frac{5}{100}$	80	×
		$\frac{3}{100}$
		7

$\frac{3}{10}$	0,006	×
		$\frac{3}{10}$
		90

$\frac{3}{1\,000}$	0,05	×
		$\frac{7}{10}$
		800

La multiplication des décimaux

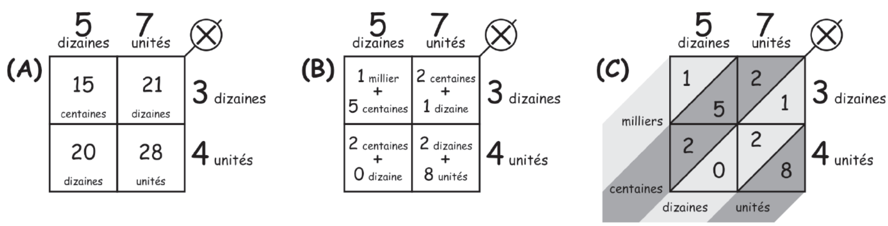
Produits de nombres entiers

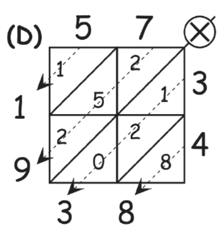
Une méthode pour calculer un produit de nombres entiers (per gelosia)

a) Exemple : pour calculer le produit **57** x **34**, par la méthode initiale et en détaillant le calcul, on écrit :

	Les quatre produits résultent des égalités :		
57			
x 34			
28	28 unités	=	7 unités x 4 unités
20	20 dizaines	=	5 dizaines x 4 unités
21	21 dizaines	=	7 unités x 3 dizaines
15	15 centaines	=	5 dizaines x 3 dizaines
1938			

b) Dans la nouvelle méthode, on dispose ces produits partiels dans un tableau, d'abord avec les noms **(A)** ; ensuite convertit (B), on aligne les chiffres en diagonale (C) pour faire facilement l'addition finale (D).

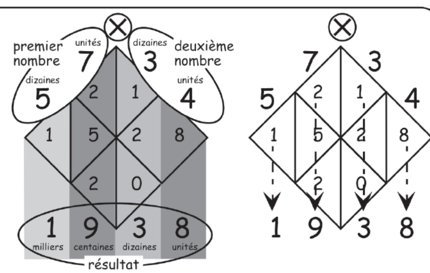




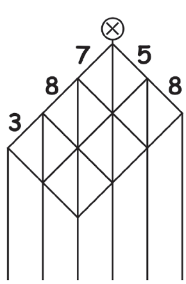
Il est commode de tourner le tableau pour aligner les chiffres dans des colonnes.

Le résultat se lit :

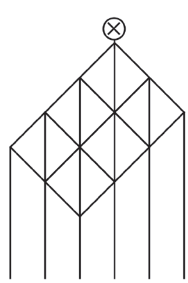
57 x 34 = 1938



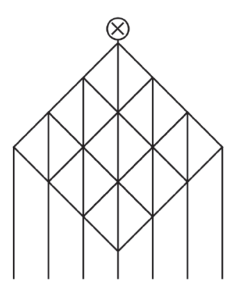
c) En utilisant la même disposition, calcule les produits suivants sans oublier les retenues.



387 x 58 =



69 x 624 =



Ici, choisis les nombres.

La multiplication des décimaux

Produits de nombres décimaux

a) Pour calculer par exemple le produit :

5,7 x 3,4

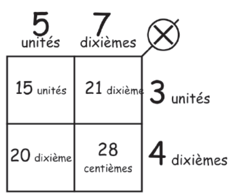
c'est-à-dire : **(5 unités + 7 dixièmes) multiplié par (3 unités + 4 dixièmes)**, on peut toujours utliser la méthode initiale en détaillant les calculs avec les quatre produits partiels, comme ci-contre.

```
    5,7
  x 3,4
  ------
     2 8
    2 0
    2 1
  1 5
  ------
  1 9 3 8
```

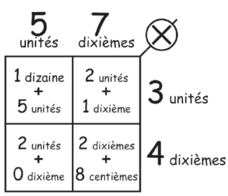
28 centièmes = 7 dixièmes x 4 dixièmes
20 dixièmes = 5 unités x 4 dixièmes
21 dixièmes = 7 dixièmes x 3 unités
15 unités = 5 unités x 3 unités

b) Comme dans la fiche précédente, on dispose les produits partiels dans un tableau en indiquant les noms **(A)**, en convertissant **(B)** et en alignant les chiffres **(C)**.

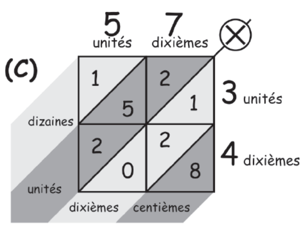
(A)



(B)

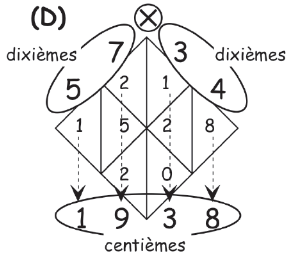


(C)

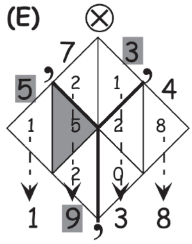


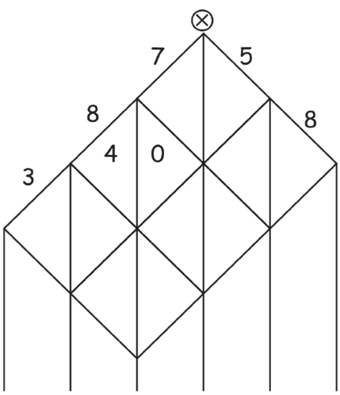
On tourne le tableau pour aligner les chiffres dans des colonnes. On peut alors envisager deux possibilités :
- On choisit les sous-unités pour lesquelles les facteurs sont des nombres entiers (ici, les dixièmes pour les deux facteurs) **(D)**. On cherche à quelle sous-unité correspond le produit (ici, le centième). Il suffit alors de convertir le nombre obtenu en unités et de mettre la virgule à sa place pour avoir le produit attendu.
- On met les virgules à leur place dans chacun des facteurs **(E)**. Le produit des chiffres des unités (ici, 3 unités x 5 unités) permet de repérer la colonne des unités du produit et de placer la virgule. On lit alors le résultat.

(D)



(E)





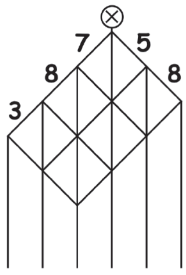
Utilise la grille ci-contre pour calculer le produit ci-dessous

38,7 x 5,8 =

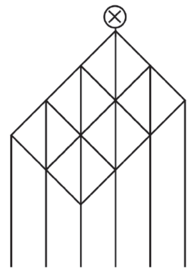
La multiplication des décimaux

Exercices

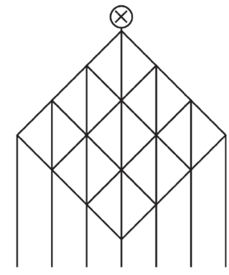
1°) Calcule les produits suivants sans oublier les retenues.



387 x 58 =

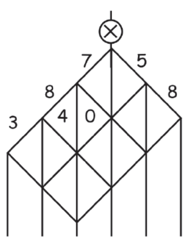


69 x 624 =

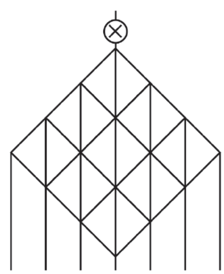


Ici, choisis les nombres.

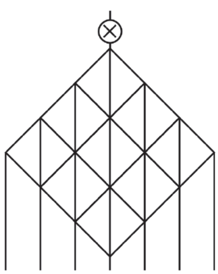
2°) Utilise les grilles ci-dessous pour calculer les produits indiqués.



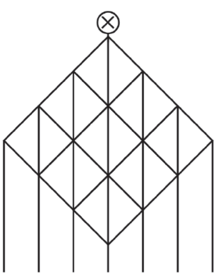
38,7 x 5,8 =



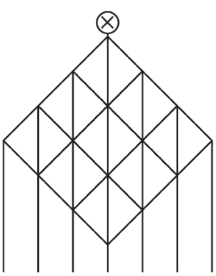
4,25 x 67,3 =



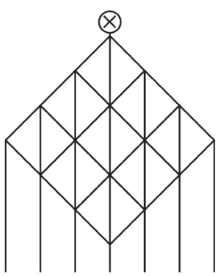
2,07 x 5,12 =



3,29 x 46,5 =



0,125 x 3,87 =



936 x 3,87 =