Somme de deux racines carrées

Un thème à dérouler sur plusieurs niveaux

Richard Choulet(*)

Le point de départ de cette étude est un exercice d'un livre de Seconde : il figure dans « Le nouveau Pythagore » aux éditions Hatier de mai 2000 sous le numéro 196 page 33.

J'ai essayé de voir comment il pourrait être décliné sur les deux autres niveaux du lycée (et même au-delà) en vue d'amener ou de sensibiliser à telle notion du programme. Le support théorique à cette étude pour nos classes est paru dans le Bulletin, numéro 469, p. 233-238

En Seconde

Voici l'exercice tel qu'il est proposé dans le livre cité :

On pose $x = 1+\sqrt{2}$.

1. Calculer x^n pour $n \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$. Mettre les résultats sous la forme $a+b\sqrt{2}$. Compléter le tableau :

n	0	1	2	3	4
a					
b					

2. Montrer que, pour chacune des valeurs précédentes de n, x^n s'écrit en fait sous la forme $\sqrt{\mathrm{N}}+\sqrt{\mathrm{N}+1}$.

3. a) Développer $\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$ et mettre le résultat sous la forme $\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{2}$.

   b) Donnez A et B en fonction de a et b.

4. En déduire x^n pour $n \in \{5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$. Compléter le tableau :

n	5	6	7	8	9
a					
b					

Mettre, chaque fois, le résultat sous la forme $\sqrt{\mathrm{N}}+\sqrt{\mathrm{N}+1}$.

J'ai proposé cet exercice en devoir à la maison dès le début de l'année de seconde en modifiant la présentation pour rendre plus clair ce qui était attendu, en précisant qu'on ne demandait pas de calculs approchés et en détaillant le fait $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ qui

(*) Lycée Augustin Fresnel CAEN. richardchoulet@wanadoo.fr

permet de conclure.

Le programme de seconde évoque la notion de racine carrée à propos du tableur et de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Les documents d'accompagnement parlent de revoir les « pièges classiques que constituent la somme de deux racines ou encore $\sqrt{a^2+b^2}$ ».

Les calculs sont menés à bien jusqu'au bout mais pas toujours assortis d'un minimum de rédaction. N'oublions pas que c'est le début de l'année et déjà, si les copies sont proprement présentées avec des tableaux et des calculs clairs, ce n'est pas si mal ! Cependant, même s'il s'agit de calculs présentés en tableau, une simple phrase introductive comme « J'effectue les calculs demandés en dressant le tableau suivant : » ne me paraît pas exagérée ; de même après avoir dressé le tableau final, conclure avec quelque chose comme « Chacune des puissances considérées s'écrit bien comme la somme des racines carrées de deux entiers consécutifs » me semble faire une bonne synthèse de l'exercice.

En Première

En Première S, voici quelques suggestions d'activités reprenant le thème avec l'introduction des suites. Tout d'abord en prérequis, on suppose connu $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; on l'a fait démontrer, par exemple, dans un exercice antérieur. Il convient évidemment d'adapter si les calculs sont faits dans une autre extension de $\mathbb{Q}$. Par ailleurs, on suppose les suites connues des élèves.

Première S - Suggestion d'activités.

L'objectif de cet exercice est de démontrer que toute puissance entière de $1+\sqrt{2}$ *est la somme des racines carrées de deux entiers consécutifs.*

1. Vérifiez ce résultat lorsque l'exposant est 0, 1 ou 2.

2. On admet que pour n entier quelconque, $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ se met sous la forme $a_n+b_n\sqrt{2}$ où a_n et b_n sont des nombres entiers ; vérifiez ce résultat pour n de $\{0 ; 1 ; 2\}$ en donnant, à chaque fois, les entiers a_n et b_n. On revient au résultat général affirmé ; démontrez qu'une telle écriture est unique.

3. Pour tout entier n, exprimez a_{n+1} et b_{n+1} à l'aide de a_n et b_n. On pose $u_n = a_n^2 - 2b_n^2$; à l'aide d'un tableur, présentez les calculs des dix premières valeurs de a_n, b_n et u_n. Quel résultat semble alors clair ?

4. Démontrez que la suite (u_n) est géométrique de raison -1 et concluez quant à l'objectif posé au départ.

5. Comment adapter ce qui précède si l'on s'intéresse à $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ avec n entier négatif ? Démontrez votre conjecture.

Indication : pensez à la définition de l'exposant négatif.

Je pense qu'au moment de la correction, on se doit d'évoquer la similitude des calculs numériques avec le calcul vectoriel dans une base d'un plan, en comparant $\left(1\ ;\sqrt{2}\right)$ à $\left(\vec{u}\ ;\vec{v}\right)$, les entiers a_n et b_n jouant le rôle de coordonnées.

En Terminale S

En terminale cette suggestion d'activité répond à plusieurs objectifs :

* refaire un peu d'arithmétique à propos de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ ou tout autre $\sqrt{d}$ (avec d sans facteur carré) suivant le type d'énoncé,
* préparer les calculs sur les complexes ; sensibiliser les élèves à $\mathbb{C}$ en montrant le parallèle que nous décririons, nous, avec : $\left(\sqrt{2}\ ;\mathbb{Q}\ ;\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)\right)$ et $\left(\mathrm{i}\ ;\mathbb{R}\ ;\mathbb{C}\right)$.
* utiliser un tableur,
* et ultérieurement, entraîner les élèves à une épreuve expérimentale **au bac** selon une idée de Marc Roux que je remercie.

Terminale S - Suggestion d'activité.

L'objectif de ce travail est d'établir que pour tout entier n :

$$\left(2+\sqrt{2}\right)^n=\sqrt{\mathrm{M}_n}+\sqrt{\mathrm{M}_n+u_n}$$

avec des entiers M_n, u_n, *la suite* $\left(u_n\right)$ *étant géométrique.*

Prérequis : On rappelle que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

1. Calculez $\left(2+\sqrt{2}\right)^n$ pour l'exposant n de zéro à 2.

2. Démontrez que pour tout entier n, $\left(2+\sqrt{2}\right)^n$ admet une décomposition unique sous la forme $a_n+b_n\sqrt{2}$. Donnez a_0 et b_0. Exprimez a_{n+1} et b_{n+1} à l'aide de a_n et b_n.

3. On pose $u_n=a_n^2-2b_n^2$; à l'aide d'un tableur, présentez les calculs des dix premières valeurs de a_n, b_n et u_n. Quelle conjecture est-il raisonnable d'envisager ?

4. Démontrez que la suite $\left(u_n\right)$ est géométrique ; précisez sa raison et son premier terme. Donnez l'expression du terme général u_n et reformulez le résultat obtenu comme le suggère l'objectif.

Dans la question 4. on trouve que $u_n=2^n$ et ainsi $\left(2+\sqrt{2}\right)^n$ se met-il sous la forme $\sqrt{\mathrm{M}_n}+\sqrt{\mathrm{M}_n+2^n}$. Rappelons qu'avec les notations proposées on a en fait :

$$a_n = \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^n + \left(2-\sqrt{2}\right)^n}{2},\ b_n = \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^n - \left(2-\sqrt{2}\right)^n}{2}.$$

Et voici pour l'épreuve de «mathématiques expérimentales » :

Conjecture sur la nature d'une suite

x et y sont deux entiers strictement positifs quelconques et y est sans facteur carré.

1. Exprimez, en fonction de x et y : $\left(x+\sqrt{y}\right)^2$ et $\left(x+\sqrt{y}\right)^3$.

2. Montrez que, quel que soit n entier positif, $\left(x+\sqrt{y}\right)^n$ peut se mettre sous la forme $a_n + b_n\sqrt{y}$, a_n et b_n étant des entiers positifs, et que cette décomposition est unique. Donnez les valeurs de a_0 et b_0 ; exprimez a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. Pour tout n entier positif, on pose $u_n = a_n^2 - yb_n^2$. On se propose d'étudier la suite (u_n). À cet effet, dans un tableur, construisez une feuille de calcul de façon que l'on puisse changer à volonté les valeurs de x et y, et que, dans quatre colonnes différentes apparaissent les valeurs de n, a_n, b_n et u_n.
4. Donnez à x et y des valeurs simples, 1 et 3 par exemple. Observez les termes de la suite (u_n) ; émettez une conjecture quant à sa nature. Recommencez pour d'autres valeurs de x et y.
5. Démontrez la conjecture émise en 3.

Conclusion

Je crois qu'avec cette « Somme de deux racines carrées », on tient un thème assez riche qui peut être décliné sur les trois niveaux du lycée et même au-delà (c'est à adapter suivant la parité de l'exposant, mais on a quelque chose de voisin avec les puissances de $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ par exemple) ; on y retrouve l'idée de bases des espaces vectoriels, d'algorithme, de suites récurrentes (de degré d'extension de $\mathbb{Q}$), le tout baignant dans un délicieux nappage d'irrationalité.