Des chameaux sans conflits ni confits

(des bosses de chameaux à celles des maths ?)

Henri Bareil(*)

I. COMMENT PARTAGER ?

Il s'agit, selon certaines contraintes, de partager des troupeaux de chameaux, en considérant les chameaux équivalents et en évitant, si possible, de les couper en morceaux.
Problème 1 : Un riche chamelier lègue, à sa mort, le total de ses 31 chameaux à ses trois fils, la moitié à l'aîné, un quart au second, un neuvième au troisième. Combien chacun reçoit-il de chameaux ?
Problème 2 : Cette fois il y a 65 chameaux et le défunt partage tout son troupeau en donnant la moitié à l'aîné, un tiers au second et un quart au troisième. Combien chacun reçoit-il de chameaux ?

II. LE « PROBLÈME SOURCE »

Partage d'un troupeau de 17 chameaux en léguant une moitié à l'aîné, un tiers au second et un neuvième au troisième. *On connaît l'astuce-solution* : emprunter un chameau au voisin Ibrahim, partager le troupeau ainsi porté à 18 chameaux, et ô miracle, donner à chacun « sa part » tout en pouvant restituer ensuite son chameau à Ibrahim…

DES DÉFUNTS PAS FORTS EN CALCUL

Partons du PROBLÈME-SOURCE :

Comme $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$, tout le troupeau n'est pas utilisé avec les trois dons. Seuls les 17 /18 le sont.
Il est donc impossible d'obéir à toutes les clauses, contradictoires, du testament.
Que peut faire le légataire ?

Le mieux semble être de partager la totalité du troupeau proportionnellement à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$.

Avec le coefficient de proportionnalité n, les parts sont alors $n\times\frac{1}{2}$ etc. donc $\frac{n}{2}$,

(*) Institut du Lauragais.

$\frac{n}{3}$, $\frac{n}{9}$.

Et, si p est le nombre total de chameaux, $\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{9}=p$ soit $n=\frac{18p}{17}$.

Ici $p = 17$ d'où $n = 18$.

Donc, sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir Ibrahim, voici les trois parts : $\frac{18}{2}$, $\frac{18}{3}$, $\frac{18}{9}$, soit 9, …

Remarque 1 : Faire intervenir Ibrahim fait joliment magique. Nous le garderons (pour passer de p à n) !

Remarque 2 : Tout cela va très bien si et seulement si p est multiple de 17 (sinon il faudra prévoir un pot au feu ou du confit avec des morceaux de chameaux…).

Avec $p = 17k$ (k entier naturel, $n = 18k$ et nous emprunterons k chameaux à Ibrahim…

III. RETOUR AUX DEUX PROBLÈMES INITIAUX

Problème 1.

C'est le même type de problème que le problème-source. En effet $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{31}{36}$.

Comme $\frac{31}{36}<1$, le troupeau n'est pas tout entier partagé. Le légataire privilégiant toujours la proportionnalité pour obtenir un partage total, nous avons, selon la même méthode que ci-dessus $\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{9}=p$ d'où $n=\frac{36p}{31}$.

Comme $p = 31$, $n = 36$, d'où les parts et, si l'on veut une solution magique, l'emprunt de (36 − 31) chameaux à Ibrahim, soit 5.

Remarque, d'ordre psychologique, pour les deux problèmes traités : les fils ne se plaignent pas :

Par exemple, dans le problème source, l'aîné aurait pu espérer 17/2 chameaux, soit 8 chameaux et la moitié d'un autre pour son pot au feu. Or il reçoit 9 chameaux !

Idem pour les autres fils !

Ibrahim, viens qu'on t'embrasse, tu es super ! Tu ne perds rien et, nous, nous avons davantage !!

Ô miracle !

(C'est oublier que, alors que le défunt en croyant léguer tout son troupeau n'en léguait que les 17/18, « l'intervention d'Ibrahim » permet seulement de faire jouer le partage sur les 17/18 du nouveau troupeau de 18 chameaux, ce qui fait distribuer le troupeau entier du défunt tout en sauvegardant le chameau d'Ibrahim)

Problème 2.

Cette fois $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$.

Comme $\frac{13}{12}>1$, il faudrait distribuer plus que le troupeau. Par exemple, quand les deux premiers fils auront été servis, le troisième ne pourra pas recevoir sa part.
Le légataire choisit à nouveau de donner des parts PROPORTIONNELLES aux choix du défunt … et de distribuer ainsi le troupeau entier, mais pas plus !

De là, avec la méthode précédente : $\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{4}=p$ d'où $n=\frac{12p}{13}$.
Ici, $p = 65$ (heureusement multiple de 13 !)

Donc $n = 60$ et les parts sont de $\frac{60}{2}$, $\frac{60}{3}$, $\frac{60}{4}$ chameaux (soit 30, 20 et 15 chameaux).
ET IBRAHIM ?
Il peut encore servir pour un « partage magique » :
Camouflons chez lui le troupeau de 65 chameaux alors que les trois fils arrivent pour prendre leurs parts.
Ibrahim va m'amener le troupeau en gardant 5 chameaux ($p - n$!) et je vais commencer le partage.

Je donne $\frac{60}{2}$ chameaux à l'aîné, et $\frac{60}{2}$ chameaux au second fils (soit 30 et 20 chameaux). Il me reste 10 chameaux. Pauvre troisième fils ! Mais Ibrahim me fait « don » des cinq chameaux qu'il avait gardés (merci Ibrahim !) et voilà 15 chameaux pour le troisième fils … (soit $\frac{60}{4}$).
Remarque, d'ordre psychologique :
Si les fils ignorent la consistance du troupeau légué, ils sont éblouis par la générosité d'Ibrahim !
Sinon, en se fiant aux fractions du troupeau qu'ils devaient recevoir et en oubliant l'impossibilité d'un tel partage, les trois fils, Ibrahim ou pas, ont l'impression d'être floués. L'aîné, se voyait attribuer $\frac{65}{2}$ chameaux soit 32 chameaux et la moitié d'un autre pour son pot au feu, et il n'a que 30 chameaux, sans pot au feu ! Idem pour les deux autres ! Le légataire risque d'être écharpé (alors qu'il devait, le malheureux, distribuer plus qu'il n'avait !!) Mieux aurait valu pour lui qu'il servit par exemple les deux fils les moins bien lotis, avec $\frac{65}{3}$ et $\frac{65}{4}$ chameaux (soit 21,7 et 16,25). Il lui restait 27,05 chameaux qu'il aurait donnés à l'aîné, lequel aurait été évidemment furieux, mais le légataire était soutenu à deux contre un !

IV. ENTRAÎNONS-NOUS (tantôt félicités, tantôt écharpés) à présenter les problèmes avec une « solution – Ibrahim » magique

Problème 3.

Partage d'un troupeau de 38 chameaux en donnant aux trois fils respectivement la moitié, le quart, le cinquième grâce à un emprunt à Ibrahim.
(Réponse : emprunter deux chameaux)

Problème 4.

Partage d'un troupeau de 46 chameaux en donnant aux trois fils respectivement la moitié, le quart, les deux cinquièmes grâce à un lot provisoirement confié à Ibrahim et récupéré pour le dernier fils servi.
(Réponse : mettre d'abord à l'écart six chameaux)

Remarque

Le nombre de fils n'est pas nécessairement trois. Et les fractions de troupeaux correspondantes n'ont pas nécessairement 1 comme numérateur. J'en donne des exemples au § VI.

V. POUR LES GRANDS DES LYCÉES

A. Reprenons le problème-source avec un légataire scrupuleux qui fonce tête baissée et donne aux trois fils respectivement les $\frac{17}{2}$, $\frac{17}{3}$, $\frac{17}{9}$ du troupeau.

Il lui reste les $\frac{17}{18}$ d'un chameau non distribués.
Il décide de les répartir, toujours selon les mêmes normes (la moitié à l'aîné…).

L'aîné aura alors $\frac{17}{2}+\frac{17}{18\times 2}$, etc..

Et il restera les $\frac{17}{18\times 18}$ d'un chameau.
Bis repetita…
L'aîné aura ainsi, en allant jusqu'à la plus infime bouchée de chameau,

$$\frac{17}{2}\left(1+\frac{1}{18}+\frac{1}{18^2}+\ldots+\frac{1}{18^n}+\ldots\right)$$

de chameau. En exagérant un peu « l'infinitude » on dispose, entre parenthèses, d'une suite géométrique infinie, de raison 1/18, que l'on sait sommer. L'aîné obtient ainsi $\frac{17}{2}\times\frac{18}{17}$ de chameau, soit 9 chameaux.
Remarque :
Nous trouvons apparemment le même résultat que par la méthode initiale, avec ou sans Ibrahim.

Mais, sur le plan concret, sans sommer préalablement les suites géométriques, il y aurait une belle dissemblance : 8 chameaux entiers et la bouillie d'un autre dans un cas, 9 chameaux entiers avec la méthode initiale !
Dès que l'on veut des applications concrètes des mathématiques, voilà que les méthodes choisies ne donnent pas nécessairement le même résultat ! Et ce n'est pas la méthode la plus formaliste qui fournit nécessairement le meilleur !

B. ET POUR LE PROBLÈME 2 ?

On peut envisager la même méthode, mais avec des attributions virtuelles (puisqu'on doit d'abord envisager de donner plus qu'on n'a) : $p/2$; $p/3$; $p/4$ (ce qui, au total, dépasse p, nous l'avons vu, de $p/12$). Il faudra demander aux trois fils des restitutions, toujours virtuelles, respectivement de $\frac{p}{2\times 12}$, $\frac{p}{3\times 12}$, $\frac{p}{4\times 12}$, avec un surcroît restitué de $\frac{p}{12\times 12}$.
Surcroît que l'on redistribuera, si bien que, par répétition de la double démarche (trop donner puis trop récupérer), l'aîné recevra finalement

$$\frac{p}{2}\left(1-\frac{1}{12}+\frac{1}{12^2}-\frac{1}{12^3}+\frac{1}{12^4}-\ldots\right).$$

Il y a, dans les parenthèses, une suite géométrique, en théorie infinie, de raison $-1/12$.
Dès la Première S on sait sa somme : 12/13 L'aîné reçoit ainsi $\frac{p}{2}\times\frac{12}{13}$ et donc 30 lorsque $p = 65$.
Mais, au long des étapes, quelle bouillie de morceaux de chameaux !
Même remarque que ci-dessus !

Revenons donc aux méthodes initiales …

Remarque
Avant la Première on peut apprendre à sommer les suites géométriques ci-dessus. En effet, dès lors que la somme existe (dans le cas contraire la méthode utilisée peut permettre de « démontrer » des absurdités), soit S la somme de la suite géométrique apparue :

– ci-dessus dans le problème-source. Alors, en mettant 1/18 en facteur après le 1, $S=1+\frac{1}{18}S$ puis S = 18/17 ;
– dans le problème 2. Alors $S=1-\frac{1}{12}S$, d'où … S = 12/13.

VI. RELATIONS ENTRE *n*, *p* et les fractions induisant les parts

(en n'utilisant surtout pas la méthode du V !)

En désignant par $\frac{x_i}{y_i}$ les fractions qui décident des parts, celles-ci leur étant proportionnelles avec un coefficient n, nous avons, quel que soit le nombre d'héritiers :

$$n \times \left(\sum_i \frac{x_i}{y_i} \right) = p.$$

Soit s cette somme : $ns = p$.

Apparemment le détail des $\frac{x_i}{y_i}$ n'intervient pas. Encore faut-il que les $n \times \frac{x_i}{y_i}$ donnent des nombres entiers, ce qui, lorsque les $\frac{x_i}{y_i}$ sont irréductibles, oblige à des y_i diviseurs de n.

De là le type de problèmes traité ici, avec ses deux modalités :

On veut partager un entier p en diverses parts entières définies par des fractions $\frac{x_i}{y_i}$ de p :

– si la somme s des $\frac{x_i}{y_i}$ est égale à 1, la solution est immédiate, quel que soit p ;

– sinon :
  – (modalité 1), $s < 1$ et l'application des fractions ne partage pas entièrement p ;
  ou
  – (modalité 2), $s > 1$ et l'application des fractions excède p.

Dans ces deux modalités, on choisit de modifier les règles de partage en décidant de partager p proportionnellement aux fractions proposées, ce qui revient à les appliquer au nombre n de la formule ci-dessus ($ns = p$) et le total des parts sera bien p.
C'est transparent, sans magie.

On peut, en veillant à avoir des résultats entiers, choisir deux des trois nombres n, p, s en les gardant liés par la formule $ns = p$ qui permet alors de proposer le troisième.

Si, pour épater un peu, on ne veut pas expliquer mathématiquement le partage mais faire intervenir la magie Ibrahim, les nombres n et p fixeront l'intervention magique : apport de $n - p$ dans la modalité 1, mise en réserve de $p - n$ dans la modalité 2 (soit un « apport » négatif).

De là les divers énoncés que l'on peut fabriquer.

A. *Exemple 1*

Soit, par exemple, $p = 40$.
Et proposons $s = 13/15$, par exemple en essayant, pour deux héritiers, de donner les 2/3 à l'un et un cinquième à l'autre.

Alors, le n sauveur est donné par $n\times\frac{13}{15}=40$ soit $n\times 13=40\times 15$.

Et voilà que n n'est pas entier !
Notre méthode initiale nous donne, elle aussi, des morceaux de chameau !
Ibrahim sera aux abonnés absents …

Soyons donc plus prudents pour les choix corrélés de s et p.
Cette fraction s écrite sous la forme irréductible a/b, nous devons avoir $a/b = p/n$, ce qui exige que p et n soient des équimultiples de a et b.
Cela ne peut être le cas dans l'exemple ci-dessus où 40 n'est pas multiple de 13.
Nous n'avons donc pas de méthode miracle couvrant tous les partages envisageables ! (Voir aussi la Remarque 2 du § II et le « 65 heureusement multiple de 13 » du § III).
À chacun d'imaginer comment modifier les règles de partage pour garder le plus possible les chameaux entiers en enfreignant le moins possible les lois initiales…
Reprenons avec p multiple de 13, par exemple $p = 39$, auquel cas $n = 45$.
Si nous faisons intervenir Ibrahim, empruntons-lui donc 6 chameaux, et faisons le partage sur 45, ce qui donne deux parts de 30 et 9 chameaux.

Exemple 1 BIS

Donnons-nous s, par exemple $s=\frac{19}{18}$ (auquel cas, si notre démarche fonctionne, nous confierons provisoirement des chameaux à Ibrahim).
Choisissons aussi p.
Arbitrairement ?

Non, car $\frac{19}{18}=\frac{p}{n}$. Comme p et n sont entiers, ce sont des équimultiples de 19 et 18.
Par exemple, prenons $p = 19 \times 3$, soit $p = 57$. Alors $n = 18 \times 3 = 54$ (Ibrahim gardera en réserve trois chameaux).

S'il y a cinq héritiers, les parts sont proportionnelles à des $\frac{x_i}{y_i}$ dont la somme est $\frac{19}{18}$.

On pourra vérifier que cette somme pourrait être obtenue avec des fractions irréductibles de dénominateurs multiples de 18. Dans ce cas nous risquons d'avoir des morceaux de chameau. Pour l'éviter à coup sûr il suffit de prendre des dénominateurs diviseurs de 18. Je choisis ainsi quatre fractions dont la somme est inférieure à 19/18, par exemple $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{18}$. La cinquième est alors $\frac{1}{9}$, et les cinq parts sont les fractions correspondantes de 54 chameaux soit 6 ; 15 ; 24 ; 3 et 6 chameaux.

Remarque : s d'abord choisi, on pourrait comme ci-dessus choisir ensuite n puis p, mais cet ordre est moins logique

B. EXEMPLE 2

Donnons-nous arbitrairement deux entiers naturels $p = 43$ et $n = 52$
(auquel cas, nous sommes dans la modalité 1 et Ibrahim nous prêtera 9 chameaux !)

Alors $s = \dfrac{43}{52}$.

S'il y a quatre héritiers, nous pouvons choisir arbitrairement trois $\dfrac{x_i}{y_i}$ avec les y_i diviseurs de 52, par exemple $\dfrac{2}{13}, \dfrac{3}{26}, \dfrac{5}{52}$ de somme inférieure à s, et en déduire la quatrième fraction, $\dfrac{24}{52}$ (soit $\dfrac{6}{13}$).
Les parts des héritiers sont alors respectivement les fractions correspondantes de 52, soit 8, 6, 5 et 24 chameaux.

VII. POURQUOI PAS DES ARRONDIS ?

Dans les cas ci-avant évoqués où nous n'obtenons pas des parts en nombres entiers, pourquoi pas des arrondis ?
Par exemple, maintenons le partage, avec n et la relation $ns = p$, en convenant d'arrondir à l'entier le plus proche.

Exemple 1

Soient 45 chameaux à partager comme dans le « problème source ».

$s = \dfrac{17}{18}$ et $n = \dfrac{45 \times 18}{17}$, soit $n \approx 47{,}64.$.
D'où des parts de 23,82 ; 15,88 ; 5,29 chameaux.
Nous prendrons les arrondis : 24 ; 16 ; 5 (total : 45).
Remarque : Si nous faisons appel à Ibrahim, il faut arrondir dès n. En prenant 48, Ibrahim prête trois chameaux, et on obtient les mêmes résultats.

Exemple 2

Soit un troupeau de 17 chameaux à partager entre quatre fils selon les fractions $\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{20}$.
Ici $n = 20{,}4$. D'où des parts de 4,08 ; 6,8 ; 5,1 ; 1,02 arrondies à 4 ; 7 ; 5 ; 1 (Total : 17).
En faisant intervenir Ibrahim avec $n = 20$ on aurait les mêmes parts. Avec $n = 21$ aussi, d'ailleurs.

Exemple 3

Partage de 19 chameaux selon les mêmes fractions.
Ici n = 22,8. D'où des parts de 4,56 ; 7,6 ; 5,7 ; 1,14 chameaux, arrondies à 5 ; 8 ; 6 ; 1.
Mais le total est 20.
Insérons alors une nouvelle loi de partage, en convenant de minorer la part qui avait le plus bénéficié (en ajout « absolu », pas en augmentation relative) de l'arrondi. Il s'agit ici de la seconde, qui sera réduite à 7.
En prêtant 4 chameaux, pour utiliser n = 23, Ibrahim aurait conduit aux mêmes résultats. Mais pas avec un apport réduit à 3 chameaux.

REMARQUES
Cette partie VII peut provoquer une réflexion sur :
- l'intérêt des arrondis ;
- les éventuels dangers de leur cumul ;
- la nécessité de parfaire les modèles mathématiques lorsque surgissent des obstacles, parfois imprévus ;
- la construction progressive d'un outil mathématique capable de résoudre au mieux un problème dans une généralité accrue.

VIII. Les CHEMINS DES CHAMEAUX

Gentils chameaux ! Ne nous ont-ils pas fait emprunter, *certains* fréquentables par des élèves de tous âges dès la Cinquième, des chemins de fractions, de proportionnalité, de multiples et de diviseurs, … embellis, si l'on veut, par les tours de magie d'Ibrahim (que nous savons démystifier) ?
Sans doute nos élèves seront-ils ravis, pour épater proches ou copains pas au courant, de faire intervenir avec succès Ibrahim dans les partages qu'ils auront imaginés. Demandez-les-leur !

N.B. Il est vraisemblable que le « problème-source » date de plusieurs siècles. On le retrouve dans les manuels de « curiosités mathématiques » dès le 19e siècle. Si quelqu'un connaît des textes antérieurs…