À propos du signe « = »

Roger Cuppens

La lecture du mini-dossier sur l'égalité paru dans le Bulletin 468 me conduit à quelques remarques qui, bien sûr, ne remettent pas en cause le travail remarquable sur l'introduction du signe « = » à des jeunes élèves, mais me semblent utiles pour l'extension de ce symbole à d'autres objets mathématiques que les entiers naturels, pour comprendre son emploi en informatique et pour la formation des enseignants en mathématiques.

1. Statut du signe « = »

On peut s'étonner du titre de ce paragraphe (et d'une telle prétention), mais j'ai été tout autant étonné de lire sous la plume d'Henri Bareil la phrase suivante :

« À noter une difficulté de vocabulaire : pour d'aucuns, “ égalité vraie ” est une tautologie, un pléonasme, tandis que pour d'autres, dont Claudie Missenard, une égalité (alors phrase autour du signe =) peut être soit vraie, soit fausse. »

En effet, apparaissent dans l'enseignement des mathématiques des signes tels que « + », « = », etc. et ceci dans des contextes à la fois très semblables et fort différents. Par exemple, on définit l'addition de deux naturels, de deux fractions, de deux vecteurs, etc. On définit l'égalité de deux nombres, de deux ensembles, etc. Qu'ont en commun toutes ces définitions ?

Il semble que tout le monde soit d'accord pour dire que le signe « + » représente une addition et qu'une addition est une opération (et qu'il y a beaucoup d'autres opérations). Mais on peut constater que l'on n'a pas résolu le problème avec ce (gros) mot d'opération sauf si l'on ajoute qu'une opération (interne) sur un ensemble E est une application de l'ensemble produit E^2 dans l'ensemble E lui-même. On est donc capable de définir une opération et de donner le « statut » d'opération à l'addition.

Peut-on faire la même chose pour l'égalité[(1)] ? Pour ceci, il suffit d'introduire la notion de relation (binaire) sur un ensemble : une relation binaire sur un ensemble E est une application de l'ensemble produit E^2 dans un ensemble à deux éléments que l'on appelle en général « V » (pour Vrai) et « F » (pour Faux)[(2)]. Dans ce cas, il est naturel de dire que pour des éléments a et b d'un même ensemble E, « $a = b$ » est vrai ou faux et aussi de dire que les éléments a et b sont égaux (resp. différents) si et seulement si « $a = b$ » est vrai (resp. faux).

Dans la suite, je vais essayer de préciser dans quel cas deux objets d'un ensemble E sont égaux.

2. Égalité des naturels

On peut étudier l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels de deux manières différentes :

(*) IREM de Toulouse et laboratoire LEMME de l'Université Paul Sabatier, Toulouse.
(1) Ceci permet d'éclaircir les idées et est indispensable en informatique.
(2) En informatique, on utilisera souvent 1 et 0 au lieu de V et F.

a) intuitivement, ce qui se fait dans toutes les classes du primaire et du secondaire ;
b) à partir d'une définition « à la Peano ».

Dans les deux cas, la notion de successeur est essentielle. Comme en informatique, je noterai 1+(n) le successeur d'un entier n.

Dans l'ensemble ℕ, il est normal de dire que a et b sont égaux si et seulement si a et b sont un même élément de ℕ.

Dans ce cas, on peut remarquer que la véracité de la relation

$$1+(0) = 1$$

est une évidence dans une définition intuitive de ℕ alors qu'elle constitue une définition du symbole « 1 » dans une introduction à la Peano.

Tout semble dit, mais ce serait oublier que 0, 1, 2, …, 123 569, … sont des représentations conventionnelles de naturels, mais qu'il y en a d'autres possibles. Par exemple, le nombre 4 s'écrit IIII dans une notation « bâton » ou IV en chiffres romains(3). A-t-on le droit d'écrire :

$$4 = \mathrm{IIII} = \mathrm{IV}$$

(ou ♣♣♣ = ♥♥♥ = 3 avec de nouvelles notations, mais Serge Petit nous l'interdit formellement !). Va-t-on interdire à un scrutateur d'écrire :

 = 23

comme résultat d'un dépouillement(4) ?

Pour terminer ce paragraphe, j'ajouterai deux remarques :

1. Le système décimal n'est pas toujours le plus commode. Par exemple, lors de la confection du Bulletin, je manipule souvent un grand nombre de fichiers de même type qu'il est normal de numéroter : 1, 2, 3, …, 9. Mais si on appelle le suivant 10, la machine qui ne connaît que l'ordre lexicographique ne le rangera pas après le 9, mais entre le 1 et le 2. Comme dans l'ordre lexicographique les lettres viennent après les chiffres, il suffit d'utiliser une lettre, par exemple X et de continuer avec X, X1, …

2. Le fait qu'un nombre puisse avoir plusieurs représentations permet d'éviter le recours trop tôt aux relations d'équivalence (et à leurs représentants) chères aux tenants de mathématiques modernes. Par exemple, pour les nombres rationnels, pourquoi ne pas dire que deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ représentent un même nombre (et dans ce cas dire que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ est vrai) si et seulement si $a \times d = b \times c$…

(3) Sans parler des problèmes liés aux diverses bases de numération : 10 représente le successeur de 9 dans le système décimal, mais celui de 1 dans le système binaire et dans une base plus grande que 9, il faut inventer de nouveaux symboles. Voir aussi le système de numération de position (sans zéro !) de Charles Cros (cf. mon article dans le Bulletin 434).

(4) Je laisse au lecteur qui ne connaîtrait pas ce système de numération de comprendre les règles utilisées et l'intérêt de son emploi.

3. Égalité des expressions numériques

La définition précédente ne permet pas de déterminer si des relations comme $8 + 4 = 11$ ou $(2 \times 5) + (3 \times 3) = 8 + 11$ sont vraies ou fausses(5).

Pour ceci, il faut introduire ce que les informaticiens appellent l'*évaluation*. Pour définir la valeur d'une égalité $a = b$ du type précédent, on attribue aux expressions a et b des *valeurs* (numériques) $v(a)$ et $v(b)$ et on dit que $a = b$ est vrai si et seulement si $v(a) = v(b)$ est vrai au sens du paragraphe précédent.

La valeur $v(a)$ d'une expression numérique a sera définie en appliquant un certain nombre de fois des règles du type :

- si a est un nombre, alors $v(a) = a$,
- si a est une expression, alors $v((a)) = v(a)$,
- si a et b sont des expressions, alors $v(a + b) = v(a) + v(b)$,

etc.

Par exemple, on aura :

$$\begin{aligned} v((2 \times 5) + (3 \times 3)) &= v((2 \times 5)) + v((3 \times 3)) \\ &= v(2 \times 5) + v(3 \times 3) = (v(2 \times 5)) + (v(3 \times 3)) \\ &= (v(2) \times v(5)) + (v(3) \times v(3)) = (2 \times 5) + (3 \times 3) = 10 + 9 = 19. \end{aligned}$$

Remarque. Ceci peut s'étendre à d'autres expressions que les expressions numériques. Par exemple, pour l'égalité ♣♣♣ = ♥♥♥ citée plus haut, on a maintenant le choix entre :

- dire que les expressions ♣♣♣ et ♥♥♥ ne relèvent pas du domaine étudié,
- dire qu'elles ne sont pas égales car ♣ et ♥ sont différents,
- dire que l'on prend comme valeur le nombre de symboles utilisés,

etc.

4. Introduction des variables

Ce qui précède peut très bien se faire sans introduire les notions de « vrai » et « faux » en introduisant les deux symboles « = » et « ≠ » et en réservant l'écriture $a = b$ au seul cas où cette relation est vraie au sens précédent. Néanmoins, ceci devient très difficile lorsqu'on introduit des « variables » dans les expressions précédentes.

Par exemple, que signifie (et quelle valeur) ont des expressions telles que $x^2 = x + 1$ ou $x^3 = (x - 1)\,(x^2 + x + 1) + 1$?

Pour ce faire, on « affecte » aux variables une valeur numérique et on regarde si l'égalité numérique est vraie ou fausse. On emploie souvent le terme *équation* pour une telle situation, la phrase « résoudre (dans E) l'équation » signifiant « trouver toutes les valeurs des variables (dans E) telles que l'égalité obtenue soit vraie ». Il peut arriver que ceci ait lieu :

- pour aucune valeur des variables (cas de $x^2 = x + 1$ dans $\mathbb{N}$),
- pour une ou plusieurs valeurs des variables (par exemple, $x^2 + x = 2$ est vraie dans $\mathbb{N}$ seulement pour la valeur 1),

(5) Il me semble abusif de dire que « 8 + 4 » est une représentation du nombre 12.

– pour une infinité de valeurs des variables dans E (cas de $y = x^2 + 1$).

Un cas particulier de cette dernière situation est celui où l'égalité est vraie pour toutes les valeurs des variables. Dans ce cas on parle d'*identité* et on peut remarquer que à partir d'une identité, en affectant aux variables non seulement des nombres, mais aussi des expressions (contenant éventuellement des variables), on obtient une nouvelle identité.

5. Résolution des équations

On introduit la définition suivante : deux équations $a = b$ et $a' = b'$ sont *équivalentes* si elles ont même ensemble de solutions.

On a alors les propriétés suivantes :

P1. Si $a = a'$ et $b = b'$ sont deux identités, alors les équations $a = b$ et $a' = b'$ sont équivalentes.

P2. Si $c = c'$ est une identité, alors les équations $a = b$ et $a + c = b + c'$ sont équivalentes.

P3. Si $c = c'$ est une identité et si c ne s'annule pas, alors les équations $a = b$ et $a \times c = b \times c'$ sont équivalentes. En particulier si k est un nombre non nul, alors les équations $a = b$ et $k \times a = k \times b$ sont équivalentes.

Par exemple, la résolution de Claudie Missenard

$$2(x + 1)^2 - (2x^2 - 1) = 0 \qquad (1)$$
$$2x^2 + 4x + 2 - 2x^2 + 1 = 0 \qquad (2)$$
$$4x + 3 = 0 \qquad (3)$$
$$4x = -3 \qquad (4)$$
$$x = -3/4 \qquad (5)$$

est justifiée car P1 montre que les équations (1), (2) et (3) sont équivalentes, P2 montre que les équations (3) et (4) le sont et P3 donne l'équivalence de (4) et (5).

Remarques. 1. P2 permet de ramener l'étude des équations à celles de la forme $a = 0$.

2. Les trois propriétés précédentes permettent de résoudre de nombreuses équations, mais la règle P3 peut être insuffisante à cause de l'hypothèse de non nullité de c. On la complétera donc par la propriété :

P4. L'ensemble des solutions de l'équation $a \times b = 0$ est la réunion de l'ensemble des solutions de $a = 0$ et de l'ensemble des solutions de $b = 0$.

6. Conclusion

On voit que les propositions de Claudie Missenard me semblent les bonnes car elles permettent les développements ultérieurs. Mais des définitions précises sont nécessaires dès que l'on veut « faire faire » des mathématiques à une machine (ou simplement comprendre comment elle en fait).

Encore une fois, ayant fait toute ma carrière dans l'enseignement supérieur, je me garderai bien de dire comment il faut apprendre la notion d'égalité ou la résolution des équations à des élèves du primaire ou du secondaire, mais il me semble que ce qui précède doit faire partie du bagage de leurs professeurs.