Exercices de ci, de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Serge PARPAY

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer à :
APMEP (Groupe du Clain)
IREM, Faculté des Sciences,
40 avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS cedex
ou par Mél à : jeanfromentin@wanadoo.fr

Exercices

Exercice 470-1 (Corol'aire n° 41)

Démontrer que, pour tout ensemble $\{x, y, z\}$ de trois nombres réels quelconques, on a :

$$|x + y| + |y + z| + |z + x| \leq |x| + |y| + |z| + |x + y + z|.$$

À quel moment a-t-on l'égalité ?

Exercice 470-2 (Raymond Raynaud-Digne)

Étant donné un carré ABCD, quel est le lieu L du point M de son plan tel que les deux cercles ABM et CDM aient le même rayon ?

Exercice 470-3 (Miguel Amengual Covas-Espagne)

Soient un triangle équilatéral ABC, les points D et E situés respectivement sur les côtés [AC] et [AB] et tels que les segments [AE] et [CD] soient de même longueur. Soient M le milieu du côté BC et P l'intersection de BD et CE.

Montrer que les angles $\widehat{\mathrm{APE}}$ et $\widehat{\mathrm{BPM}}$ sont égaux.

Exercice 470-4 (Georges Lion-Wallis)

Soit C (de rayon R) et Γ deux cercles de centres O et Ω, orthogonaux en A et B. Une droite menée par O coupe [AB] en P et Γ en M et N respectivement intérieur et extérieur à C.
1) Exprimer la longueur OP en fonction de la longueur OM ; si [A′B′] est une corde non diamétrale de C, passant par P, que dire du cercle circonscrit au triangle A′MB′ ?
2) Exprimer le rapport PA/PB en fonction du rapport MA/MB.

Solutions :

Exercice 467-2 (Louis Rivoalan-Rochefort)

La suite de terme général (cos n)^n est -elle convergente ?
La réponse est non. Mais c'est loin d'être évident.
En effet, s'il est facile de montrer que 0 est une valeur d'adhérence, on peut aussi démontrer que 1 et −1 le sont aussi, ce qui montre que cette suite ne converge pas.
Une question qui reste en suspens : est-ce que tout nombre de l'intervalle [−1 ; 1] est une valeur d'adhérence pour cette suite ?

Solution de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)

Soit $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ la suite des réduites du développement en fractions continuées de $\frac{1}{2\pi}$.

On a donc $\left|\frac{1}{2\pi}-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}$, soit $\left|q_n-2\pi p_n\right|<\frac{2\pi}{q_n}$. Donc, pour n assez grand, $\cos q_n=\cos\left(q_n-2\pi p_n\right)>\cos\left(\frac{2\pi}{q_n}\right)$. On montre d'autre part (développement limité d'une fonction composée) que $\ln\left(\cos(x)\right)=-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ (x voisin de 0). D'où $\ln\left(\cos\left(\frac{2\pi}{q_n}\right)\right)=-\frac{2\pi^2}{q_n^2}+o\left(\frac{1}{q_n^2}\right)$ et par suite $q_n\ln\left(\cos\left(\frac{2\pi}{q_n}\right)\right)=-\frac{2\pi^2}{q_n}+o\left(\frac{1}{q_n}\right)$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n\ln\left(\cos\left(\frac{2\pi}{q_n}\right)\right)=0$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{q_n}\right)\right)^{q_n}=1$.

Comme $1>\left(\cos q_n\right)^{q_n}>\left(\cos\left(\frac{2\pi}{q_n}\right)\right)^{q_n}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos q_n\right)^{q_n}=1$. Cela prouve que 1 est valeur d'adhérence de la suite $\left(\cos q_n\right)^{q_n}$.

Solution de René Manzoni (Le Havre)

On pose $u_n=\left(\cos n\right)^n=\varepsilon\cdot\left|\cos n\right|^n=\varepsilon\cdot\exp\left(n\cdot\ln\left|\cos n\right|\right)$ avec ou bien $\varepsilon=+1$, ou bien $\varepsilon=-1$ lorsque cos $n<0$ et n impair.

On suppose connue la propriété qu'a l'ensemble des cos (n) d'être dense dans [−1 ; +1]. Soit a un élément fixé de l'intervalle]0 ; 1[aussi proche de +1 qu'on le souhaite, mais, bien entendu, strictement plus petit que +1.

On note E le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ constitué des entiers n tels que $|\cos n| \leq a$.

Pour tout $n \in$ E, on a

$$\ln|\cos n| \leq \ln a,$$

$$\lim_{n \to +\infty,\, n \in \mathrm{E}} n \cdot \ln|\cos n| = -\infty\,;$$

d'où

$$\lim_{n \to +\infty,\, n \in \mathrm{E}} u_n = 0.$$

C'est dire que 0 est la seule valeur d'adhérence de la suite (u_n) dans l'intervalle $[-a\,;+a]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N} - \mathrm{E}$, on a $|\cos n| > a$, $a^n < |\cos n|^n \leq 1$. En vertu de la densité des $\cos n$, cela montre qu'il existe des suites extraites de la suite (u_n) qui convergent, ou bien vers -1, ou bien vers $+1$. C'est dire que -1 et $+1$ sont des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) qui n'est donc pas convergente.

Exercice 468-2 (Jacques Bouteloup - Rouen)

On considère un cercle (C), un diamètre [AB], une corde [CD] parallèle à [AB], et un point M de la droite (AB) (et non du segment [AB]) ; (MC) et (MD) recoupent (C) en E et F ; la perpendiculaire en M à (AB) coupe (CD) et (EF) en H et K.

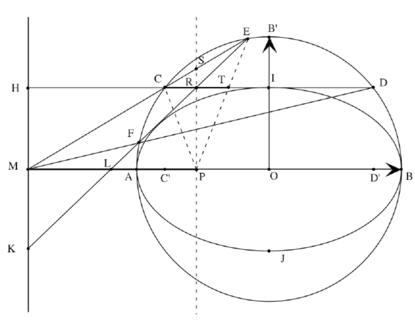
1) Démontrer que M est le milieu de [HK].
2) Démontrer que, lorsque M décrit la droite (AB), la droite (EF) enveloppe une ellipse que l'on précisera.

Solution de Christian Dufis (Limoges)

1) M *milieu de* [HK]

(EF) coupe (CD) et (AB) en R et L. La perpendiculaire à (AB) passant par R coupe (AB) et (MC) en P et S. Les droites (EP) et (CD) se coupent en T.

La droite (RP) est la polaire de M par rapport au cercle (C). Le faisceau P(MSCE) est donc harmonique. Il détermine alors deux segments de même longueur sur la droite (CD) parallèle au rayon (PM). R est donc le milieu de [CT]. Les droites (CD) et (AB) étant parallèles, dans l'homothétie de centre E qui transforme C en M, le milieu R de [CT] a pour image le milieu de [MP].



Le point L est donc le milieu de [MP]. Alors, par projection sur (KR) parallèlement à (MK), L est le milieu de [KR]. Enfin, par projection orthogonale sur (MH), M est le milieu de [HK].

2) *Enveloppe de la droite* (EF)

Soit O le milieu de [AB] et B′ le point du cercle (C) tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OB}'}\right)=\frac{\pi}{2}$. On prend le rayon de (C) comme unité de longueur et on rapporte le plan au repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OB}'}\right)$. En posant $\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)=\theta$, les coordonnées de D sont (cos θ, sin θ) et celles de C sont (–cos θ, sin θ). Dans ce qui suit on posera a = cos θ et b = sin θ. Soit t l'abscisse de M sur l'axe $\left(\mathrm{O},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$. Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OB}'}\right)$ on a donc : M (t , 0), D (a , b), C ($-a$, b).

D'après ce qui précède, la division (M, P, A, B) est harmonique. En utilisant la relation de Newton, on a $\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OM}}=1$. L'abscisse de P est donc $\frac{1}{t}$. Les coordonnées de R sont $\left(\frac{1}{t},b\right)$, celles de K sont $(t,-b)$. Le coefficient directeur de la droite (EF) qui contient les points R et K est donc : $\frac{2bt}{1-t^2}$, et son équation est : $\frac{y+b}{x-t}=\frac{2bt}{1-t^2}$, ou encore

$$2btx-\left(1-t^2\right)y-b\left(1+t^2\right)=0 \qquad (1)$$

La dérivée par rapport à t de l'équation (1) ci-dessus est :

$$bx+ty-bt=0 \qquad (2)$$

L'équation de l'enveloppe des droites (EF) s'obtient en éliminant t entre les équations (1) et (2). On obtient ainsi :

$$x^2+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

Soit I le milieu de [CD] et J le symétrique de I par rapport à O.

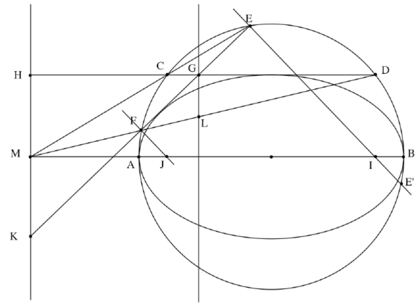
Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OB}'}\right)$, l'équation (3) est alors celle de l'ellipse de grand axe [AB] et de petit axe [IJ].

Par ailleurs, la distance des foyers au centre de la conique est égale à : $\sqrt{1-b^2}=a.$

Les foyers sont donc les points C′ et D′, projections orthogonales des points C et D sur la droite (AB).

Solution de Georges Lion (Wallis)

1) (EF) et (CD) se coupent en un point G sur la polaire de M par rapport à (C).
Cette polaire est perpendiculaire à (AB) et coupe (MD) en L. Par Thalès et sachant [MLFD] = −1, on a :
LG/HM = DL/DM = FL/FM = LG/KM, d'où HM = KM.



2) Les perpendiculaires menées en E et F à (EF) coupent (AB) en I et J. Les angles à côtés perpendiculaires FKM et MIE sont égaux, et $\widehat{\mathrm{EMI}} = \widehat{\mathrm{ECD}}$ (correspondants) = $\widehat{\mathrm{EFD}}$ (inscrits) = $\widehat{\mathrm{MFK}}$ (opposés par le sommet).
Les triangles FKM et MIE sont semblables d'où KM/IE = FM/ME.
On démontre de même KM/JF = EM/FM.
En rassemblant :

$$\mathrm{IE} \cdot \mathrm{JF} = \mathrm{KM}^2 = \mathrm{HM}^2 = \frac{\left(\mathrm{AB}^2 - \mathrm{CD}^2\right)}{4}.$$

(EI) recoupe (C) en E' diamétralement opposé à F donc on obtient :

$$\frac{\left(\mathrm{AB}^2 - \mathrm{IJ}^2\right)}{4} = \mathrm{IB} \cdot \mathrm{IA} = \mathrm{IE}' \cdot \mathrm{IE} = \mathrm{JF} \cdot \mathrm{IE} = \frac{\left(\mathrm{AB}^2 - \mathrm{CD}^2\right)}{4}.$$

Les points I et J sont fixes comme projetés de C et D sur (AB) et la droite (EF) reste tangente à l'ellipse de foyers I et J et de cercle principal (C).

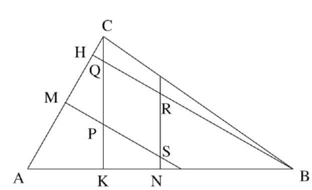
Autres solutions de Richard Beczkowski (Chalon-sur-Saône), Jacques Bouteloup (Rouen), J.-C. Carrega (Lyon), Alain Corre (Moulins), René Manzoni (Le Havre), A. Marcout (Sainte-Savine), Christian Perroud (Habère-Lullin) et Pierre Renfer (Ostwald).

Exercice 468-3 (Raymond Raynaud - Digne)

Deux hauteurs et deux médiatrices pour un losange.
Dans un triangle ABC, les hauteurs issues de B et de C et les médiatrices des côtés [AB] et [AC] portent les côtés d'un parallélogramme.
Pour quels triangles ABC ce parallélogramme est-il un losange ?

Solution de Frédéric Pillard (Châteauroux)

Les pieds des hauteurs et des médiatrices sont indiqués par la figure ci-contre.
Le parallélogramme PQRS n'existe que si ABC n'est pas plat et n'est pas isocèle en C (conditions initiales).



Choisissons un repère orthonormal $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \vec{\ }\right)$.

Appelons a et b les coordonnées de C.

Il vient alors : A $(0\,;0)$, B $(1\,;0)$, C $(a\,;b)$, M $\left(\frac{a}{2}\,;\frac{b}{2}\right)$, N $\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$, K $(a\,;0)$.

En écrivant que $\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ car (BH) ⊥ (AC) et $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ car A,H et C sont alignés, on obtient les coordonnées de H $\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\,;\frac{ab}{a^2+b^2}\right)$.

En écrivant que $\overrightarrow{\mathrm{BQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ car (BQ) ⊥ (AC) on obtient les coordonnées de Q $\left(a\,;\frac{a(1-a)}{b}\right)$.

Par la même méthode on obtient les coordonnées de P $\left(a\,;\frac{b^2-a^2}{2b}\right)$, R $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{a}{2b}\right)$, S $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{b^2-a(1-a)}{2b}\right)$.

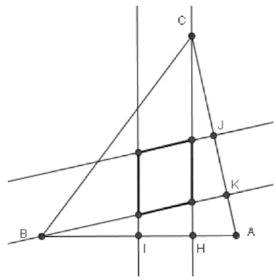
Pour que le parallélogramme PQRS, s'il existe, soit un losange, il faut et il suffit que ses diagonales soient perpendiculaires et donc que le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{PR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QS}}$ soit nul ($\overrightarrow{\mathrm{PR}} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{\mathrm{QS}} \neq \vec{0}$ par les conditions initiales).

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QS}} = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{a - b^2 + a^2}{2b}\right)\left(\frac{b^2 - 3a(1-a)}{2b}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow b^2 (1-2a)^2 + \left(a - b^2 + a^2\right)\left(b^2 - 3a(1-a)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 3a^4 + 2a^2b^2 - 3a^2 - b^4 + b^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(3a^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2 - 1\right) = 0.
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $3a^2 - b^2 = 0$ soit $b = \pm a\sqrt{3}$ et donc C appartient à la droite Δ d'équation $y = x\sqrt{3}$ privée du point D tel que ABD soit équilatéral (conditions initiales), ou à la droite Δ′ d'équation $y = -x\sqrt{3}$ privée du point D′ tel que ABD′ soit équilatéral (conditions initiales) ; il suffit donc que le triangle ABC soit tel que $\widehat{\mathrm{BAC}}$ mesure 60° ou 120°.

Ou bien $a^2 + b^2 - 1 = 0$ et donc C appartient au cercle de centre A et de rayon AB privé des points B, D, $\mathrm{S_A}$(B), $\mathrm{S_{(AB)}}$(D) (conditions initiales).

Solution d'Alain Corre (Moulins)

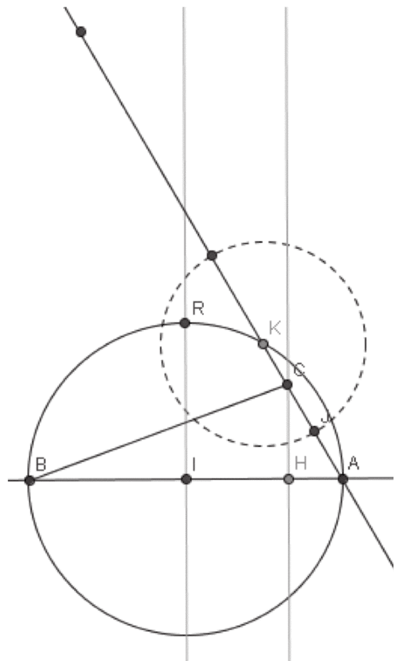


Dans le triangle ABC, appelons I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC] et H et K les pieds des hauteurs issues respectivement de C et B.

Pour que le parallélogramme formé par les deux médiatrices et les deux hauteurs ainsi déterminées soit un losange, il faut et il suffit que :

$$IH = JK.$$

Analyse du problème :



Fixons A, B et H.
K appartient au cercle de diamètre [AB] et J milieu de [AC] appartient à l'intersection de (AK) et du cercle de centre K et de rayon IH (deux possibilités).

Fixons, pour des raisons de symétrie, le point K sur le demi-cercle supérieur

Notons t la mesure de l'angle $\widehat{ABK}$.

L'angle $\widehat{AIK}$ mesure alors $2t$.

(t étant compris strictement entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, $\sin(t)$ est positif)

Notons $a = \overline{IH}$.
Plaçons-nous dans le repère orthonormé direct $\left(I, \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IR}\right)$.

K a pour coordonnées $\left(\cos(2t)\,;\sin(2t)\right)$,

$\overrightarrow{AK}$ a pour composantes

$$\left(\cos(2t)-1\,;\sin(2t)\right)$$

et a pour norme $\sqrt{2-2\cos(2t)} = 2\sin(t)$ (puisque $\sin(t) > 0$).

Le vecteur unitaire $\vec{n}$ colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{AK}$ a pour composantes : $\left(-\sin(t)\,;\cos(t)\right)$.

$J = K \pm a\vec{n}$ et $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BJ}$.

J a pour coordonnées $\left(\cos(2t) \pm a\sin(t)\,;\sin(2t) + a\cos(t)\right)$.

C a pour coordonnées $\left(2\cos(2t) \pm 2a\sin(t)\,;2\sin(2t) + 2a\cos(t)\right)$.

Or C appartient à la droite d'équation $x = a$, donc on a la relation :

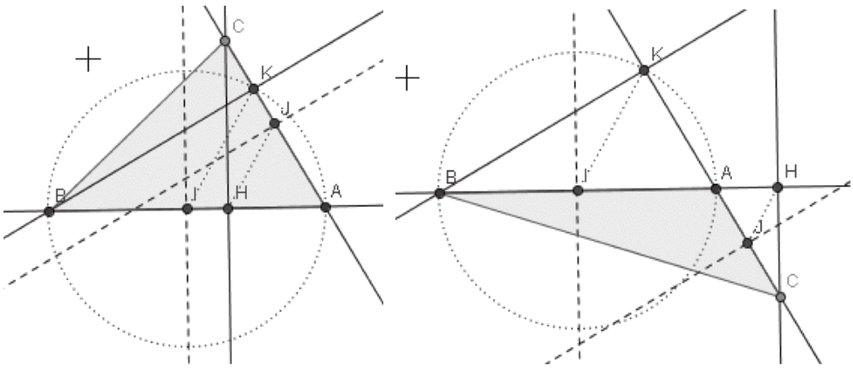
$$2\cos(2t) \pm 2a\sin(t) - 1 = a,$$

$$2\cos(2t) - 1 = a\left(1 \pm 2a\sin(t)\right),$$

$$1 - 4\sin^2(t) = a\left(1 \pm 2a\sin(t)\right).$$

Les différents cas se ramènent à :
$2\sin(t) = 1$ (le cas -1 est exclus) ou $2\sin(t) = \pm(a - 1)$.

Premier cas : $\sin(t) = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $t = \dfrac{\pi}{6}$.



Considérons un triangle ABC tel que l'angle en A mesure 60° ou 120°.
Dans le triangle rectangle CHA, HJ = JA, le triangle AHJ est donc équilatéral.
Le triangle AKI est aussi équilatéral, ces deux triangles sont donc homothétiques, l'homothétie de centre A transformant J en K et H en I.
Par suite IH = JK.

Tous les triangles ayant en A un angle de 60° ou de 120° répondent à la question.

Deuxième cas : $a - 1 = \overline{\text{IH}} - \overline{\text{IA}} = \overline{\text{AH}}$.
2 sin(t) = AK.
La condition 2 sin(t) = ±(a − 1) revient à AK = AH.

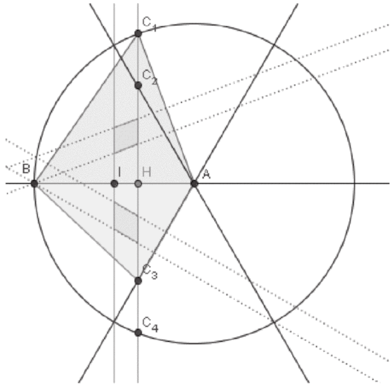
Or $\text{AK} = \text{AB}\cos\widehat{\text{A}}$ et $\text{AH} = \text{AC}\cos\widehat{\text{A}}$.

On a donc AB = AC. ABC est donc isocèle de sommet principal A. La réciproque étant évidente :
Tous les triangles isocèles répondent à la question.

CONCLUSION :

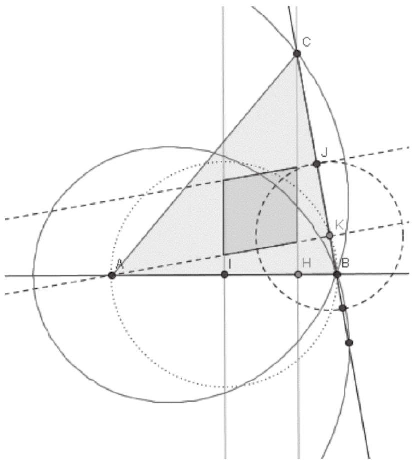
Les solutions sont tous les triangles isocèles en A ou possédant en A un angle de mesure 60° ou 120°.

Construction de triangles présentant un tel losange, A,B et H étant fixés :



Les deux droites faisant un angle de 60° avec [AB) et le cercle de centre A et de rayon AB coupent la perpendiculaire en H à (AB) en quatre points C_1, C_2, C_3 et C_4 qui forment avec A et B les quatre triangles solutions deux à deux symétriques par rapport à (AB).
La figure ci-contre représente le triangle isocèle ABC_1 et le triangle ABC_3 qui a, en A, un angle de 60°.

Autre construction :



Par construction, J décrit la conchoïde du cercle de diamètre AB, de centre A et de paramètre a (= IH) et C décrit l'image de cette courbe par l'homothétie de centre A et de rapport 2, ce qui est encore une conchoïde d'un cercle (de centre B et de rayon BA), de centre A et de paramètre $2a$ (c'est un limaçon de Pascal plus précisément).

H étant fixé sur (AB), ce limaçon coupe la perpendiculaire en H à (AB) en quatre points qui sont les sommets C des triangles solutions.