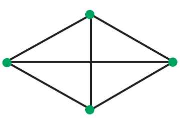
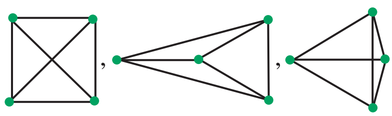
Quatre points - Six longueurs : des figures et des angles

Bruno Alaplantive(*)

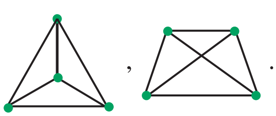
L'origine des propositions d'activités que présente cet article est un exercice de la rubrique Rallye Problèmes de la revue *Math-Jeunes* de la SBPMef (p. 32, nº 109 S, novembre 2004).
Avant d'en dire plus, regardons d'abord l'exercice de nos collègues belges :

> Considérons toutes les configurations de quatre points distincts A, B, C, D du plan dont les distances mutuelles AB, AC, AD, BC, BD et CD ne prennent que deux valeurs exactement, notées *a* et *b*.
> Lorsque l'une des valeurs vaut *a* et que les cinq autres valent *b*, la configuration sera (1,5). À l'ordre des points près, dessiner au moins une des configuration(s) (1,5), (2,4) et (3,3).

Voici des, ou les … (?[1]) solutions.

(1,5)  (2,4) 

On ne considère bien que les seules distances entre les quatre points.

(3,3) 

On se rend compte tout de suite qu'il y a là un moyen original d'investir ou de réinvestir le travail sur les longueurs des côtés et diagonales des quadrilatères particuliers, si on veut bien prolonger à trois ou quatre ou … longueurs différentes. C'est ce que propose le premier paragraphe dans un travail qui peut être mené dès la classe de Cinquième mais également en Quatrième où l'utilisation du théorème de Pythagore permettra certaines fois de calculer les longueurs pour en simplifier la comparaison. Le second paragraphe poursuit ce même travail mais sur des vues en perspective et s'adresse plutôt à des élèves à partir de la Quatrième, les quatre points n'étant pas toujours coplanaires. Le paragraphe suivant se fixe sur le cas des quatre points alignés et concerne plus directement les élèves de Sixième. Le quatrième paragraphe propose un prolongement éventuel : la deuxième configuration (3,3) – voir ci-dessus – repose sur le pentagone régulier et ses angles, cela peut aussi

(*) Collège Joseph-Paul Rambaud, Pamiers.
Email : bruno.alaplantive@wanadoo.fr

(1) Elles sont bien toutes là !

permettre une visite des calculs d'angles en Cinquième et jusqu'en Troisième avec le théorème de l'angle inscrit. Pour terminer, le dernier paragraphe se recentre autour du problème initial dans l'étude de trois configurations particulières.

En tout état de cause, on peut laisser vagabonder son inspiration.

1. Autour des quadrilatères particuliers

On retourne l'exercice initial en donnant d'abord les quatre points et en posant ensuite la question de savoir à quelle configuration il appartient. Pour que l'élève ne se contente pas de répondre au paraître ou à vue, il ne faut pas travailler sur feuille blanche. Un premier travail est fait sur quadrillage suivi d'un second sur « trillage » (le quadrillage et le trillage sont, bien sûr, réguliers).

Par exemple pour la figure ci-contre, la réponse attendue est : (2,2,1,1)

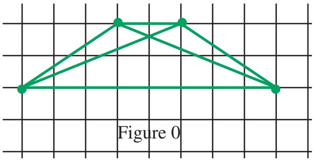


Figure 0

Après une présentation et deux exemples, les élèves ont à choisir le type (la configuration) auquel se rapporte chaque dessin. Les voici :

Sur quadrillage

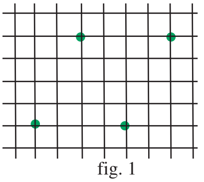


fig. 1

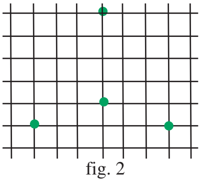


fig. 2

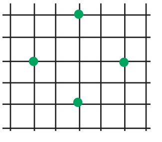


fig. 3

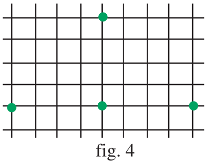


fig. 4

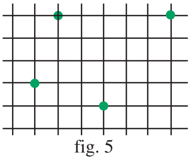


fig. 5

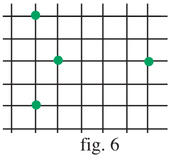


fig. 6

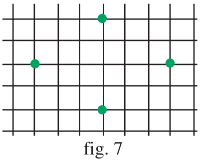


fig. 7

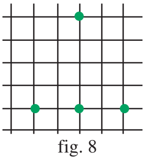


fig. 8

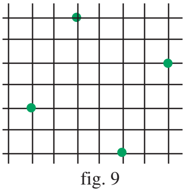


fig. 9

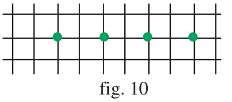


fig. 10

Sur trillage

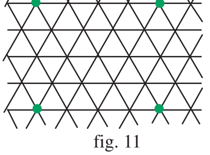


fig. 11

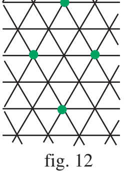


fig. 12

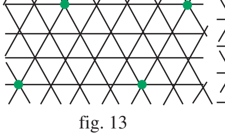


fig. 13

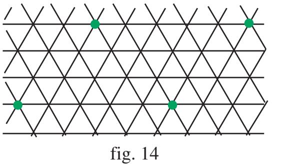


fig. 14

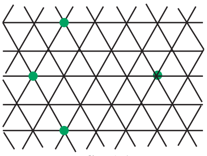


fig.15

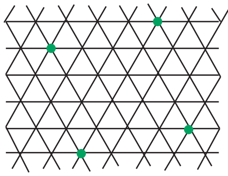



fig.16

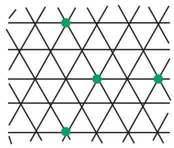



fig.17

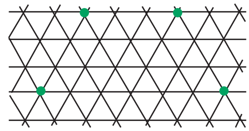



fig.18

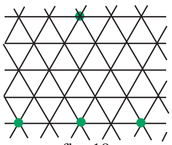


fig. 19

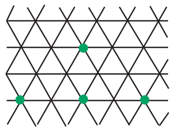



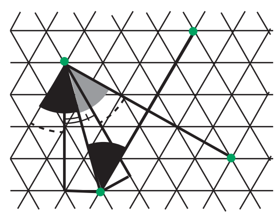
fig. 20

J'ai proposé ceci sous forme de diaporamas vidéo projetés. Les élèves ont du mal à rentrer dans ces dessins. Peu ont lancé le bras et la main vers l'avant comme pour vérifier en repassant le tracé en acte et pas seulement mentalement. Je l'avais pourtant vu faire par des premiers « cobayes » mais directement sur l'écran d'un ordinateur tout proche. Sans doute ici la distance de leur place à l'écran est-elle trop grande.

Sur le quadrillage la figure 2 est sujette à polémique. Nombreux sont ceux qui voient un triangle équilatéral. Une animation montre que la base (de six carreaux) est un peu plus longue qu'un des côtés obliques. Si l'on dispose du théorème de Pythagore, il devient facile de le vérifier et un calcul semble plus convaincant, $34 \neq 36$! Les élèves constatent qu'ils se sont fait piéger et râlent… Sur les figures 4, 8 et 10, l'alignement de trois ou des quatre points, masque des longueurs. Et ainsi la somme des nombres proposés par les élèves pour le type n'est pas toujours égale à 6. Par exemple, (3,2) est souvent donné pour le type de la figure 4 au lieu de (3,2,1).

Le second volet sur le trillage se fait à la suite. Méfiants, les élèves sont plus attentifs à ne pas se laisser prendre. Dans cette série, c'est la figure 16 qui est la plus délicate. Je n'ai pas eu la réponse « c'est un carré », que j'escomptais. Les élèves ont été contents de ne pas être tombés dans un piège qu'ils n'avaient pas vu, mais il a tout de même fallu expliquer pourquoi ce n'était pas un carré.

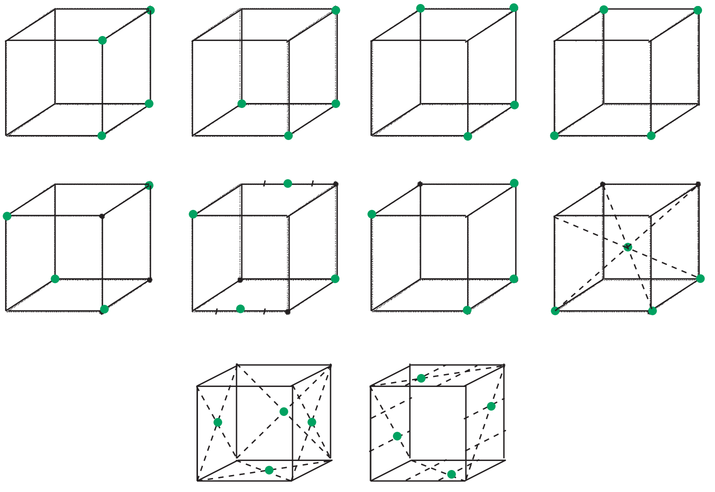
Les calculs ne se prêtant pas bien à la figure, des considérations sur les angles, ne débordant pas des connaissances de cinquième, rendent aussi bien leur verdict : les angles gris foncé et gris clair ne sont pas égaux.



Vivement intéressé par ce quasi carré, un relecteur de l'institut du Lauragais m'a proposé une étude jointe en annexe qui développe plusieurs méthodes, dont celle-ci.

2. Vision dans l'espace

Le problème est le même mais les quatre points sont maintenant pris aux sommets ou sur les arêtes du squelette d'un cube… C'est une autre dimension ! Ici encore le support est un diaporama :

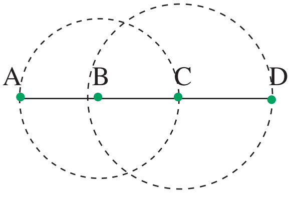


En Quatrième, le travail sur Pythagore et sur les pyramides issues du cube permet de différencier diagonale d'une face et diagonale du cube. La manipulation conjointe d'un vrai squelette de cube et de fil élastique est un appui décisif quand le seul discours ne suffit pas à convaincre.
La configuration des points du dernier cube (4,2) est réellement « tordue ». Pour un élève, la deviner est le gage d'une bonne vision dans l'espace et certainement d'une petite part de défi. Je la propose simplement pour marquer la différence entre le plan et l'espace : les quatre points ne forment pas ici un carré.

3. Un travail avec quatre points alignés

Le travail sur le cercle en Sixième se prête bien au sujet. Pour les quatre points alignés voici ce que l'on peut par exemple proposer. La figure ci-dessous est dessinée ou projetée au tableau, avec le texte suivant :

Sur cette figure les points B et C sont les centres des cercles.
On s'intéresse aux six longueurs AB, AC, AD, BC, BD et CD.



Consigne :

Classe les six longueurs AB, AC, AD, BC, BD et CD dans l'ordre croissant en les séparant par le signe = ou le signe < :

....

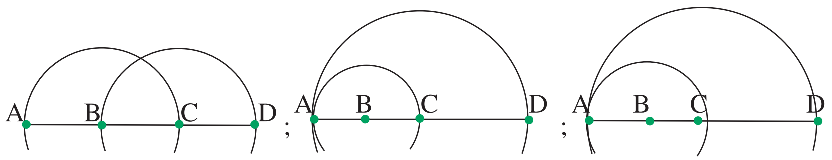
Ne pas connaître les mesures est toujours un souci pour les élèves de Sixième. Certains auront besoin de la phase du dessin pour appréhender la figure et la demande. Une introduction du calcul littéral est tout à fait possible pour alléger et asseoir une justification sans mesure. R et r désignant le grand et le petit rayon des cercles, une traduction éclairante et justificative du résultat

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} < \mathrm{CD} < \mathrm{AC} < \mathrm{BC} < \mathrm{AD}$$

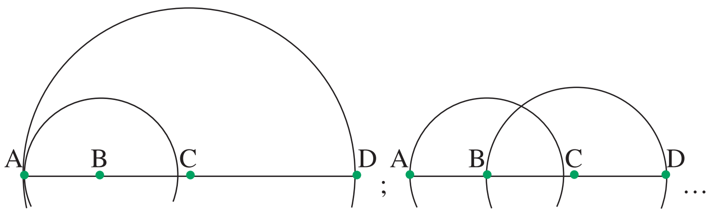
est :

$$r = r < \mathrm{R} < r + r \text{ (ou } 2r) < r + \mathrm{R} < 2r + \mathrm{R}.$$

En Sixième, il s'agit de montrer ceci aux élèves plutôt que de le leur faire trouver. Ils adhèrent facilement à ce raccourci d'écriture et les plus vifs sont à même de reproduire ce schéma explicatif pour les figures proposées ensuite :



Ici le R − r correspondant à BC est plus dur à faire comprendre…



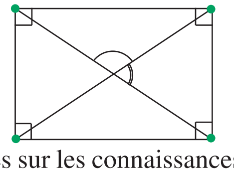
Par ailleurs, le principe des figures téléphonées est particulièrement intéressant pour ces cas.

4. Un prolongement envisageable

1 quadrilatère – 6 angles : un quadrilatère convexe (pour ne pas apporter d'autre difficulté) étant donné, on détermine son type en « *angles* » au regard des quatre angles formés par les côtés consécutifs et des deux angles formés par les diagonales.

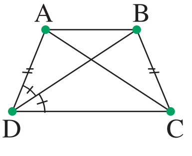
Par exemple, le rectangle se classe (4,1,1).

Peut-on trouver d'autres quadrilatères de type (4,1,1) ?
De quel type est le carré ? Le losange ?



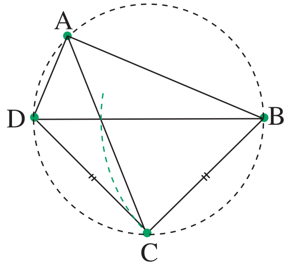
Certaines figures peuvent conduire à des calculs d'angles basés sur les connaissances de Cinquième mais avec l'apport de calcul littéral en Quatrième ou en Troisième :

• ABCD est un trapèze isocèle (AD = BC) tel que (DB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{ADC}}$. De quel type, en angles, ABCD est-il ? Et en distances ?



Et si l'on dispose du théorème de l'angle inscrit :

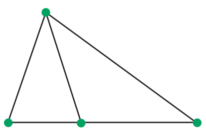
• Dans la figure ci-contre, [BD] est un diamètre et BC = CD. De quel type, en angles, ABCD est-il ? (on peut remarquer que cette figure présente de nombreux triangles semblables).



5. Retour à l'exercice initial

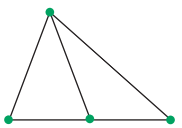
La demande de dessiner une configuration donnée proposée au début m'a incité à une recherche un peu plus exhaustive. Pour terminer en voici trois assez intéressantes.

(3,2,1)

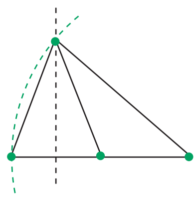


À nouveau des calculs d'angles et en liaison avec le pentagone régulier.
On trouve 36° pour l'angle aigu le plus petit et 108° pour l'angle obtus.

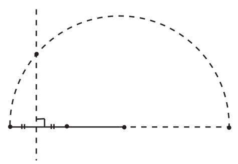
(2,2,2)



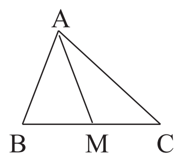
Une construction



Si l'on prend le temps de calculer la hauteur ici « égale » à $\sqrt{7}$, c'est l'occasion de parler de la construction plus générale de $\sqrt{a}$.



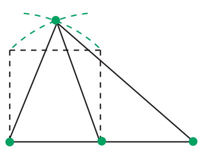
Une autre construction est possible en utilisant les triangles semblables ou proportionnels.
Les triangles CAB et ABM, isocèles avec les mêmes angles, le sont.



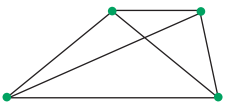
Alors on a $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{BC}{AB}$ ou encore $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{2BM}{AM}$

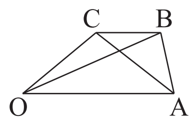
et donc $AM^2 = 2BM^2$ ou $AM = \sqrt{2}BM$.

d'où



(2,2,2)





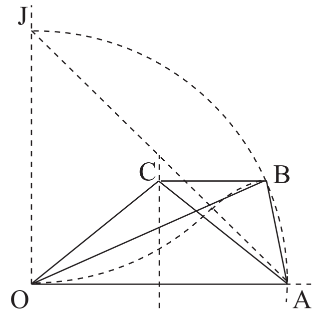
Dans un repère orthonormal (O, A, J), en posant $\widehat{AOB} = 2a$.

On obtient : B (cos $2a$; sin $2a$), C $\left(\frac{1}{2}; \sin 2a\right)$ et AB = 2 sin a.

De l'égalité CB = AB il vient $\cos 2a - \frac{1}{2} = 2\sin a$ qui équivaut à $2\sin^2 a + 2\sin a - \frac{1}{2} = 0$, soit encore $\sin a = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ qui n'a pas de solution ou $\sin a = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ qui renvoie à $a \approx 11{,}95°$.

Une construction possible

$(AB = 2\sin a = \sqrt{2} - 1)$



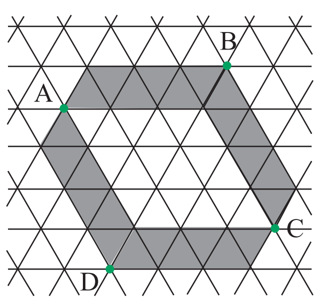
Annexe de Hilaire Bern, de l'Institut du Lauragais

Étude de la figure 16

<u>ABCD est un losange</u>

Méthode 1
Les diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu.

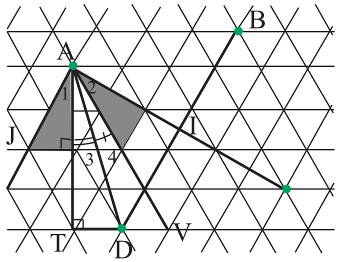
Méthode 2
[AB], [BC] [CD] et [DA] sont les longues diagonales de parallélogrammes superposables.
Remarque : le losange ABCD est une dilatation du losange « intérieur blanc » sur la figure ci-contre.



<u>Ce losange est-il carré ?</u>

Méthode 1

Les triangles rectangles grisés sont superposables (cas d'égalité ou rotation (A ; 60°)).



Donc $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Le triangle ATV où [AD] est médiane, n'est pas isocèle.

Donc (AD) n'est pas bissectrice et $\widehat{A_3} \neq \widehat{A_4}$.

Dès lors,

$\widehat{A_1} + \widehat{A_3} \neq \widehat{A_2} + \widehat{A_4}$, c'est-à-dire $\widehat{JAD} \neq \widehat{IAD}$.

Or $\widehat{JAD} = \widehat{IAD}$.

Le triangle IAD n'est pas isocèle : IA ≠ ID et le losange ABCD n'est donc pas un carré.

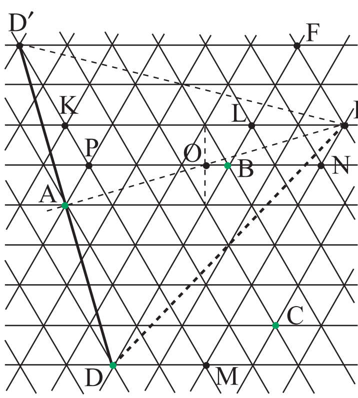
Remarques :

– Le fait d'avoir $\widehat{JAD} \neq \widehat{IAD}$ implique $\widehat{JAD} \neq 45°$; donc le triangle rectangle IAD ne peut pas être isocèle. Il n'est pas nécessaire de faire intervenir $\widehat{ADI}$.

– La comparaison plus poussée de $\widehat{A_3}$ et $\widehat{A_4}$ proposée dans l'article, manifeste que D est plus près de (AV) que de (AI) et qu'ainsi $\widehat{A_3} > \widehat{A_4}$, etc.

Méthode 2

CLÉ : Comparer $\widehat{BAD}$ à un angle que l'on construit droit, par exemple en cherchant la médiatrice de [DD′], D′ étant le symétrique de D par rapport à A.



[ED′] et [ED] sont les longues diagonales des parallélogrammes superposables EFD′K et ELDM.

Donc ED′ = ED et (AE) est la médiatrice du segment [DD′].

Or (AE) coupe [NP] en son milieu O (centre de symétrie d'un parallélogramme).

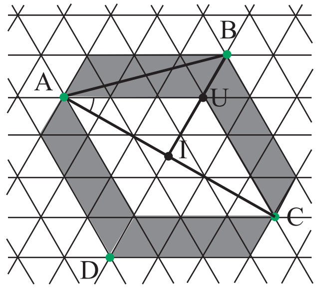
Donc B ne peut pas être sur (AE) :

$$\widehat{BAD} \neq 90°.$$

On sait même que $\widehat{BAD} < 90°$ … (de peu !!!).

Méthode 3

On a : $\tan\widehat{\mathrm{IAB}} = \tan\widehat{\mathrm{IAT}} \times \dfrac{\mathrm{IB}}{\mathrm{IU}}$



ou aussi $\tan\widehat{\mathrm{IAB}} = \tan 30° \times \dfrac{5}{3}$

soit encore $\tan\widehat{\mathrm{IAB}} = \dfrac{5}{3\sqrt{3}}$.

Or $5 \neq 3\sqrt{3}$ (sans aucun calcul, en raison de $\sqrt{3}$) ;
d'où $\tan\widehat{\mathrm{IAB}} \neq 1$; $\widehat{\mathrm{BAI}} \neq 45°$ et donc $\widehat{\mathrm{BAD}} \neq 90°$, etc.

Remarque : la calculatrice donne $\widehat{\mathrm{BAI}} \approx 43{,}9°$ d'où $\widehat{\mathrm{BAD}} \approx 87{,}8°$

Bien entendu la tangente trigonométrique permet la méthode la plus basique, fondée sur la hauteur égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'une maille-triangle équilatéral de côté 1 :

ici IB = 2,5 et IA = $3\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, alors $\tan\widehat{\mathrm{IAB}} = \dfrac{\mathrm{IB}}{\mathrm{IA}} = \dfrac{5}{3\sqrt{3}}$, etc.

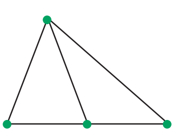
C'est certainement la méthode la plus directe en classe de troisième.

Prolongement : La droite (AC) étant de direction fixe – choisie comme ci-dessus – et le point A donné, est-il possible d'avoir des nœuds C, B et D du trillage tels que ABCD soit un carré ? (Réponse : non. On en revient toujours à l'irrationalité de $\sqrt{3}$). Même problème et même réponse avec (AC) choisie parmi les droites du trillage.

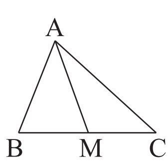
Annexe de Paul-Alain Brentov, du Plantaurel

À propos des deux dernières configurations du paragraphe 5.

(2,2,2)



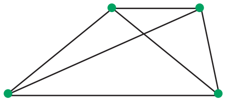
La deuxième construction mentionnée peut également s'obtenir à partir de l'utilisation du théorème de la médiane :



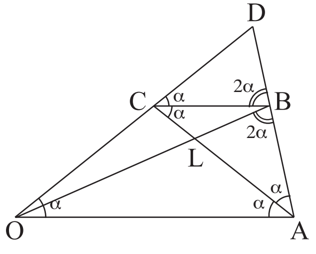
$$4\mathrm{AM}^2 = 2\mathrm{AB}^2 + 2\mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2.$$

Comme ici AM = AB et AC = BC, il vient $AC = \sqrt{2}AM$ soit encore $AM = \sqrt{2}BM$ et la construction.

(2,2,2)

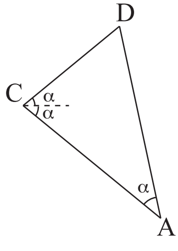


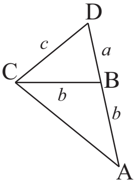
<u>Une construction sans recours à la trigonométrie</u>



Les triangles BCD et ALB sont isométriques (mêmes angles et BC = BA).

Particulièrement on a $AL = c$.



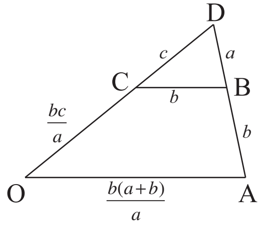


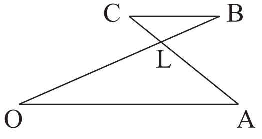
Le triangle CAD est semblable au triangle BCD :

on a $\dfrac{CA}{BC} = \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{DC}{DB}$,

soit $\dfrac{CA}{b} = \dfrac{a+b}{c} = \dfrac{c}{a}$.

On en tire la relation $c^2 = a(a+b)$ et aussi $CA = \dfrac{bc}{a}$.





$\dfrac{CL}{LA} = \dfrac{CB}{OA}$ donne $\dfrac{CL}{c} = \dfrac{a}{a+b}$, soit $CL = \dfrac{ac}{a+b}$.

L'égalité CL + LA = CA s'écrit donc $\dfrac{ac}{a+b} + c = \dfrac{bc}{a}$, puis $\dfrac{a}{a+b} + 1 = \dfrac{b}{a}$, d'où il ressort $2a^2 = b^2$ et finalement $b = \sqrt{2}a$.

De la première relation $c^2 = a(a+b)$, on tire alors $c^2 = a^2\left(1+\sqrt{2}\right)$, d'où $c = \sqrt{1+\sqrt{2}}\,a$.

La construction

Le triangle de côtés a ; $\sqrt{2}a$; $\sqrt{1+\sqrt{2}}\,a$ est aussi le triangle $\frac{\sqrt{2}}{2}b$; b ; $\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}b$.

$\frac{\sqrt{2}}{2}b$ est aisé à construire et $\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}b = \left(1+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)b$.

On utilise ensuite la classique construction de $\sqrt{xy}$ par le cercle de diamètre $x + y$.