

Mesurer la Terre avec des élèves

Paul-Louis Hennequin(*)

Introduction

Le thème de la mesure de la Terre est interdisciplinaire (mathématiques, physique, histoire, géographie, géologie) ; il est étroitement lié au choix du mètre comme unité de longueur universelle et peut être traité tant au collège qu'au lycée. Introduit dès l'antiquité par Ératosthène, il a été l'objet de nombreuses campagnes sur le terrain utilisant les perfectionnements de la lunette astronomique et aussi de controverses scientifiques tout au long du XVII^{ème} et du XVIII^{ème} siècles. Depuis une dizaine d'années, il a donné lieu à de nombreuses publications, à la fois de recherche et de popularisation ; on trouvera les principales références en consultant dans *Publimath* les rubriques *GPS*, *Méridien*, *Méridienne*, *Mesure de la terre* et *Mètre*.

Cet article reprend et actualise à l'intention des lecteurs du Bulletin, le contenu de trois articles publiés dans les numéros 41 (jan 98) et 43 (nov 98) d'*Auvergne Sciences*, bulletin de l'ADASTA (Association pour le Développement de l'Animation Scientifique et Technique en Auvergne, adasta@wanadoo.fr)

Nous avons expérimenté les travaux pratiques décrits ci-dessous avec des jeunes de onze à dix-huit ans participant à l'Université d'été organisée par la F.F.J.M. à Orléans en juillet 1997, puis dans seize classes de Cinquième, Quatrième, Troisième et SEGPA du collège Albert Camus de Clermont-Ferrand à l'occasion de la *Semaine de la science* d'octobre 1998.

Je remercie chaleureusement Louis-Marie Bonneval pour son aide très efficace dans la mise en forme de cet article.

I. Principe de la triangulation plane

Connue depuis Picard au début du 17^{ème} siècle, elle consiste, partant d'un point A sur l'arc de méridien à mesurer sa *méridienne*,

- à constituer (cf. fig 1) un réseau de points ABCDEFGHIJ (sommets de montagne, tours, clochers), deux sommets voisins étant visibles les uns des autres, et à les joindre par des segments,
- à mesurer les angles des triangles formés par ces segments. On vérifie que la somme des mesures des trois angles de chaque triangle est égale à 180° ,
- à mesurer sur le terrain la longueur d'un des segments appelé *base* IJ. Ce segment devra être horizontal et bien dégagé sur toute sa longueur (bord de mer, rive d'un fleuve, route droite en plaine),

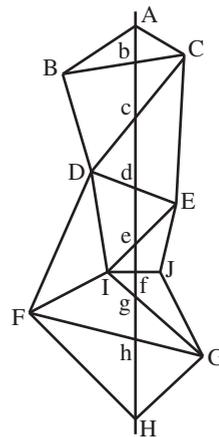


Figure 1

(*) Paul-Louis.Hennequin@math.univ-bpclermont.fr

– à calculer de proche en proche les côtés des triangles : si dans un triangle LMN, on connaît le côté LM et les angles \widehat{L} , \widehat{M} , \widehat{N} , alors :

$$MN = LM \frac{\sin \widehat{L}}{\sin \widehat{N}} \text{ et } LN = LM \frac{\sin \widehat{M}}{\sin \widehat{N}},$$

– à déterminer les azimuts de AB et de AC, c'est à dire les angles \widehat{bAB} et \widehat{bAC} ,
– à calculer successivement les longueurs Ab, bc, cd, ..., hH ce qui permet d'obtenir la longueur totale AH.

En général pour contrôler les erreurs de mesure, on mesure au moins deux bases et on termine la chaîne par un point situé sur le méridien de A.

On peut aussi déterminer les projections orthogonales de A, B, C, ..., I, J sur le méridien.

La mesure du méridien de Paris a joué un rôle historique considérable dans la définition du mètre par la Convention, le 18 Germinal an 3 (7 Avril 1795).

Jean Picard avait mesuré un premier arc d'Amiens à Malvoisine au sud de Paris de 1669 à 1671 ; la méridienne de Cassini (1683-1718) s'étend de Dunkerque à Perpignan, celle de Delambre et Méchain (1793-1798) s'étend jusqu'à Barcelone. Chacune reprend pour l'essentiel les sommets de la précédente.

Le méridien de Paris traverse huit régions françaises et a été matérialisé il y a quelques années par des plantations d'arbres ; un premier travail pratique avec des élèves peut donc consister à se rendre sur ce méridien, à rechercher quel point précis (sommets, édifice) a pu être utilisé pour la mesure puis à vérifier si de ce point on aperçoit ses voisins.

II. Mesurer sur la carte

À Orléans, nous nous sommes intéressés à la mesure des triangles : la longueur d'un segment de la triangulation varie entre 30 et 60 kilomètres. Si l'on veut effectuer des mesures sur une carte, l'échelle $\frac{1}{100\,000}$ (carte au 100 000^{ème}) semble la plus appropriée ; il faudra parfois utiliser une carte au 25 000^{ème} pour retrouver un lieu-dit.

La carte I.G.N. série verte au 100 000^{ème} comporte les latitudes et les longitudes de 0,40 grades en 0,40 grades et, curieusement, bien que les longitudes soient mesurées à partir du méridien de Paris, celui-ci n'est pas tracé (on peut facilement le construire).

Il est beaucoup plus facile et précis de mesurer sur la carte les longueurs des côtés d'un triangle plutôt que ses angles. Avec un peu de soin, on atteint une précision de 1 mm pour 50 cm. Soit une erreur relative de 0,2 %. Pour passer des mesures des côtés a, b, c à celles des angles $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ on utilisera sur une calculette les formules

$$p = \frac{a+b+c}{2}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} ; \quad \sin \widehat{A} = \frac{2S}{bc}, \quad \sin \widehat{B} = \frac{2S}{ca}, \quad \sin \widehat{C} = \frac{2S}{ab}, \text{ et}$$

on vérifiera que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

Les angles \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} sont alors connus à environ 0,2 % près ou encore avec une erreur absolue de $0,1^\circ$ ou 6 minutes, soit une précision bien supérieure à celle d'une mesure directe au rapporteur.

Au collège Albert Camus, chaque séance a débuté par un débat animé sur la forme de la Terre, la mesure de son rayon, le repérage par les méridiens et les parallèles, les cartes et leurs échelles, le rôle des satellites dans le développement des télécommunications. Durant cette discussion à laquelle tous les présents ont participé, il est apparu qu'ils avaient, avec le vocabulaire et les outils propres à leur niveau, de bonnes connaissances tant dans l'histoire des premiers grands explorateurs (Christophe Colomb, Magellan, ...) que dans la définition des coordonnées géographiques (pôles, équateur, Greenwich, ...). En mathématiques, ils savaient que deux angles d'un triangle plan déterminent le troisième et ont été tout étonnés qu'il n'en soit pas de même sur la sphère où l'on peut tracer des triangles à la fois équilatéraux et rectangles ! Ils avaient déjà vu des cartes à différentes échelles mais avaient des difficultés à manipuler les puissances de 10 d'exposant supérieur à 3 : à la question *Que représente sur le terrain une distance d'un centimètre sur la carte au cent-millième ?* les réponses spontanées variaient de 1 mètre à 100 kilomètres. Mais il y avait dans chaque classe de très bons élèves qui entraînaient les autres avec beaucoup de chaleur et de dynamisme.

Un premier travail effectué par petits groupes a consisté à déterminer avec précision la latitude et la longitude du collège à partir d'un plan au vingt-cinq-millième de Clermont qui donne le nom des rues du quartier et la position du collège et d'une carte au cinquante-millième qu'il a fallu d'abord comparer avec le plan pour y préciser l'emplacement du collège. La carte contenait le tracé de quelques méridiens et parallèles et sur ses bords des échelles de longitude et latitude.

Les élèves devaient donc tracer aussi soigneusement que possible le parallèle et le méridien du collège puis interpoler linéairement entre les valeurs entières de l'échelle : ils ont obtenu une latitude de $45^\circ 48,3'$ Nord et une longitude de $3^\circ 6,5'$ Est.

III. Mesurer grâce au soleil longitude et latitude

Le premier jour, le ciel était couvert, mais le lendemain, 10 octobre 1998 de 13h à 13h 50 nous avons pu relever sur le sol de la cour l'ombre au soleil d'un des bâtiments du collège Albert Camus ; la longueur de celle-ci est minimale entre 13h 30 et 13h 40. Nous avons mesuré d'une part cette longueur minimale et trouvé 13,60 mètres, d'autre part la hauteur du bâtiment accessible par un escalier extérieur et obtenu 18,15 mètres. Les élèves de troisième peuvent avec leur calculatrice en déduire la hauteur j du soleil par la formule $\tan j = 13,6/18,15 = 0,749$ d'où $j = 36^\circ 52'$; les autres peuvent construire sur du papier millimétré un triangle ABC rectangle en B tel que $AB = 136$ mm et $BC = 181,5$ mm et mesurer au rapporteur l'angle \hat{A} ; ils trouvent une valeur proche de 37° .

En consultant une table astronomique, on trouve que le passage au méridien de Clermont le 10 octobre a eu lieu à 13h 35, heure légale et que la hauteur du soleil était de $37^{\circ} 37'$; l'erreur absolue est donc de $45'$ et l'erreur relative de 2% ; ceci s'explique par la rusticité de la mesure, mais aussi par le fait que le diamètre apparent du soleil est de $32'$ et que le sol de la cour présente pour l'écoulement des eaux une légère pente de l'ordre de $5/1\ 000$. Rappelons qu'Ératosthène avait obtenu (à Alexandrie le jour du solstice d'été) $82^{\circ} 48'$ au lieu de $82^{\circ} 15'$.

Depuis cette séance, le Bulletin a publié (n° 430, septembre 2000, p. 653) un article de notre regretté ami Gilbert Walusinski où il décrivait le « Gnomon à fente » de son invention : un tel gnomon peut facilement être réalisé avec un calendrier des postes dont on a finement fendu le pli central sur une dizaine de centimètres. Posé à moitié ouvert sur une table horizontale et éclairé par le soleil, il laisse passer un rai de lumière au milieu de l'ombre portée ; il permet donc de mesurer, comme plus haut et avec une précision du même ordre, la hauteur du soleil.

IV. Mesurer une distance sur le terrain

Au XVII^{ème} ou au XVIII^{ème} siècle, on mesurait une base (de 11 à 14 km) en mettant bout à bout des perches de deux toises (soit environ 3,90 m) sur des supports horizontaux ; on peut mettre en évidence la difficulté de la manipulation en demandant aux élèves de mesurer une longueur sur le terrain ; par exemple la diagonale d'une cour de récréation ou d'un terrain de sport, en utilisant plusieurs doubles-mètres pliants en bois et une pelote de ficelle (plus longue que la distance à mesurer).

- Les deux points A et B dont on cherche la distance doivent être matérialisés de façon très précise : on utilisera par exemple l'arête d'un mur, un poteau tubulaire métallique vertical ou un pilier en maçonnerie et des marques à la craie ou au feutre.
- Ils doivent être situés sur une horizontale accessible et bien dégagée.
- La ficelle, tendue entre A et B permet de matérialiser le segment AB et de le mesurer sur place (on pourrait aussi la couper à la longueur AB et mesurer ensuite sa longueur, mais il faut alors pour cela s'assurer, par une expérience préalable, qu'elle n'est pas trop élastique).

Pour étudier l'erreur commise, on peut effectuer plusieurs fois la mesure (par exemple en partageant une classe de 25 en 5 groupes de 5 qui effectuent deux fois la mesure, une fois dans chaque sens). On peut étudier la répartition des 10 mesures : la moyenne donnera une estimation de la longueur, l'écart-type l'ordre de grandeur de l'erreur.

Analysons rapidement celle-ci : supposons pour simplifier que la longueur exacte soit de 100 mètres et que sur chaque segment de 2 mètres, l'erreur soit X_k , k allant de 1 à 50. On peut supposer que les X_k sont des variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et d'écart-type σ voisin de 1 mm.

Alors l'erreur totale s'écrit : $E = \sum_{k=1}^{50} X_k$.

Elle est de moyenne nulle et d'écart-type $\sqrt{50}\sigma \approx 7\sigma \approx 7\text{mm}$.

Si la mesure est répétée dix fois et si les mesures sont indépendantes, l'écart-type de

la moyenne des mesures sera $\frac{\sqrt{50}\sigma}{\sqrt{10}} \approx 2,2\text{mm}$.

En fait une deuxième erreur provient du fait que les segments I_k mesurés de 2 mètres ne sont pas rigoureusement alignés et font un angle \widehat{Y}_k avec la droite AB ; on affecte donc la mesure de 2 mètres non à I_k mais à sa projection sur AB qui mesure

$$2 \cos \widehat{Y}_k \approx 2 \left(1 - \frac{\widehat{Y}_k^2}{2} \right).$$

L'erreur est donc \widehat{Y}_k^2 et elle n'est plus de moyenne nulle (on pourrait calculer de même l'erreur due au fait que les 10 doubles-décimètres qui constituent le double-mètre ne sont pas rigoureusement alignés). On peut supposer que les \widehat{Y}_k sont de moyenne nulle et d'écart-type $\frac{1}{2000}$ rad (angle correspondant à une erreur d'1 mm dans la position de l'extrémité du double-mètre).

$$\text{Alors } E(\widehat{Y}_k^2) = V(\widehat{Y}_k) = \frac{1}{4 \cdot 10^6} \text{ et } E\left(\sum_{k=1}^{50} Y_k^2\right) = \frac{50}{4 \cdot 10^6} \text{ m} = 0,0125\text{mm}.$$

On voit que cette erreur systématique est négligeable par rapport à l'erreur précédemment estimée.

Au collègue Albert Camus, nous avons obtenu le tableau de résultats suivant :

20 mesures en mètres de la distance de deux poteaux de la cour (relevées dans l'ordre chronologique)

(1) 29,67	(5) 27,83	(9) 27,63	(13) 27,63	(17) 27,67
(2) 29,71	(6) 27,63	(10) 25,66	(14) 29,73	(18) 27,67
(3) 29,67	(7) 27,68	(11) 27,63	(15) 27,62	(19) 27,65
(4) 29,66	(8) 29,75	(12) 27,66	(16) 27,37	(20) 27,68

Ce tableau appelle quelques remarques :

(1), (2), (3), (4), (8), (10), et (14) comportent manifestement une erreur systématique sur le nombre des reports du double-mètre (majoré six fois et minoré une fois de 1). Les quatre dernières mesures sont meilleures car nous avons invité ces groupes à opérer plus soigneusement. En corrigeant cette erreur systématique, nous obtenons 20 mesures comprises entre 27,37 et 27,75 avec un mode de 27,66, une médiane de 27,67 et un écart-type de 0,08.

Si nous ne prenons pas en compte (5), peu soigneuse et (16) erronée sans doute par lecture à l'envers du dernier double-mètre, il reste 18 mesures de moyenne 27,668 et d'écart-type 0,033.

On peut donc retenir une distance de $27,67 \pm 0,033$ mètres, soit une erreur relative de 1/1 000.

V. La Terre est ronde

En première approximation, le globe terrestre est une sphère de rayon $\frac{2}{\pi} 10\,000$, soit environ 6 366,2 km. Cette sphéricité est-elle accessible à nos sens ?

Notre horizon : Si la terre était plate, notre horizon serait en principe illimité. À quelle distance d est-il borné par temps clair si nous sommes placés en un point d'altitude h entouré par la mer ou sur un sommet surmontant d'une altitude h un plateau ?

D'après Pythagore,

$$d^2 = (R+h)^2 - R^2 = 2hR + h^2$$

de sorte que, pour h petit devant R ,

$$d \approx \sqrt{2hR}.$$

Par exemple, dans un avion long courrier volant à 10 000 mètres d'altitude, au dessus d'une plaine ou de la mer, l'horizon est d'environ 350 kilomètres. On peut y mettre en évidence la rotondité de la terre si l'on est à l'heure du lever ou du coucher du soleil et si l'avion vole le long d'un méridien ; le soleil éclaire alors le haut de la cabine (cf. fig. 3). On a en effet

$$\theta = \sqrt{\frac{2h}{R}} \approx 0,057 \text{ rad.}$$

L'image du hublot AB est CD. Si la largeur de la cabine est 10 m, on en déduit

$$A'C = B'D \approx 57 \text{ centimètres.}$$

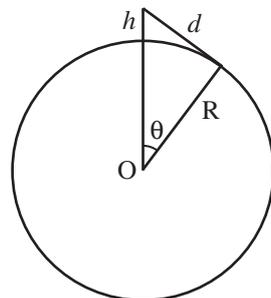


Figure 2



Figure 3

Les verticales ne sont pas parallèles

Quand un architecte construit une maison, il considère ses murs comme parallèles ; de même pour les piles d'un pont ; mais sur un globe sphérique les verticales se coupent toutes au centre du globe !

Par exemple (cf. fig 4), la travée centrale du viaduc de Millau qui permet à l'A75 de franchir le Tarn est supportée par deux piliers verticaux hauts de 300 mètres et distants à la base de 300 mètres. Sont-ils parallèles ? Ils font en fait un angle

sensiblement égal à $\frac{0,3}{6\,000} \approx \frac{1}{20\,000}$ rad. Leur distance au sommet est donc

$$300 + \frac{300}{20\,000} \approx 300,015 \text{ mètres.}$$

La différence de 15 mm, inaccessible à nos sens relativement à l'ensemble, n'est pas négligeable pour les instruments qui surveillent en permanence l'ouvrage.



Figure 4

VI. Si la terre est ronde, la triangulation est sphérique

Considérons un triangle ABC tracé sur une sphère de rayon R . Ses côtés AB , BC , CA sont des arcs de grands cercles, c'est-à-dire de cercles centrés en O , centre de la sphère.

Nous poserons $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, distances mesurées sur la sphère, et choisirons les arcs dont la mesure en radian est comprise entre 0 et π . Les angles

\hat{A} , \hat{B} , \hat{C} du triangle sont les rectilignes des dièdres d'arêtes OA (dont une face passe par B et l'autre par C), OB , OC . Nous allons montrer ci-dessous que la somme

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ est toujours supérieure à π . Nous appellerons excès sphérique la différence $\delta = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi$.

On peut développer un formulaire de trigonométrie sphérique analogue à celui de la trigonométrie plane ou se ramener à une triangulation plane en utilisant un résultat de Legendre (1787) : si nous associons à notre triangle sphérique un triangle plan $A'B'C'$ dont les côtés ont pour longueurs a , b , c , ce triangle a pour angles

$$\hat{A}' = \hat{A} - \frac{\delta}{3}, \quad \hat{B}' = \hat{B} - \frac{\delta}{3}, \quad \hat{C}' = \hat{C} - \frac{\delta}{3}$$

à des termes en δ^2 près : on dit qu'on peut répartir également l'excès sphérique δ . En effectuant cette opération pour tous les triangles de la triangulation sphérique, on la remplace par une triangulation plane.

Nous allons maintenant démontrer élémentairement (cf. Marcel Berger, *Géométrie*, Cedic-Nathan, 1977, § 18.3.8.4.) le résultat suivant, dû à Girard (1625), qui nous permettra à la fois d'estimer l'ordre de grandeur de δ et de vérifier la mesure des trois angles \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} (de même qu'en triangulation plane on vérifie que

$$\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = \pi) :$$

L'excès sphérique δ est égal à l'aire du triangle ABC divisée par R^2 .

Pour présenter la démonstration aux élèves de collège, on pourra utiliser un ballon blanc sur lequel on effectuera les constructions à l'aide de marqueurs de couleur.

Traçons d'abord un secteur sphérique : il est défini par deux points M et M' diamétralement opposés et par deux demi-plans d'arête MM'. Soit θ le rectiligne du dièdre ainsi formé ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). L'aire du secteur sphérique découpé sur la sphère par ce dièdre est proportionnelle à θ ; comme l'aire de la sphère est $4\pi R^2$, l'aire du secteur est $2\theta R^2$.

Traçons maintenant trois points A, B, C formant un triangle et leurs symétriques A', B', C' par rapport au centre de la sphère O. La réunion des triangles ABC et A'BC est un secteur sphérique d'angle \hat{A} . On a donc, en notant l'aire \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(A'BC) = 2 \hat{A} R^2.$$

De même :

$$\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(AB'C) = 2 \hat{B} R^2,$$

$$\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ABC') = 2 \hat{C} R^2.$$

Les triangles AB'C' et A'BC sont symétriques par rapport à O. Bien que non superposables en général, ils ont même aire ; d'où

$$\mathcal{A}(AB'C') - \mathcal{A}(A'BC) = 0.$$

Enfin, la réunion des quatre triangles ABC, ABC' et AB'C, AB'C' est la demi-sphère contenant A et limitée par le grand cercle BCB'C'. On a donc :

$$\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(A'BC) + \mathcal{A}(AB'C) + \mathcal{A}(ABC') = 2 \pi R^2 ;$$

en retranchant cette dernière équation de la somme des trois précédentes, on obtient :

$$2 \mathcal{A}(ABC) = 2 (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi) R^2$$

ou

$$\mathcal{A}(ABC) = \delta R^2$$

Considérons par exemple sur la sphère terrestre le triangle formé, sur la bordure ouest du massif du Cantal des trois sommets : Puy de Bort-les-Orgues (859 m), Puy d'Aubassin (707 m), Puy Violent (1592m). Ce triangle est commun aux méridiennes de Cassini et de Delambre-Méchain. Il est à peu près équilatéral de côté 34

kilomètres, donc d'aire $(34)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ km}^2$; l'excès sphérique correspondant, mesuré en

radians est donc $\frac{\sqrt{3} \cdot 34^2}{4 \left[\frac{20\,000^2}{\pi} \right]}$ rad, soit 2,6 secondes.

Même pour des côtés deux fois plus grands, l'excès ne dépasserait pas 10 secondes. On en déduit :

- que la prise en compte de la sphéricité dans la triangulation n'a de pertinence que si les angles sont mesurés à quelques secondes près ;
- que l'approximation de Legendre qui néglige les termes en δ^2 est tout à fait légitime tant que l'erreur sur chaque mesure n'est pas inférieure à la seconde ;
- qu'il est possible de calculer rapidement l'ordre de grandeur de δ : si on connaît le côté a et les angles \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} d'un triangle, son aire est donnée par

$$\mathcal{A} = \frac{a^2 \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}}{2 \sin \widehat{A}}. \text{ On a donc } \delta = \frac{a^2 \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}}{R^2 2 \sin \widehat{A}}.$$

On vérifie ainsi l'absence d'erreur systématique dans la mesure des trois angles \widehat{A} , \widehat{B} et \widehat{C} . Supposons que sur les mesures de \widehat{A} , \widehat{B} et \widehat{C} nous commettons une erreur $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, les ε étant indépendants de moyenne nulle, d'écart-type σ . On a donc obtenu $\widehat{A} + \varepsilon_1, \widehat{B} + \varepsilon_2, \widehat{C} + \varepsilon_3$ auxquelles on va associer :

$$\widehat{A}' = \widehat{A} + \varepsilon_1 - \frac{1}{3} [\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - \pi] = \widehat{A} - \frac{\delta}{3} + \frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{3}.$$

De même pour \widehat{B} et \widehat{C} .

L'erreur ainsi commise sur \widehat{A}' , \widehat{B}' , \widehat{C}' est donc de moyenne nulle et d'écart-type

$$\left(E \left(\left(\frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{3} \right)^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2\sigma^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = \sigma \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

VII. Le globe terrestre aplati ou allongé ?

Dès le début du XVII^{ème} siècle, l'observation de Jupiter à la lunette montrait que cette planète était aplatie et avait approximativement la forme d'un ellipsoïde de révolution engendré par la rotation d'une ellipse autour de son petit axe. Qu'en était-il de la Terre ?

À la fin du XVII^{ème}, Huygens (1629-75) puis Newton (1642-1727) démontrent que la Terre qui est en rotation doit être aplatie mais les valeurs qu'ils proposent pour évaluer cet aplatissement sont très différentes. Quelques années plus tard, Eischmidt, s'appuyant sur les mesures d'Ératosthène, Riccioli, Picard et Snellius affirme que la terre est un sphéroïde allongé. Dominique Cassini (1625-1712) est chargé de mesurer la méridienne de Dunkerque au Canigou. L'opération ne sera achevée qu'en 1716 et les mesures conduisent à un ellipsoïde allongé dont le rapport des axes est 96/95. L'opinion scientifique se partage : Jean Bernoulli (1667-1748), frère de Jacques (1654-1705) et adversaire de Newton, partisan de la théorie des tourbillons de Descartes (1596-1650), ainsi que le géographe D'Anville se rallient à Cassini ; les Anglais, fidèles à Newton, demandent de nouvelles mesures. Le XVIII^{ème} verra s'effectuer de nouvelles campagnes de mesure, au Pérou par La Condamine et Bouguer (1698-1758), en Laponie par Maupertuis (1698-1759), au cap de Bonne-Espérance par La Caille (1713-1762) et de nouveau en France par César François Cassini (1714-1784), petit fils de Dominique. À l'étranger, des mesures sont effectuées en Italie, Pennsylvanie, Autriche, Hongrie. Il faut attendre la fin du XVIII^{ème} pour qu'une commission vérifie ces mesures et, après une longue discussion, fixe un aplatissement de 1/334 ; depuis 1940, les valeurs proposées sont très voisines de 1/298,3 (cf. VIII ci dessous).

Formulons quelques remarques et quelques éléments géométriques à l'intention d'élèves de Terminale (les figures pouvant sans difficultés être tracées à l'aide d'un logiciel graphique).

Si le globe terrestre est un ellipsoïde de révolution autour de son axe de rotation, chacun de ses méridiens est une ellipse qu'on peut décrire en mesurant des arcs. La latitude d'un point de la terre est alors définie par référence à la verticale (donnée par le fil à plomb) à un plan horizontal, par exemple le plan tangent à la surface d'une nappe d'eau en équilibre. On pourrait penser que, comme pour un globe sphérique, toutes les verticales concourent au centre. S'il en était ainsi (cf. fig. 5) et si la terre est aplatie, un arc de méridien de 1 degré serait d'autant plus court qu'il est plus proche d'un des pôles (l'inverse si l'ellipsoïde est allongé). Il n'en est rien : la Terre est aux deux-tiers recouverte par des océans et les altitudes terrestres sont définies par rapport à un « niveau de la mer » (moyen compte tenu des marées) qui définit l'ellipsoïde. En chaque point, la verticale est normale à celui-ci et (cf. fig.6), si la terre est aplatie, un arc de méridien de un degré est d'autant plus long qu'on est proche du pôle. On peut préciser, en notant $\alpha(\theta)$ la longueur d'un arc de méridien d'amplitude 1 degré à la latitude θ radians, a le demi axe équatorial et b le demi axe polaire, un calcul simple, utilisant la construction de la tangente à une ellipse considérée comme projection d'un cercle de rayon a donne



Figure 5

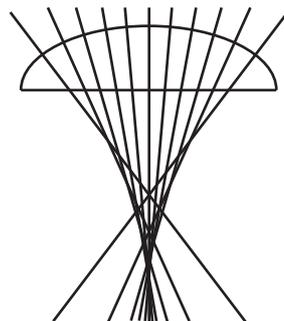


Figure 6

$$\alpha(\theta) \approx \frac{\pi}{180} \frac{a^2 b^2}{(a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}$$

Posons $a - b = R\mu$; μ est appelé *aplatissement*. En négligeant les termes du second ordre dans le développement de $\alpha(\theta)$ suivant les puissances de μ , puis en intégrant

de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$a \approx R \left(1 + \frac{\mu}{2} \right)$$

et

$$b \approx R \left(1 - \frac{\mu}{2} \right)$$

En prenant pour R le rayon d'un cercle de longueur 40 000 km : $R \approx 6\,366,2$ km, et en choisissant un aplatissement μ de 1/298,3, on a :

$$a \approx 6\,376,9 \text{ km}, b \approx 6\,355,5 \text{ km}$$

et

$$\alpha(\theta) \approx \frac{\pi}{180} R \left(1 - \frac{3}{2} \mu + 3\mu \sin^2 \theta \right) \approx 111,1 (0,995 + 0,01 \sin^2 \theta) \text{ km.}$$

À l'équateur, $\alpha(0) = 110,56$ km.

À la latitude 45° $\alpha\left(\frac{\pi}{4}\right) = 111,11$ km.

Au pôle $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = 111,67$ km.

En opérant avec soin, on peut **mesurer sur une carte** un arc d'un degré avec une précision de $1/500$ soit 0,2 kilomètres et mettre en évidence l'aplatissement en comparant des cartes d'un des pôles et d'une région équatoriale.

Nous avons fait travailler les élèves d'Orléans sur des cartes actuelles des lieux explorés et mesurés par les missions du Pérou, du Cap, de Laponie. Nous avons utilisé les cartes suivantes :

ECUADOR échelle 10^{-6} , International Travel Maps, Vancouver Canada qui comporte les méridiens et les parallèles de degré en degré.

AFRIQUE DU SUD, échelle $0,5 \cdot 10^{-6}$, Freytag et Bernot, Vienne. Cette carte comporte un quadrillage de repérage mais aucune indication sur les latitudes et longitudes.

FINLANDE DU NORD (feuille 3), échelle $0,25 \cdot 10^{-6}$ Kummerly et Frey qui comporte les latitudes de 15 en 15 minutes et les longitudes de 30 en 30.

Les élèves ont dû :

- Comparer la carte à la carte de la triangulation du XVII^{ième} siècle. Retrouver les noms de lieu (qui ont souvent changé d'orthographe).
- Si possible mesurer un arc de méridien de 1 degré. On peut aussi faire travailler les élèves sur un atlas mondial, les habituer aux conversions d'échelles et à l'utilisation des grades et des degrés, au repérage des longitudes à partir de Paris ou de Greenwich...

VIII. Le géoïde et la mesure de la terre aujourd'hui

Nous ne nous étendons pas ici sur la façon dont l'évolution technologique durant les cinquante dernières années et en particulier la mise en place de satellites artificiels de la terre a renouvelé l'étude de notre globe. Nous renvoyons à l'article de Jean Lefort *À la recherche de la forme de la Terre*, dans le n° 113 de l'Ouvert, juillet 2006.

Le Système G.P.S. (Global Positionning System) basé sur 24 satellites artificiels a été élaboré il y a une quinzaine d'années tant pour les civils que pour les militaires. La plupart des voitures possèdent maintenant un récepteur qui calcule automatiquement leur position avec une précision de quelques mètres.

Dans quelques années le système européen *Galileo* sera encore meilleur.

Avec un tel récepteur, on peut relever les coordonnées d'un point de l'établissement et les vérifier sur une carte ou un plan à grande échelle.